УДК 532.51
DOI: 10.15372/PMTF202315276

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВОЛНИСТЫМИ ВДОЛЬ ПОТОКА СТЕНКАМИ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

С использованием полных уравнений Навье — Стокса исследована линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с нижней стенкой, гофрированной вдоль потока, вследствие чего течение имеет две компоненты скорости. Численно решается обобщенная задача на собственные значения. Рассмотрены три типа возмущений: плоские периодические (параметр Флоке равен нулю), плоские двоякопериодические (конечные значения параметра Флоке) и пространственные. В широком диапазоне значений параметра гофрирования и числа Рейнольдса проанализированы нейтральные кривые. Установлено, что критическое число Рейнольдса, при превышении которого появляются нарастающие во времени возмущения, сложным образом зависит от безразмерной амплитуды и периода гофрирования. Показано, что в случае течения в канале с гофрированной стенкой трехмерные возмущения, как правило, являются более опасными. Исключение составляет малая амплитуда гофрирования, при которой более опасными являются плоские возмущения.

Ключевые слова: вязкое течение, волнистые стенки, устойчивость, ламинарно-турбулентный переход

Введение. Течение в каналах с гофрированными стенками встречается во многих приложениях [1, 2], например в компактных теплообменниках и биореакторах, устройствах охлаждения компонентов микроэлектроники, химических реакторах, топливных элементах, оксигенаторах крови и т. д. [3–5]. Область применения течений в таких каналах очень широка — от аэрокосмической отрасли до биологии [6]. Изменение волнистости стенок является одним из способов управления одно- и двухфазными течениями в каналах. Например, риблеты (волнистые структуры, расположенные поперек потока) используются для уменьшения сопротивления и задержки перехода к турбулентному режиму при обтекании крыльев [7–9]. Волнистая поверхность раздела фаз, формируемая мелкой текстурой структурированных насадок при растекании жидкой пленки, образует волнистые структуры, расположенные вдоль течения паровой фазы [10–12]. При их наличии может происходить интенсивное перемешивание пара, что в конечном счете определяет эффективность разделения нефти на фракции или воздуха на компоненты в дистилляционных колоннах, заполненных такими насадками [13]. Исследование процесса перемешивания и перехода к турбулентному режиму при малых числах Рейнольдса актуально также при решении задач охлаждения в микроустройствах [3–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-29-00507).

Проблема перехода к турбулентному режиму является одной из фундаментальных задач современной механики [14]. Стационарное ламинарное течение в каналах со стенками синусоидальной формы, приводящими к отрыву потока, численно исследовано в работе [3]. Предсказанные отрывные структуры экспериментально наблюдались в работе [4]. Для аналогичной конфигурации стенок канала в работах [15–17] установлено существование нестационарных колебаний отрывных зон. В работах [18–20] показана возможность перехода к турбулентному режиму вследствие появления апериодических колебаний отрывных зон. Задача устойчивости в случае течения в канале со стенками волнистой формы рассматривалась в работах [7, 8, 21–25]. Устойчивость анализировалась в рамках нестационарного расчета, что предполагает "перебор" начальных данных, и, как следствие, ограничивалась вариацией параметров задачи в небольших диапазонах. В настоящей работе при решении уравнений Навье — Стокса находится основное решение и проводится линеаризация исходных нелинейных уравнений в окрестности этого решения. Возмущения полей скорости и давления полагаются трехмерными с двумя волновыми числами. Далее путем решения обобщенной задачи на собственные значения анализируется весь возможный спектр возмущений.

Математический и вычислительный аппарат исследования был разработан при изучении двухфазного течения на гладких и волнистых поверхностях [26–28] и адаптирован к решению задач, рассматриваемых в данной работе при других граничных условиях на верхней стенке и в отсутствие поверхности раздела.

Целью данной работы является анализ линейной устойчивости плоского течения Пуазейля в канале с нижней стенкой, гофрированной вдоль потока, вследствие чего основное течение в таком канале имеет две компоненты скорости. Возмущения полей скорости и давления в общем случае являются трехмерными с двумя волновыми числами. В широких диапазонах значений параметра гофрирования и числа Рейнольдса проанализированы нейтральные кривые для задачи устойчивости. В зависимости от значения параметра гофрирования рассчитано критическое число Рейнольдса, при превышении которого основное течение неустойчиво и существуют нарастающие во времени возмущения. Определены наиболее опасные типы возмущений.

1. Основные уравнения. Течение жидкости между двумя горизонтальными гофрированными поверхностями, не ограниченными в x- и z-направлениях (рис. 1), описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big); \tag{1}$$

$$\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big); \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big); \tag{3}$$

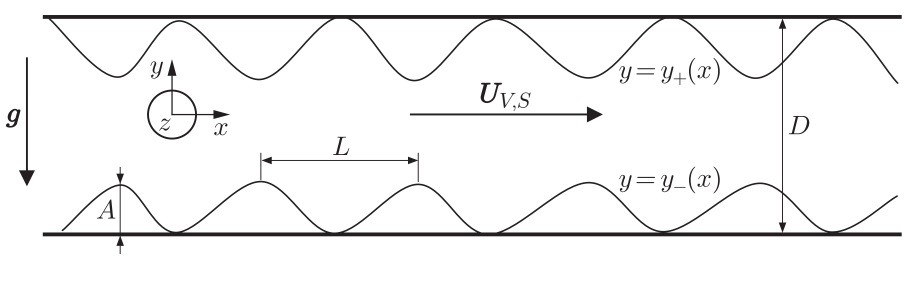

Рис. 1. Схема течения Пуазейля между двумя гофрированными поверхностями

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{4}$$

$$u = v = w = 0, \qquad y = y_-(x), \quad y = y_+(x); \tag{5}$$

$$\Big\langle \int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} u\,dy \Big\rangle = 1. \tag{6}$$

Здесь $x = x^*/L$, $y = 2y^*/D$, $z = z^*/L$, $t = u_0 t^*/L$ — безразмерные координаты и время; $u = u^*/u_0$, $v = v^*/(\varepsilon u_0)$, $w = w^*/u_0$, $P = (P^* + \rho g y^*)/(\rho u_0^2)$ — безразмерные компоненты скорости в x-, y- и z-направлениях и давление соответственно; верхний индекс "$*$" соответствует размерным величинам; $\mathrm{Re} = u_0 D/(2\nu)$ — число Рейнольдса; $\varepsilon = D/(2L)$; L — период гофрирования; D — высота канала; $u_0 = 2U_{VS}$; U_{VS} — средняя по высоте канала скорость потока; $y_-(x)$, $y_+(x)$ — форма гофрирования нижней и верхней стенок соответственно; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; $\langle\cdot\rangle$ — среднее в z-направлении. Основной поток, направленный вдоль оси x, пересекает гребни и впадины волнистых стенок $y_-(x)$ и $y_+(x)$, ось z направлена перпендикулярно плоскости рис. 1. Заметим, что из уравнения неразрывности (4) и условий прилипания (5) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} u\,dy - \frac{dy_+}{dx}\,u\Big|_{y=y_+(x)} + \frac{dy_-}{dx}\,u\Big|_{y=y_-(x)} + v\Big|_{y=y_+(x)} - v\Big|_{y=y_-(x)} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} w\,dy - \frac{dy_+}{dx}\,w\Big|_{y=y_+(x)} + \frac{dy_-}{dx}\,w\Big|_{y=y_-(x)} = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} u\,dy + \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} w\,dy = 0.$$

Отсюда в отсутствие среднего потока в z-направлении следует уравнение (6), которое в размерных переменных имеет вид

$$\Big\langle \int\limits_{y_-^*}^{y_+^*} u^*\,dy^* \Big\rangle = \mathrm{const} = U_{VS} D.$$

Для проведения дальнейших расчетов выполняется преобразование координат $x = x$, $z = z$, $\eta = (y - f_+)/f_-$, где $f_+ = (y_+ + y_-)/2$; $f_- \equiv y_+ - f_+ = (y_+ - y_-)/2$; $\eta \in [-1, 1]$ — область течения в новых переменных. Рассматриваются каналы двух типов: 1) верхняя стенка канала гладкая ($y_- = -1 + \varepsilon_1 f(x)$, $y_+ = 1$); 2) обе стенки канала гофрированные ($y_- = -1 + \varepsilon_1 f(x)$, $y_+ = 1 - \varepsilon_1 f(x)$). В обоих случаях $f(x) = (1 + \cos(2\pi x))/2$, $\varepsilon_1 = 2A/D$. В новых переменных уравнения (1)–(3) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} + (u\eta_x + v\eta_y)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar P}{\partial x} - \eta_x\,\frac{\partial \bar P}{\partial \eta} - Z +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big]; \tag{7}$$

$$\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + (u\eta_x + v\eta_y)\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big) = -\eta_y\,\frac{\partial \bar P}{\partial \eta} +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_x^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big) + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big]; \tag{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\,\frac{\partial w}{\partial x}+w\,\frac{\partial w}{\partial z}+(u\eta_x+v\eta_y)\,\frac{\partial w}{\partial \eta}=-\frac{\partial \bar P}{\partial z}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta_x^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+2\eta_x\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \eta}+(\eta_{x\xi}+\eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial w}{\partial \eta}\Big)+\varepsilon^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big]; \quad (9)$$

$$v(t,x,z,\eta)=[\eta(f_-)_x+(f_+)_x]u(t,x,z,\eta)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_-\int\limits_{-1}^{\eta}u(t,x,z,\eta')\,d\eta'\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(f_-\int\limits_{-1}^{\eta}w(t,x,z,\eta')\,d\eta'\Big); \quad (10)$$

$$u(t,x,z,\eta)=w(t,x,z,\eta)=0, \qquad \eta=-1, \qquad \eta=1; \quad (11)$$

$$\Big\langle f_-(x)\int\limits_{-1}^{1}u\,d\eta'\Big\rangle=1. \quad (12)$$

Здесь $P = Zx + \bar P$; $\eta_y = 1/f_-$; $\eta_x = -[\eta(f_-)_x + (f_+)_x]/f_-$; $\eta_{x\eta} = -(f_-)_x/f_-$; $\eta_{x\xi} = -(\eta_x(f_-)_x+\eta(f_-)_{xx}+(f_+)_{xx})/f_-$.

В задаче имеется три параметра: ε, ε_1, Re, а также безразмерная функция $f(x)$ для описания формы гофрирования. Используя полиномы Чебышева и ряд Фурье, получаем стационарные решения уравнений (7)–(12) ($\partial g/\partial t = \partial g/\partial z = 0$):

$$[u(x,z,\eta),v(x,z,\eta),w(x,z,\eta),\bar P(x,z,\eta),Z]=[u_b(x,\eta),v_b(x,\eta),0,\bar P_b(x,\eta),Z],$$

$$u_b(x,\eta)=\frac{1}{2}\,U_1(x)+\sum_{m=2}^{M}U_m(x)T_{m-1}(\eta),$$

$$U_m(x)=U_m^0+\sum_{k=-N/2+1,\ k\neq 0}^{N/2-1}U_m^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx}, \qquad (U_m^{-k})^{\text{к.с}}=U_m^k, \qquad m=1,\dots,M.$$

Здесь $T_m(\eta)$ — полиномы Чебышева; индекс “к.с” означает комплексное сопряжение.

При известной аппроксимации продольной скорости $u_b(x,\eta)$, поперечной скорости $w_b(x,\eta)=0$ и давления на нижней стенке $\bar P_b^0(x)$ скорость $v_b(x,\eta)$ однозначно определяется уравнением (10), а поле $\bar P_b(x,\eta)$ — уравнениями (8), (10):

$$v_b(x,\eta)=[\eta(f_-)_x+(f_+)_x]u_b(x,\eta)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_-\int\limits_{-1}^{\eta}u_b(x,\eta')\,d\eta'\Big); \quad (13)$$

$$\bar P_b(x,\eta)=\bar P_b^0(x)+f_-(x)\int\limits_{-1}^{\eta}\Big\{-\varepsilon^2\Big(u_b\,\frac{\partial v_b}{\partial x}+(u_b\eta_x+v_b\eta_y)\,\frac{\partial v_b}{\partial \eta'}\Big)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2}+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2}+\eta_x^2\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2}+2\eta_x\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial x\,\partial \eta'}+(\eta_{x\xi}+\eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial v_b}{\partial \eta'}\Big)\Big]\Big\}\,d\eta', \quad (14)$$

$$\bar P_b^0(x)=\sum_{k=-N/2+1,\ k\neq 0}^{N/2-1}(\bar P_b^0)^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx}, \qquad ((\bar P_b^0)^{-k})^{\text{к.с}}=(\bar P_b^0)^k.$$

В рассматриваемом случае общее число неизвестных в уравнениях (7)–(12) составляет $(M+1)(N-1)$, включая $M(N-1)$ гармоник поля скорости $u_b(x,\eta)$, градиент давления Z

и $N-2$ гармоник $\bar{P}_b^0(x)$. Для решения задачи задается начальное приближение U_m^k, Z, $(\bar{P}_b^0)^k$. Далее для уточнения начального приближения используются итерационный метод Ньютона и уравнения (7), (11)–(14). Производные и интегралы в уравнениях (7), (13), (14) рассчитываются в (n,m)-пространстве с использованием стандартных библиотечных процедур для рядов Фурье и полиномов Чебышева. Матрица Якоби в методе Ньютона рассчитывается по разностной схеме первого порядка. На каждой итерации методом исключения решается система линейных уравнений с использованием стандартных библиотечных процедур. С учетом граничных условий прилипания (11) исходная система уравнений переопределена. Для определения $(M+1)(N-1)$ неизвестных имеем $(M+3)(N-1)$ уравнений в (n,m)-пространстве — уравнения (7), (11), (12). Далее отбрасываются $2(N-1)$ уравнений, соответствующих последним двум полиномам Чебышева в разложении уравнения (7), аналогично тому как это сделано, например, в работах [26–28] с использованием спектрального метода. Получаемые результаты справедливы в случае удовлетворительной аппроксимации функций $u_b(x,\eta)$, $\bar{P}_b(x)$. Условия $|U_m^{N/2-1}|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех m и $|U_M^k|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех k выполнялись при соответствующем увеличении параметров N и M при движении по параметрам задачи.

Подставляя величины

$$u = u_b(x,\eta) + \hat{u}(x,z,\eta)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}, \qquad v = v_b(x,\eta) + \hat{v}(x,z,\eta)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.},$$

$$w = \hat{w}(x,z,\eta)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}, \qquad P = \bar{P}_b(x,\eta) + \hat{P}(x,z,\eta)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}$$

(к. с. — комплексно-сопряженная величина) в уравнения (7)–(12) и линеаризуя их в окрестности основного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений и решения задачи о линейной устойчивости стационарного решения:

$$\hat{v}(x,z,\eta) = [\eta(f_-)_x + (f_+)_x]\hat{u}(x,z,\eta) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{\eta} \hat{u}(x,z,\eta')\,d\eta'\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{\eta} \hat{w}(x,z,\eta')\,d\eta'\Big); \tag{15}$$

$$\eta_y(\hat{P}-\hat{P}_0) = \int\limits_{-1}^{\eta} \Big\{\gamma\varepsilon^2\hat{v} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\eta'^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2} + \\ + \varepsilon^2\Big(\eta_x^2\,\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\eta'^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial x\,\partial\eta'} + (\eta_{x\xi} + \eta_x\eta_{x\eta'})\,\frac{\partial\hat{v}}{\partial\eta'}\Big)\Big] - \\ - \varepsilon^2\Big(u_b\,\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + (u_b\eta_x + v_b\eta_y)\,\frac{\partial\hat{v}}{\partial\eta'} + \hat{u}\,\frac{\partial v_b}{\partial x} + (\hat{u}\eta_x + \hat{v}\eta_y)\,\frac{\partial v_b}{\partial\eta'}\Big)\Big\}\,d\eta'; \tag{16}$$

$$-\gamma\hat{u} = -\frac{\partial\,(\hat{P}-\hat{P}_0)}{\partial x} - \frac{\partial\hat{P}_0}{\partial x} - \eta_x\,\frac{\partial\,(\hat{P}-\hat{P}_0)}{\partial\eta} + \\ + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\eta^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} + \varepsilon^2\Big(\eta_x^2\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\eta^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x\,\partial\eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta}\Big)\Big] - \\ - \Big(u_b\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + (u_b\eta_x + v_b\eta_y)\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta} + \hat{u}\,\frac{\partial u_b}{\partial x} + (\hat{u}\eta_x + \hat{v}\eta_y)\,\frac{\partial u_b}{\partial\eta}\Big); \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
-\gamma\hat{w} = -\frac{\partial\,(\hat{P}-\hat{P}_0)}{\partial z} - \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial z} + \\
+\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\eta^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2} + \varepsilon^2\Big(\eta_x^2\,\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\eta^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x\,\partial\eta} + (\eta_{x\xi}+\eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial\hat{w}}{\partial\eta}\Big)\Big] - \\
-\Big(u_b\,\frac{\partial\hat{w}}{\partial x} + u_b\eta_x\,\frac{\partial\hat{w}}{\partial\eta} + v_b\eta_y\,\frac{\partial\hat{w}}{\partial\eta}\Big); \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{u}(x,z,\eta) = \hat{w}(x,z,\eta) = 0, \qquad \eta=-1, \qquad \eta=1; \qquad (19)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_-\!\!\int_{-1}^{1}\hat{u}\,d\eta'\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(f_-\!\!\int_{-1}^{1}\hat{w}\,d\eta'\Big) = 0. \qquad (20)
$$

Здесь $\hat{P}_0(x,z) = \hat{P}(x,z,\eta)|_{\eta=-1}$ — возмущенное давление на нижней стенке.

В соответствии с теоремой Флоке решения линейной системы уравнений с периодическими коэффициентами могут быть представлены в следующем виде:

$$
\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1}\hat{U}_1^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx} + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(\eta)\sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1}\hat{U}_m^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx} \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1}\hat{W}_1^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx} + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(\eta)\sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1}\hat{W}_m^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx} \\ \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1}\hat{P}_0^k\,\mathrm{e}^{2\pi ikx} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2\pi i(Qx+Q_z z)} \qquad (21)
$$

($Q\in[0, 0{,}5]$, Q_z — положительные вещественные параметры). В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида

$$
A\hat{x} = \gamma B\hat{x}, \qquad \hat{x} = (\hat{U}_m^k, \hat{W}_m^k, \hat{P}_0^k)^{\mathrm{T}}. \qquad (22)
$$

Матрицы A, B имеют размерность $(2M+1)(N-1)$ в случае $Q+Q_z\neq 0$ и $(2M+1)(N-1)-1$ в случае $Q+Q_z=0$. Элементы этих матриц определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений $\hat{u}$, $\hat{w}$, $\hat{P}_0$ и подстановки их в уравнения (15)–(20). Для каждого такого вектора поле $\hat{v}(x,z,\eta)$ однозначно определяется уравнением (15), а поле $\hat{P}(x,z,\eta)$ — уравнениями (15), (16).

Производные и интегралы в уравнениях (15)–(20) рассчитываются в (n,m)-пространстве с использованием стандартных библиотечных процедур для рядов Фурье и полиномов Чебышева. Далее отбрасываем $2(N-1)$ уравнений, соответствующих последним двум полиномам Чебышева в разложении уравнений (17), (18), и вместо них используем условия прилипания (19). Уравнение (20) используется для определения $\hat{P}_0(x,z)$. Получаемые результаты справедливы в случае удовлетворительной аппроксимации функций $\hat{u},\hat{w},\hat{P}_0$. Условия $|\hat{U}_m^{N/2-1}|/\sup|\hat{U}_m^k| < 10^{-3}$ для всех m и $|\hat{U}_M^k|/\sup|\hat{U}_m^k| < 10^{-3}$ для всех k выполнялись при соответствующем увеличении параметров N и M при движении по параметрам задачи (аналогичные условия выполняются для полей $\hat{w}$ и $\hat{P}_0$). Обобщенная задача на собственные значения для комплексных матриц общего вида решалась численно с использованием стандартной библиотечной процедуры QZ-алгоритма, аналогично тому как это сделано, например, в работах [26–28], посвященных исследованию устойчивости.

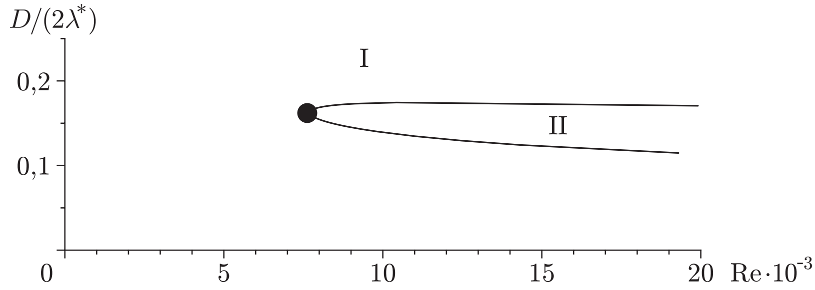

Рис. 2. Области устойчивости (I) и неустойчивости (II) течения жидкости в канале с гладкими стенками ($\varepsilon_1 = 0$) (точка — результаты расчета [29])

С помощью алгоритма определяются комплексные векторы α_j и β_j — числитель и знаменатель j-го собственного значения. Будем рассчитывать и анализировать j-е собственное значение при условии $\beta_j > 10^{-10}$.

В общем случае возмущения (21) имеют две несоизмеримые длины волны $\lambda_1^* = L$, $\lambda_2^* = L/Q$ в x-направлении и одну длину волны L/Q_z в поперечном относительно потока z-направлении. Для исследования устойчивости стационарного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$ необходимо проанализировать $(2M+1)(N-1)$ собственных чисел задачи (22), варьируя волновые числа возмущений $\alpha = 2\pi Q\varepsilon$ и $\alpha_z = 2\pi Q_z\varepsilon$. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волновых чисел. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю: $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$.

Следует отметить, что при $Q + Q_z = 0$ возмущения являются выделенными. Такие возмущения являются периодическими в x-направлении, их длина волны совпадает с длиной волны основного решения и периодом гофрирования стенки. В рамках решения задачи Коши (эволюция начального периодического возмущения для уравнений (7)–(12)) такие возмущения нельзя исключить и их развитие означает невозможность реализации основного решения, по крайней мере, в процессе численного решения задачи Коши. Имеется аналогия с задачей Капицы о волновом стекании тонкого слоя вязкой жидкости в поле силы тяжести [28]. Теоретически существует два типа длинных волн, которым соответствуют периодические в пространстве режимы первого и второго типов. Мгновенный волновой профиль толщины пленки второго типа имеет четко выраженные “волну-возвышение” и “капиллярную” рябь на переднем фронте. Длинные волны первого типа имеют характерные вмятины с “капиллярной” рябью на заднем фронте. Исследование двумерной устойчивости течения показало, что при всех числах Рейнольдса “волны-вмятины” неустойчивы к возмущениям с $Q = 0$ [28], в то время как “волны-возвышения” устойчивы к ним. Следует отметить, что, несмотря на большое количество проведенных экспериментов, волн, которые можно отнести к числу “волн-вмятин”, в экспериментах не обнаружено, наблюдаются только волны второго типа.

В случае $Q_z = 0$ возмущения имеют две компоненты скорости и зависят от двух координат. В данной работе рассматриваются как трехмерные, так и двумерные возмущения. Согласно теореме Сквайера [14] в случае гладких стенок двумерные возмущения наиболее опасны на линейной стадии и начинают нарастать при значениях числа Рейнольдса, меньших, чем в случае трехмерных возмущений. В случае гофрированных стенок данная теорема не применима.

Для тестирования алгоритма расчета были воспроизведены результаты работы [29] (точка на рис. 2), в которой рассматривалась устойчивость течения жидкости в канале

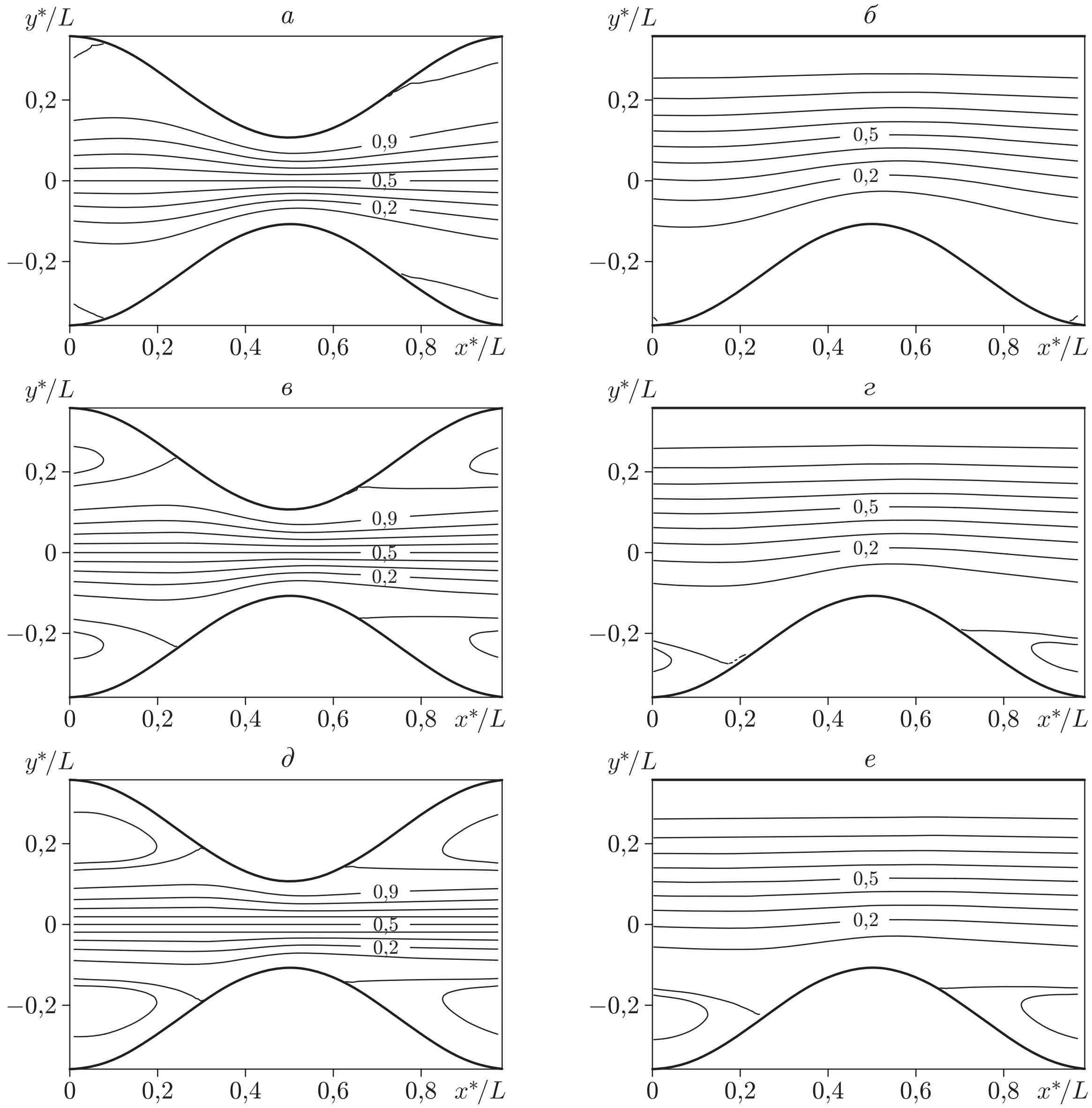

Рис. 3. Изолинии для функции тока основного течения $\Psi(x^*, y^*)$ в канале с двумя гофрированными стенками (*а, в, д*) и с одной гофрированной стенкой (*б, г, е*) при $\varepsilon_1 = 2A/D = 0{,}7013$, $\varepsilon = D/(2L) = 0{,}358\,14$:
а, б — $\mathrm{Re} = 20$, *в, г* — $\mathrm{Re} = 50$, *д, е* — $\mathrm{Re} = 100$

с гладкими стенками ($\varepsilon_1 = 0$). Область II на рис. 2 соответствует результатам расчетов, выполненных в данной работе, и является областью параметров $\Omega_1(D/(2\lambda^*), \mathrm{Re})$, в которой двумерные периодические возмущения с длиной волны λ^* нарастают во времени. На рис. 3 представлены рассчитанные в данной работе изолинии для функции тока $\Psi(x^*, y^*)$ в случае течения в канале с двумя гофрированными стенками (см. рис. 3,*а*) и с одной гофрированной стенкой (см. рис. 3,*б*) при $\varepsilon_1 = 2A/D = 0{,}7013$, $\varepsilon = D/(2L) = 0{,}358\,14$. На рис. 4 представлены результаты расчетов, полученные в настоящей работе (сплошные и штриховые линии *1–4*), а также данные работ [17, 21] (точки I, II). Экспериментально получены и численно рассчитаны зависимости максимального значения функции тока $\Psi(x^*, y^*)$ в зоне рециркуляции от числа Рейнольдса. Впервые устойчивость течения в канале с двумя

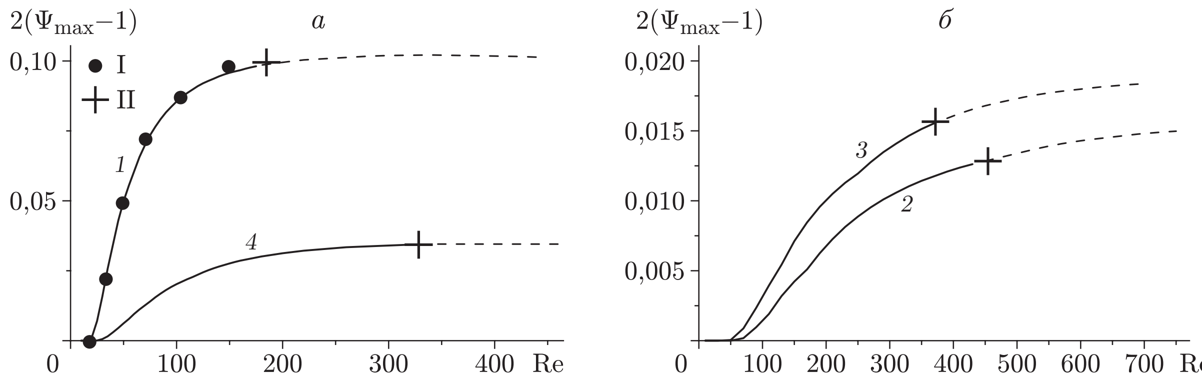

Рис. 4. Зависимость максимального значения функции тока $\Psi(x^*, y^*)$ в зоне рециркуляции от числа Рейнольдса для течения в канале с двумя гофрированными стенками (*1–3*) и с одной гофрированной стенкой (*4*):
а — $2(\Psi_{\max} - 1) = 0 \div 0{,}1$, *б* — $2(\Psi_{\max} - 1) = 0 \div 0{,}02$; *1*, *4* — $\varepsilon_1 = 0{,}7013$, $\varepsilon = 0{,}358\,14$, *2* — $\varepsilon_1 = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}416\,67$, *3* — $\varepsilon_1 = 0{,}4252$, $\varepsilon = 0{,}4233$; линии — результаты расчетов, выполненных в данной работе, штриховые линии — участки неустойчивости основного течения относительно двумерных возмущений с $Q = 0$ ($Q_z = 0$); I — результаты экспериментов [17] и расчетов [21], II — полученные в работе [21] точки перехода к неустойчивому режиму течения

гофрированными стенками исследовалась в работе [21], где рассчитывалось критическое число Рейнольдса, при котором течение становится неустойчивым. Рассчитанные в данной работе точки смены устойчивости (см. рис. 4,*б*) совпадают с результатами расчетов [21]. Из рис. 2, 4 следует, что результаты расчетов, выполненных в настоящей работе, хорошо согласуются с известными данными. Это свидетельствует о корректности предлагаемого численного алгоритма. Далее проводится анализ течения в канале с одной гофрированной стенкой.

2. Результаты расчетов. На первом этапе исследовалась устойчивость стационарного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$ относительно возмущений с $Q = Q_z = 0$. В задаче имеется три параметра: $2A/D$, $D/(2L)$ и число Рейнольдса или ε_1, ε, Re. Устойчивость решения изучалась в диапазоне параметра $2A/D = 0{,}001 \div 0{,}400$. В этом диапазоне рассматривались пять точек. Исследования проводились в диапазоне значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100 \div 20\,000$ с шагом 200. Расчеты устойчивости были проведены в диапазоне значений параметра $D/(2L) = 0{,}05 \div 1{,}25$ с шагом 0,05. В том случае, когда течение становилось неустойчивым, методом деления пополам уточнялось значение $D/(2L)$ и строились нейтральные кривые (сплошные линии на рис. 5). На этих кривых вещественная часть одного из собственных значений обращается в нуль: $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$ при $Q = Q_z = 0$. Для пяти значений $2A/D$ данные кривые ограничивают область параметров $(D/(2L), \mathrm{Re}) \in \Omega^i_{Q=0}$, $i = 1, \ldots, 5$, в которой основное течение является неустойчивым относительно двумерных возмущений, имеющих период, равный периоду гофрирования. При малом значении амплитуды гофрирования область $\Omega^1_{Q=0}$ представляет собой объединение области $(D/(2L), \mathrm{Re})$ (см. рис. 2) и областей “неустойчивых субгармоник” $(D/(4L), \mathrm{Re})$, $(D/(6L), \mathrm{Re})$, $\ldots$. Следует отметить, что длина волны λ^* на рис. 2 и период гофрирования L на рис. 5 имеют разный физический смысл. С увеличением амплитуды гофрирования области $\Omega^i_{Q=0}$ (см. рис. 5) распространяются в область меньших значений как числа Рейнольдса, так и периода гофрирования L. Заметим также, что существуют параметры гофрирования, при которых основное течение устойчиво относительно возмущений с $Q = Q_z = 0$ вплоть до наибольших чисел Рейнольдса, рассмотренных в работе.

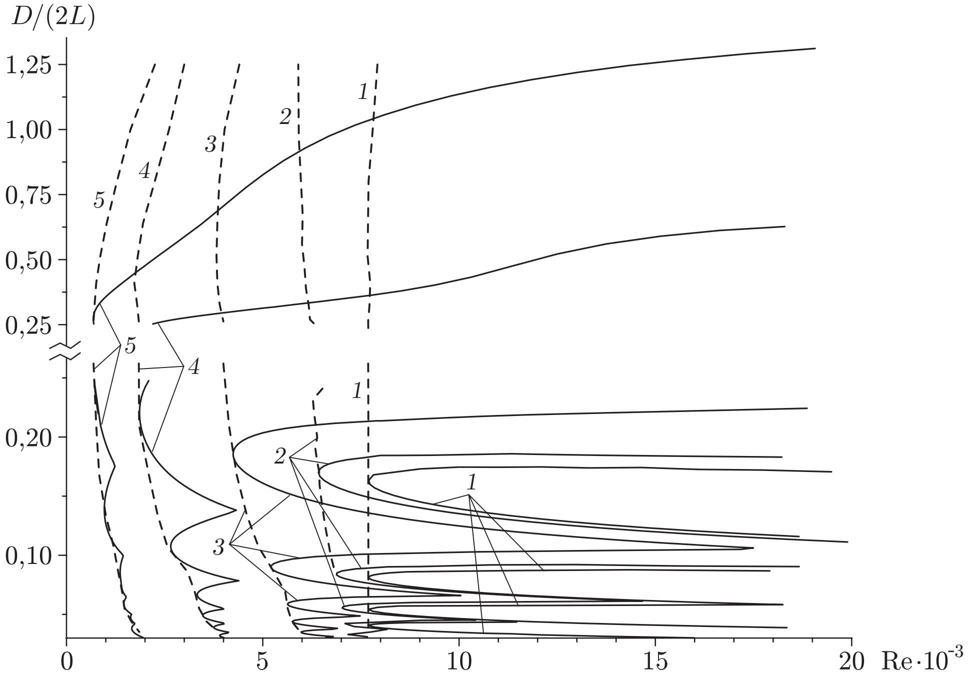

Рис. 5. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой относительно двумерных возмущений ($Q_z = 0$):
сплошные линии — границы областей $(D/(2L), \mathrm{Re}) \in \Omega^i_{Q=0}$, $i = 1, \ldots, 5$, штриховые — границы областей $\Omega^i_{Q\neq 0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 1, \ldots, 5$; *1* — $i = 1$, $2A/D = 0{,}001$, *2* — $i = 2$, $2A/D = 0{,}05$, *3* — $i = 3$, $2A/D = 0{,}1$, *4* — $i = 4$, $2A/D = 0{,}2$, *5* — $i = 5$, $2A/D = 0{,}4$

На втором этапе исследовалась устойчивость стационарного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$ по отношению к двумерным возмущениям с конечными значениями параметра Флоке $Q \in [0{,}001, 0{,}500]$ ($Q_z = 0$). Исследовался тот же диапазон значений амплитуды гофрирования и числа Рейнольдса, что и при изучении устойчивости по отношению к возмущениям с $Q = Q_z = 0$. При расчетах устойчивости для каждого значения параметра $D/(2L)$, который менялся в диапазоне $0{,}05 \div 1{,}25$ с шагом 0,05, вычислялось значение параметра Флоке, при котором значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было минимальным. При больших значениях числа Рейнольдса такое значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было отрицательным и для каждого набора ε_1, ε, Re существовал диапазон значений параметра Флоке с неустойчивыми плоскими возмущениями. При малых значениях числа Рейнольдса такое значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было положительным и основное решение с набором параметров ε_1, ε, Re было устойчивым относительно всех возмущений с конечными значениями Q. Для штриховых линий *1–5* на рис. 5 как $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$, так и $\partial \mathrm{Real}\,(\gamma)/\partial Q = 0$. Эти линии ограничивают области параметров $\Omega^i_{Q\neq 0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 1, \ldots, 5$, в которых основное течение является неустойчивым относительно двупериодических плоских возмущений с конечными значениями параметра Q ($Q_z = 0$). Эти области значительно больше соответствующих областей устойчивости относительно плоских периодических возмущений с $Q = Q_z = 0$.

Далее исследовалась устойчивость относительно трехмерных возмущений (19) при различных значениях параметра Q_z ($Q = 0$) (рис. 6). В этом случае возмущения скорости имеют три компоненты. На рис. 6 показаны также результаты исследования устойчивости относительно плоских возмущений ($Q_z = Q = 0$). Сплошные линии *1, 4–6* на рис. 6 совпадают со сплошными линиями *2–5* на рис. 5. Штриховые линии *1–6* на рис. 6 ограничивают

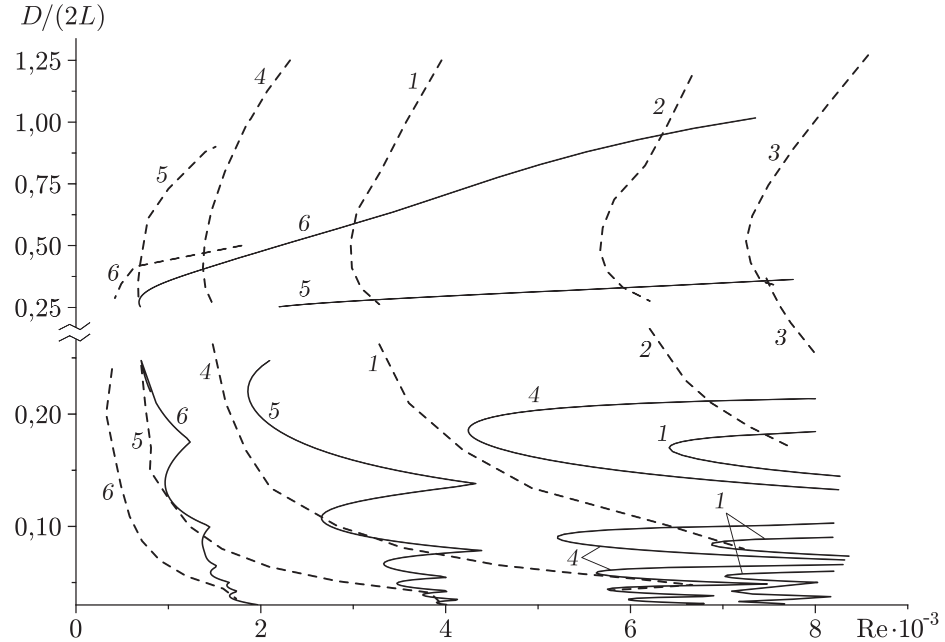

Рис. 6. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой относительно трехмерных возмущений ($Q_z \neq 0$, $Q = 0$):
сплошные линии — границы областей $(D/(2L), \mathrm{Re}) \in \Omega^i_{Q=0}$, $i = 2, \ldots, 5$, штриховые — границы областей $\Omega^i_{Q_z \neq 0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 2, \ldots, 5$; *1* — $i = 2$, $2A/D = 0{,}05$, *2* — $i = 2$, $2A/D = 0{,}03$, *3* — $i = 2$, $2A/D = 0{,}025$, *4* — $i = 3$, $2A/D = 0{,}1$, *5* — $i = 4$, $2A/D = 0{,}2$, *6* — $i = 5$, $2A/D = 0{,}4$

области $\Omega^i_{Qz\neq 0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 2, \ldots, 5$, в которых существуют нарастающие во времени пространственные возмущения с конечными значениями параметра Q_z ($Q = 0$). Для этих линий как $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$, так и $\partial \mathrm{Real}\,(\gamma)/\partial Q_z = 0$. При расчетах устойчивости для каждого значения параметра $D/(2L)$ вычислялось значение параметра Q_z, при котором значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было минимальным. При уменьшении амплитуды гофрирования штриховые линии на рис. 6 быстро смещаются в область больших чисел Рейнольдса и при $2A/D = 0{,}001$ не могут быть показаны. Результаты сравнения рис. 5 и 6 позволяют сделать вывод, что с точки зрения устойчивости течения вдоль канала трехмерные возмущения являются более опасными по сравнению с двумерными.

Заключение. С использованием полных уравнений Навье — Стокса рассмотрена линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована вдоль потока, и основное течение имеет две компоненты скорости. В широком диапазоне значений параметра гофрирования и числа Рейнольдса проанализированы нейтральные кривые. Рассмотрены три типа возмущений: плоские периодические (параметр Флоке равен нулю), плоские двоякопериодические (конечные значения параметра Флоке) и пространственные. В зависимости от параметра гофрирования рассчитаны критические числа Рейнольдса $\mathrm{Re}^i_{cr}(2A/D, D/(2L))$, $i = 1, 2, 3$, при превышении которых основное течение неустойчиво и существуют нарастающие во времени возмущения указанных трех типов. С ростом амплитуды гофрирования значения $\mathrm{Re}^1_{cr}(2A/D, D/(2L))$ смещаются в область меньших значений.

В канале с гладкими стенками течение Пуазейля неустойчиво начиная с числа Рейнольдса $\mathrm{Re}^P_{cr} \approx 7500$. Наиболее опасными являются плоские возмущения. Установлено, что с точки зрения устойчивости течения в канале с гофрированной стенкой трехмерные возмущения, как правило, являются более опасными. Исключение составляет малая амплитуда гофрирования, при которой более опасными являются плоские возмущения.

Автор выражает благодарность А. З. Квон и И. В. Бондаренко за обсуждение работы и помощь при проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Boiko A. V.** Physics of transitional shear flows / A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek, V. V. Kozlov. Berlin: Springer, 2011.
2. **Goldstein D. B., Tuan T.-C.** Secondary flow induced by riblets // J. Fluid Mech. 1998. V. 363. P. 115–151.
3. **Sobey I. J.** On flow through furrowed channels. Pt 1. Calculated flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96, N 1. P. 1–26.
4. **Stepanoff K. D., Sobey I. J., Bellhouse B. J.** On flow through furrowed channels. Pt 2. Observed flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96, N 1. P. 27–32.
5. **Sparrow E. M., Hossfeld L. M.** Effect of rounding of protruding edges on heat transfer and pressure drop in a duct // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. P. 1715–1723.
6. **Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M.** Physics and applications of microfluidics in biology // Annual Rev. Biomed. Engng. 2002. V. 4, N 1. P. 261–286.
7. **Бойко А. В.** Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью / А. В. Бойко, Н. В. Клюшнев, Ю. М. Нечепуренко. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша, 2016.
8. **Григорьев О. А., Клюшнев Н. В.** Устойчивость течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 4. С. 595–606.
9. **Зверков И. Д., Крюков А. В.** Воздействие на пограничный слой крыла малоразмерного летательного аппарата с помощью волнистой поверхности. Проблемы и перспективы (Обзор) // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 3. С. 180–198.
10. **Kistle S. F.** Liquid film coating / S. F. Kistle, P. M. Schweizer. N. Y.: Chapman and Hall, 1997.
11. **Weinstein S. J., Ruschak K. J.** Coating flows // Annual Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 29–53.
12. **DeSantos J. M., Melli T. R., Scriven L. E.** Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // Annual Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 233–260.
13. **Trifonov Y. Y.** Modeling of mixture separation in column with structured packing // Multiphase Sci. Technol. 2022. V. 34, N 1. P. 23–51.
14. **Kachanov Y. S.** Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annual Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 411–482.
15. **Nishimura T., Ohori Y., Kawamura Y.** Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Engng Japan. 1984. V. 17, N 5. P. 466–471.
16. **Nishimura T., Ohori Y., Kajimoto Y., Kawamura Y.** Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Engng Japan. 1985. V. 18, N 6. P. 550–555.
17. **Nishimura T., Murakami S., Arakawa S., Kawamura Y.** Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds numbers for steady flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1990. V. 33. P. 835–845.
18. **Guzman A. M., Amon C. H.** Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle — Takens — Newhouse scenario // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 6. P. 1994–2002.
19. **Guzman A. M., Amon C. H.** Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regimes in converging-diverging channels // J. Fluid Mech. 1996. V. 321. P. 25–57.

20. **Amon C. H., Guzman A. M., Morel B.** Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging-diverging channel flows // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 5. P. 1192–1206.
21. **Cho K. J., Kim M.-U., Shin H. D.** Linear stability of two-dimensional steady flow in wavy-walled channels // Fluid Dynamics Res. 1998. V. 23, N 6. P. 349–370.
22. **Cabal A., Szumbarski J., Floryan J. M.** Stability of flow in a wavy channel // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 191–212.
23. **Floryan J. M., Floryan C.** Traveling wave instability in a diverging-converging channel // Fluid Dynamics Res. 2010. V. 42, N 2. 025509.
24. **Szumbarski J.** Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls // J. Theor. Appl. Mech. 2007. V. 45, N 3. P. 659–683.
25. **Yadav N., Gepner S. W., Szumbarski J.** Instability in a channel with grooves parallel to the flow // Phys. Fluids. 2017. V. 29, N 10. 084104.
26. **Trifonov Y. Y.** Stability of a film flowing down an inclined corrugated plate: The direct Navier — Stokes computations and Floquet theory // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 114101.
27. **Schörner M., Reck D., Aksel N., Trifonov Y.** Switching between different types of stability isles in films over topographies // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 423–436.
28. **Трифонов Ю. Я.** Волны на стекающих пленках жидкости. Расчет устойчивости к произвольным двумерным возмущениям и “оптимальные” режимы стекания // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 188–198.
29. **Orszag S. A.** Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 689–703.

Поступила в редакцию 20/III 2023 г.,
после доработки — 18/VI 2023 г.
Принята к публикации 26/VI 2023 г.