

УДК 165.0+168.3+168.51
DOI: 10.15372/PS20230107

Л.Д. Ламберов

СТРОГОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА: «СЕРАЯ ЗОНА» МЕЖДУ ФОРМАЛИЗАЦИЕЙ И ПРАКТИКОЙ¹

Одним из основных требований, предъявляемых к математическим доказательствам, является требование строгости. Строгость гарантирует наличие логической связи между доказываемым положением и принимаемыми допущениями или аксиомами. Традиционно считается, что строгость математического доказательства обеспечивается обращением к формализации. Однако такое понимание не соответствует математической практике. Подавляющее количество доказательств (как в прошлом, так и в настоящее время) дается в неформальном виде и принимается сообществом математиков-экспертов без какой-либо формализации. В статье представлена предположенная С. Де Тоффоли альтернативная позиция относительно строгости математического доказательства, которая, как предполагается, соответствует практике.

Статья разделена на четыре части. В первой части рассматривается традиционное понимание доказательства как обозримой и формализуемой конструкции, используемой для целей убеждения, обсуждаются структура доказательства и стандартное понимание строгости, обеспечиваемой формализацией. Во второй части обсуждается практика обращения к «манипулятивному воображению» в рамках топологии и демонстрируется особый статус этой способности в «заполнении» пробелов в неформальных доказательствах. Утверждается, что эта способность вырабатывается в ходе соответствующего обучения и предполагает только такие манипуляции, которые обоснованы со строго формальной точки зрения. В третьей части обсуждается альтернативное традиционному понятие доказательства как общепользуемой и формализуемой конструкции, компоненты («шаги») которой могут быть перечислены, а также вводится понятие будто-доказательства, которое представляет собой средство объяснения математической практики принятия неполных или содержащих ошибки доказательств. В четвертой части статьи формулируются заключительные моменты, касающиеся обязательств принятия релятивизма и антиреалистской онтологии при излагаемом объяснении понятий доказательства и строгости.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Программы развития Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

Ключевые слова: доказательство; формализуемость; философия математики; математическая практика; будто-доказательство; локальная общезначимость

L.D. Lamberov

THE RIGOR OF PROOF: THE “GREY ZONE” BETWEEN FORMALIZATION AND PRACTICE

One of the main requirements for mathematical proofs is that of rigor. Rigor guarantees that there is a logical connection between the proposition being proved and the assumptions or axioms being accepted. Traditionally, the rigor of a mathematical proof is thought to be ensured by appealing to formalization. However, this understanding does not correspond to mathematical practice. The vast majority of proofs (both in the past and at present) are given informally and accepted by the community of expert mathematicians without any formalization. The article presents an alternative position regarding the rigor of mathematical proof proposed by S. De Toffoli, which is supposed to be consistent with practice.

The article is divided into four parts. The first part considers the traditional understanding of proof as a surveyable and formalizable construct used for persuasion; it discusses the structure of proof and the standard understanding of rigor provided by formalization. The second part of the article discusses the practice of referring to “manipulative imagination” with respect to topology and shows the special status of this ability in “filling in” gaps in informal proofs. It is argued that this ability is developed through an appropriate training and involves only such manipulations that are justified from a strictly formal point of view. The third part discusses an alternative to the traditional notion of proof as a shareable, transferable and formalizable construct, components (“steps”) of which can be enumerated. Also, it introduces the notion of *simil-proof* which is a means of explaining the mathematical practice of accepting incomplete or error-containing proofs. In the fourth part of the article, the final points are formulated concerning the commitments of accepting relativism and anti-realist ontology when explaining the notions of proof and rigor.

Keywords: proof; formalizability; philosophy of mathematics; mathematical practice; *simil-proof*; local

I

Распространенное понимание доказательства [21, p. 59] заключается в том, что последнее обладает свойствами (1) убедительности, (2) обозримости и (3) формализуемости. Доказательство – это средство, с помощью которого одни люди убеждают других или самих себя в том, что нечто имеет место. Для того чтобы доказательству можно было доверять, оно должно поддаваться проверке, а это предполагает возможность его обозреть. Далеко не всякое доказательство является формализованным, обычно доказательства строятся неформальным образом при допущении, что в любой мо-

мент любое данное доказательство можно формализовать. Формализованное доказательство представляет собой максимально открытую для проверки конструкцию, так как при формализации заполняются все имеющиеся в доказательстве пробелы, допущения формулируются явным образом, а относительно каждого шага доказательства ясно, каким образом он получен. Формализованное доказательство разбито на множество элементарных шагов, которые, подобно звеньям цепи, скреплены друг с другом логической связью. Другими словами, в формализованном доказательстве либо переходы от одного шага к другому осуществляются в соответствии с правилами вывода, либо шаги представляют собой аксиомы (или допущения, если это доказательство, например, некоторого условного утверждения).

Наиболее простая структура доказательства предполагает три компонента: (1) доказываемое положение (т.е. тезис, заключение); (2) допущения (т.е. аргументы, посылки); (3) логическую связь между (1) и (2) (т.е. демонстрацию). В том случае, когда логическая связь между (1) и (2) отсутствует, доказательство признается недостаточным для обоснования доказываемого положения. Доказательство, в котором из допущения логически выводится доказываемое положение, называется строгим. Формализованное доказательство является строгим, иначе оно некорректно, а поскольку требование формализуемости составляет содержание понятия доказательства, постольку всякое верное доказательство является формализуемым [13, p. 17].

Относительно строгости доказательства имеются дальнейшие соображения, связывающие понятие строгости с понятиями простоты и понятности. Например, по мнению Д. Гильберта, «наиболее строгий метод доказательства в то же время оказывается более простым и понятным» [15, p. 447]. Конечно же, Д. Гильберт имел в виду формализованные доказательства. В недавней статье В.В. Целищев и А.В. Хлебалин [3] противопоставляют неформальные (содержательные) доказательства их формализованным представлениям и отмечают, что проблема соотношения указанных двух видов доказательств требует различения их параметров. Это строгость формализованных доказательств как отсутствие в них пробелов, а также наличие смысла в неформализованных доказательствах в противовес механическому преобразованию знаков. Рассматривая три типа языков (повседневный, символической логики и «лейбни-

цевский») и продолжая противопоставление неформальных и формализованных доказательств как противопоставление повседневного языка и языка символической логики, с помощью которых формулируются соответствующие виды доказательств, В.В. Целищев и А.В. Хлебалин отмечают, что вследствие отсутствия языков «лейбницевского» типа противопоставление ясности (возможно, в смысле интуитивного понимания) и строгости снять не удастся. Другими словами, заявляемый Д. Гильбертом (см. цитату выше) идеал строгого доказательства оказывается пока недостижимым. Далее, что касается ясности и строгости, в связи с отсутствием языков «лейбницевского» типа В.В. Целищев и А.В. Хлебалин акцентируют внимание на «соотношении этих характеристик доказательства в настоящей математической практике» [3, с. 68], для чего предлагают разработать динамический подход к соотношению неформальных теорий и их формализаций. При таком подходе формализация должна играть роль важного эпистемологического инструмента, который «не только ограничивает проблемы, изучаемые на практике, но также порождает новые способы рассуждения, могущие дополнять стандартные методы доказательства в разных областях математики» [3, с. 69]. Подобное обращение к математической практике следует только приветствовать.

Однако хочется обратить внимание на другой подход к понятию строгости математического доказательства, в котором обращение к математической практике играет даже более существенную роль. Как указано выше, строгость математического доказательства предполагает, что заключение выводится из допущений, а вывод не содержит пробелов. Такое понимание строгости можно связать с тривиальной формализуемостью в том отношении, что если доказательство не содержит пробелов и заключение выводится из допущений, то это доказательство уже достаточно подробно и для его формализации не требуется восстанавливать логическую структуру рассуждений. Другими словами, в таком подробном доказательстве логическая структура уже является достаточно явной. Поскольку речь идет о логической связи между заключением и допущениями, постольку строгими в полном смысле следует считать общезначимые доказательства. Представляется, что такое понимание можно рассматривать как концепцию строгости, трактуемой как глобальная общезначимость. Под глобальной общезначимостью здесь подразумеваются критерии общезначимости, применяемые ко всем об-

ластям знания, в данном случае математического. Условно, какое бы доказательство ни было взято из любого раздела математики, оно будет считаться строгим, если оно общезначимо в сугубо логическом смысле. По аналогии с выделением глобальной обозримости и локальной обозримости [5] математического доказательства можно вполне обоснованно задаться вопросом о возможности и адекватности концепции строгости как локальной общезначимости. Близкая концепция относительно недавно предложена С. Де Тоффоли и В. Жардино [11].

II

Концепция строгости как локальной общезначимости предполагает пристальное внимание к математической практике в каждой отдельно взятой области математики. В качестве примера авторы этой концепции обращаются к топологии, в частности к теории узлов. С их точки зрения, пробелы в неформальных доказательствах «заполняются» с помощью особой способности пространственной интуиции. Другими словами, репрезентация, рисунки и наглядное представление манипуляций над математическими объектами (или скорее над их мысленными образами) играют особую роль, если можно так выразиться, в обеспечении строгости доказательства. Выполнение этой роли в рамках топологического доказательства возможно благодаря этой особой способности, которую С. Де Тоффоли и В. Жардино называют «манипулятивным воображением» [11, p. 316]. С помощью этой способности работающий математик может мысленно соединять используемые в рамках одного доказательства рисунки (например, изображающие гомеоморфизмы). Однако применение указанной способности является контекстно зависимым и не может быть без каких-либо серьезных изменений по аналогии перенесено на другие разделы математики. Таким образом, предполагается, что корректность доказательств в области теории узлов определяется особой формой репрезентации и способностью манипулятивного воображения. Одним из обоснований для рассмотренного подхода является некоторая трансформация исследований в философии математики, приводящая к возрастанию внимания к математической практике. Такой, по словам С. Де Тоффоли и В. Жардино, «практический поворот» предполагает, что «математика должна быть признана не только в качестве абстрактной науки,

но также и в качестве человеческой деятельности со своей динамикой» [11, р. 315]². В частности, в рассмотренной теории узлов «доказательство может иметь форму последовательности рисунков, дополненных инструкциями, а трансформации рисунков являются результатом разрешенных эпистемических действий» [11, р. 335]. Таким образом, авторы утверждают, что «практика доказательства в топологии основывается на представлении в воображении [различных] трансформаций соответствующих репрезентаций объектов топологии и оперирования ими» [12, р. 27].

Без сомнения, такое понимание доказательства не соответствует высоким требованиям строгости как глобальной общезначимости. Неформальное доказательство в теории узлов не является синтаксическим объектом, представляющим собой последовательность шагов, а пробелы в доказательстве можно назвать специальными отсылками к пространственной интуиции, гарантирующей, что осуществляемые с помощью манипулятивного воображения трансформации являются изотопическими трансформациями. Другими словами, синтаксическая последовательность шагов (т.е. утверждений) прерывается последовательностью действий манипулятивного воображения, которые хотя и могут быть описаны, но в большинстве случаев представляют собой последовательность рисунков, над которыми в воображении осуществляются *строго* (sic!) определенные действия.

Однако необходимо отметить, что способность манипулятивного воображения не является способностью, основанной исключительно на некотором аналоге «внутреннего» зрения. По утверждению С. Де Тоффоли и В. Жардино, действия, составляющие такое топологическое доказательство, «основываются на некоторой форме воображения, использующей уже имеющиеся когнитивные способности, связанные с манипуляцией над конкретными пространственно-временными объектами и усиленные специальными математическими знаниями» [12, р. 44]. Это не произвольные действия, а специально тренируемые преобразования, которые в пределе могут быть сведены к фрагментам формализованного доказательства. Другими словами, из большого набора различных действий по трансформации репрезентаций в воображении различного рода то-

² Такой подход, по мнению С. Де Тоффоли и В. Жардино, согласуется с «философией математической практики» [18].

пологических объектов выбирается такой набор трансформаций, который гарантированно позволяет получать корректные заключения. Этот набор допустимых трансформаций определяется сообществом, закрепляется в процессе коммуникации и обучения и может быть обозначен как «разрешенные операции».

Рассматривая в качестве примера доказательство теоремы Александера³, С. Де Тоффоли и В. Жардино обосновывают вывод, что «суть доказательства состоит в определении правильных трансформаций, позволяющих нам найти ось, вокруг которой узел вращается только в одном направлении... лишь с помощью визуализации нам известно, что эта трансформация дает нам изотопический узел, а нашей интуиции остается доказать, что эта трансформация всегда возможна и что это не бесконечный процесс» [12, р. 44]. Несмотря на принципиальную возможность формализации такого доказательства, «перевод» (если так можно выразиться) его в формализованную форму потребует существенного изменения его структуры. Таким образом, у этого набора «разрешенных операций», т.е. у способности манипулятивного воображения, имеется важная эпистемическая роль, которая, безусловно, еще требует своего исследования.

III

Основные свойства традиционного доказательства (убедительность, обозримость и формализуемость) вполне могут быть подвергнуты сомнению. Так, С. Де Тоффоли предлагает другое понимание доказательства на основе следующих свойств: общеиспользуемости (shareability), перечислимости (transferability) и формализуемости [9]. Здесь под общеиспользуемостью доказательства подразумевается возможность его понимания сообществом, состоящим из соответствующим образом обученных индивидов. При этом вовсе не обязательно, чтобы какой-то отдельный индивид был способен понять все доказательство целиком, от начала и до конца, достаточно того, чтобы несколько индивидов поняли отдельные части доказательства, которые бы суммарно могли «составить» все доказательство целиком. Аналогично и в случае с перечислимостью, которая является обобщением обозримости. Перечислимость дока-

³ Всякий узел или зацепление могут быть представлены как замкнутая коса. Кстати, выражение «разрешенные операции» принадлежит как раз Дж. Александру. [4].

зательства предполагает, что все шаги доказательства можно перечислить за конечный (возможно, очень большой) промежуток времени. Необходимое для перечисления всех шагов доказательства время может превосходить продолжительность жизни любого отдельно взятого математика-эксперта, однако данное требование предполагает, что если бы какой-то математик-эксперт мог работать соответствующее количество времени и был бы способен запомнить все перечисленные шаги доказательства, то он (в случае если в доказательстве нет ошибки) имел бы *априорное*⁴ обоснование правильности этого доказательства. Естественно, формализуемость предполагает, что имеется некоторый принимаемый релевантными агентами набор аксиом и правил вывода, используя которые можно вывести соответствующую теорему. Другими словами, теорема может быть представлена как нечто обусловленное аксиомами и правилами вывода в контексте определенного исследовательского сообщества.

Такое предлагаемое С. Де Тоффоли понимание доказательства оказывается контекстно зависимым. Требуется, чтобы имелось сообщество соответствующим образом обученных математиков-экспертов, которые могли бы (возможно, коллективно и по частям) проверить некоторое данное доказательство на выводимость из некоторого данного набора аксиом и правил вывода. В силу того, что доказательство представляет собой форму обоснования и зависит от контекста, оно более не может считаться эталоном или идеальной формой обоснования в их традиционном понимании [1]. У математика-эксперта имеется обоснование в пользу его убежденности в некотором математическом результате тогда и только тогда, когда имеется доказательство. С учетом свойств доказательства, предложенных С. Де Тоффоли, нужно уточнить, что имеющееся доказательство может быть разделено на фрагменты, которые могут быть независимо проверены экспертами-математиками, имеющими соответствующие компетенции.

Близкую позицию занимают Б. Леве и Т. Мюллер, определяя понятие математического знания с учетом контекстной зависимости следующим образом: S знает, что p , тогда и только тогда, когда имеющиеся у S в данный момент математические навыки достаточны для создания формы доказательства или обоснования для P , ко-

⁴ О разных степенях априорности см. [6, р. 2].

торые требуются актуальным контекстом [17, р. 106]. Значит, для отдельно взятого доказательства необходимо задать соответствующие эпистемические стандарты, а формализация доказательства не является необходимой и даже желательной во всякой ситуации математической коммуникации. Важен нюанс, что далеко не всякое обоснованное убеждение может считаться знанием. И при создании доказательства, и при его проверке возможны огрехи. Известно⁵, например, что доказательство основной теоремы алгебры, данное К. Гауссом в докторской диссертации, содержало незначительные ошибки. И если позиция Б. Лева и Т. Мюллера является инфаллибилистской, то позиция С. Де Тоффоли вполне согласуется с фаллибилизмом, что является ее безусловным преимуществом.

В истории математики можно обнаружить достаточное количество результатов, которые в какой-то момент времени были приняты математическим сообществом, несмотря на то что в их доказательствах содержались пробелы и/или ошибки. Например, С. Де Тоффоли [9, р. 835] приводит краткое изложение истории основной теоремы алгебры из работы Б. Файна и Г. Розенбергена: первое опубликованное доказательство дано Ж.Л. Д'Аламбером в 1746 г., первое *принятое широким сообществом* математиков доказательство дано К. Гауссом в 1797 г. и опубликовано в 1799 г. (оно было принято сообществом, хотя с современной точки зрения содержало пробелы и ошибки), затем К. Гаусс опубликовал еще два доказательства в 1816 г., а финальное доказательство, представлявшее собой вариант его изначального доказательства 1797 г., было им опубликовано только в 1849 г.⁶ Здесь важен именно момент принятия сообществом математиков результата, для которого, строго говоря, доказательства ни в традиционном смысле (как убедитель-

⁵ Кроме того, примечательно письмо К. Я. Якоби, адресованное Ф. фон Гумбольдту: «Только Дирихле (ни я, ни Коши, ни Гаусс) знает, что такое совершенно строгое доказательство, но мы узнаем это только от него. Когда Гаусс говорит, что он что-то доказал, я думаю, что это весьма правдоподобно; когда Коши говорит это, то это пятьдесят на пятьдесят; когда Дирихле говорит это, то это неоспоримо; я предпочитаю не погружаться в такие деликатные вопросы» (цит. по: [7].)

⁶ Однако следует заметить, что это изложение является, пожалуй, чрезмерно кратким и не содержит указаний на использование этого результата в качестве гипотезы начиная с работ П. Рота, А. Жирара, т.е. с самого начала XVII в., а также на попытки Л. Эйлера (1749 г.), Ж. Лагранжа (1772 ш.), П. Лапласа (1795 г.) и др. доказать эту теорему и на заполнение «топологического» пробела в изначальном доказательстве К. Гаусса только в 1920 г. в работе А.М. Островского.

ной, обозримой и формализованной конструкции), ни в смысле С. Де Тоффоли (как общеиспользуемой, перечислимой и формализуемой конструкции) не было на протяжении почти 50 лет.

Можно привести и несколько других примеров. Изначальное доказательство одного из ключевых утверждений трехмерной топологии - леммы Дена [9, р. 837] было опубликовано в 1910 г., но в 1929 г. было обнаружено, что оно содержит значительный пробел и, опять же, не может считаться доказательством в строгом смысле этого термина. Полное доказательство было опубликовано только в 1957 г. Другой пример представляет собой историю, случившуюся с Б. Дэйвисом⁷, когда на его лекции один студент выразил сомнение в обращении к обобщенному варианту теоремы Мерсера при изложении доказательства для некоторого другого результата. Оказалось, что доказательство для обобщенного варианта теоремы Мерсера вообще не опубликовано, но все специалисты принимали этот результат, так как для них (в отличие от тех, кто недостаточно погружился в соответствующую тему) было очевидно, *как* оно может быть построено.

Обращая внимание на такие обстоятельства и особенности отношения к доказательствам в действительной математической практике, С. Де Тоффоли предлагает использовать понятие «будто-доказательство» (simil-proof). Будто-доказательства могут содержать ошибки, и поэтому не все они являются доказательствами в строгом смысле, но и не все строгие доказательства являются будто-доказательствами, так как для будто-доказательства важно его принятие сообществом математиков-специалистов, а некоторые полные и корректные доказательства вполне могут оказаться необозримыми для конечных когнитивных агентов. Таким образом, будто-доказательство определяется С. Де Тоффоли как такое «общеиспользуемое [рассуждение], которое принимается в качестве доказательства некоторыми агентами, признавшими все части рассуждения корректными на основе проверки» [9, р. 835]. При этом ключевую роль играет обращение к стандартам принятия результатов некоторым данным сообществом математиков. Соответственно, мы снова приходим к позиции строгости как локальной общезначимости.

⁷ См.: [8, р. 1353]. Также см.: [2, с. 7].

IV

Следует оговориться, что изложенная эпистемология математики (а точнее, математической практики) не обязательно предполагает какую-то конкретную онтологию, в частности позицию, согласно которой математические объекты конструируются в противоположность их обнаружению. Другими словами, понимание строгости математического доказательства как локальной общезначимости и указание на социальный характер доказательств не предполагают принятия позиции антиреализма в отношении математических объектов. Такая эпистемология делает математику более похожей на естественные науки в духе фаллибилистской философии математики И. Лакатоса [16; 19], позволяет более четко различать математическое обоснование и математическую истину, чем это возможно при стандартной инфаллибилистской точке зрения, и подчеркивает роль сообщества в закреплении математических результатов, но не предписывает принятие какой-то определенной онтологии.

Обратимся теперь к вопросам о том, каковы отношения между формализованным доказательством и доказательством неформальным, и о том приводит ли изложенная выше точка зрения к позиции релятивизма⁸ относительно строгости математического доказательства и норм математического исследования. Очевидно, существования формализованного доказательства достаточно для того, чтобы математический результат был принят сообществом, так как формализованное доказательство мыслится как своего рода эталон. Однако в обычной практике математические доказательства далеко не всегда даются в формализованном виде, неформальные доказательства содержат пробелы и (по меньшей мере, в отдельных областях математики) существенно полагаются на интуицию в описанном выше виде. Такая интуиция может быть, например, пространственной и вполне поддаваться визуализации в виде образов, схем и их трансформаций. Как бы то ни было, подобные неформальные доказательства (или даже будто-доказательства) принимаются участниками сообщества с соответствующими компетенциями. Предполага-

⁸ Например, о релятивизме в этом случае заявляет О. Тэттон-Браун, рассматривая конкретно доказательство теоремы Александра [20]. Его статья была опубликована в виде online first в декабре 2019 г. Ответ на замечания О. Тэттона-Брауна и пояснения относительно реконструкции доказательства теоремы Александра см. в статье :С. Де Тоффоли [10]. Эта статья опубликована в сентябре 2020 г.

ется, что обращение к интуиции в неформальном доказательстве подчиняется описанным выше принципам и представляет собой «разрешенные операции», закрепленные в процессе обучения и коммуникации, а при необходимости такое неформальное доказательство может быть представлено в формализованном виде. Понятие строгости как локальной общезначимости позволяет объяснить эту возможность формализации, так как локально общезначимыми называются (будто-)доказательства, соответствующие актуальным практикам построения доказательств в отдельно взятой области математики. Поскольку локально общезначимые (будто-)доказательства в случае их корректности «переводимы» в чисто формализованные доказательства, постольку выделение локальной общезначимости и контекстной зависимости доказательств не предполагает принятия релятивизма.

Представляется, что понятие локальной общезначимости является хорошим эвристическим приемом для объяснения математической практики и для разработки философии математики, отражающей реальное положение дел в математической науке. Однако вопрос об объяснении механизмов «перевода» неформальных доказательств, опирающихся на разного рода интуиции, в формализованные конструкции остается открытым.

Литература

1. Гуцин И.А. Контекстная зависимость математических предложений и выбор между семантиками // Философия науки. 2022. № 4 (95). С. 161–168.
2. Ламберов Л.Д. Практика компьютерных доказательств и человеческое понимание: эпистемологическая проблематика // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2021. № 1. С. 5–19.
3. Целищев В.В., Хлебалин А.В. Концептуальная и формальная строгость математического доказательства // Философия науки. 2022. № 1 (92). С. 64–70.
4. Alexander J.W. A lemma on systems of knotted curves // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1923. Vol. 9, No. 3. P. 93–95.
5. Bassler O.B. The surveyability of mathematical proof: A historical perspective // Synthese. 2006. Vol. 148, No. 1. P. 99–133.
6. Boghossian P., Peacocke C. Introduction // New Essays on the A Priori / Ed. by P. Boghossian, C. Peacocke. – Oxford: Clarendon Press, 2000. P. 1–10.
7. Burgess J., De Toffoli S. What is Mathematical Rigor? // APhEx: Portale Italiano Di Philosophia Analytica. 2022. URL: http://www.aphex.it/public/file/Content20220509_BurgessandDeToffoliOpenProblemsMathematicalRigor,final.pdf (дата обращения).
8. Davies B. Whither mathematics? // Notices of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 52, No. 11. P. 1350–1356.

9. *De Toffoli S.* Groundwork for a fallibilist account of mathematics // *Philosophical Quarterly*. 2021. Vol. 71, No. 4. P. 823–844.
10. *De Toffoli S.* Reconciling rigor and intuition // *Erkenntnis*. 2021. Vol. 86. P. 1783–1802.
11. *De Toffoli S., Giardino V.* An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology // *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics* / Ed. by G. Lolli, M. Panza, G. Venturi. Cham: Springer, 2015. P. 315–336.
12. *De Toffoli S., Giardino V.* Envisioning transformations — The practice of topology // *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014* / Ed. by B. Larvor. Cham: Birkhäuser, 2016. P. 25–50.
13. *Dettefsen M.* Proof: its nature and significance // *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* / Ed. by B. Gold, R.A. Simons. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2009. P. 3–32.
14. *Fine B., Rosenberger G.* The Fundamental Theorem of Algebra. N.Y.: Springer, 2012. 210 p.
15. *Hilbert D.* Mathematical Problems // *Bulletin of American Mathematical Society*. 1902. No. 8. P. 437–479.
16. *Lakatos I.* Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery / Ed. by J. Worrall, E. Zahar. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 196 p.
17. *Löwe B., Müller T.* Mathematical knowledge is context dependent // *Grazer Philosophische Studien*. 2008. Vol. 76. P. 91–107.
18. *Mancosu K.* The Euclidean diagram // *The Philosophy of Mathematical Practice* / Ed. by K. Mancosu. Oxford: Oxford University Press, 2008. P. 80–133.
19. *New Directions in the Philosophy of Mathematics* / Ed. by T. Tymoczko. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998. 456 p.
20. *Tatton-Brown O.* Rigour and intuition // *Erkenntnis*. 2021. Vol. 86. P. 1757–1781.
21. *Tymoczko T.* The four-color problem and its philosophical significance // *Journal of Philosophy*. 1979. Vol. 76, No. 2. P. 57–83.

References

1. *Gushchin, I.A.* (2022). Kontekstnaya zavisimost matematicheskikh predlozheniy i vybor mezhdru semantikami [Context dependence of mathematical sentences and the choice between semantics]. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 4 (95), 161–168.
2. *Lamberov, L.D.* (2021). Praktika kompyuternykh dokazatelstv i chelovecheskoe ponimanie: epistemologicheskaya problematika [Computer proof practice and human understanding: epistemological issues]. *Vestnik Permskogo universiteta. Filosofiya. Psikhologiya. Sotsiologiya* [Perm University Herald. Philosophy. Psychology, Sociology], 1, 5–19.
3. *Tselishchev, V.V. & A.V. Khlebalin.* (2022). Kontseptualnaya i formalnaya strogot matematicheskogo dokazatelstva [Conceptual and formal rigor of mathematical proof]. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 1 (92), 64–70.
4. *Alexander, J.W.* (1923). A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 9, No. 3, 93–95.
5. *Bassler, O.B.* (2006). The surveyability of mathematical proof: A historical perspective. *Synthese*, Vol. 148, No. 1, 99–133.

6. *Boghossian, P. & C. Peacocke.* (2000). Introduction. In: Boghossian, P. & C. Peacocke (Eds.). *New Essays on the A Priori*. Oxford, Clarendon Press, 1–10.
7. *Burgess, J., & S. De Toffoli.* (2022). What is Mathematical Rigor? *APhEx: Portale Italiano Di Philosophia Analytica*. Available at: http://www.aphex.it/public/file/Content20220509_BurgessandDeToffoliOpenProblemsMathematicalRigor,final.pdf
8. *Davies, B.* (2005). Whither mathematics? *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 52, No. 11, 1350–1356.
9. *De Toffoli, S.* (2021). Groundwork for a fallibilist account of mathematics. *Philosophical Quarterly*, Vol. 71, No. 4, 823–844.
10. *De Toffoli, S.* (2021). Reconciling rigor and intuition. *Erkenntnis*, 86, 1783–1802.
11. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2015). An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology. In: Lolli, G., M. Panza & G. Venturi (Eds.). *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*. Cham, Springer, 315–336.
12. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2016). Envisioning transformations – The practice of topology. In: Larvor, B. (Ed.). *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014 (Trends in the History of Science)*. Cham, Birkhäuser, 25–50.
13. *Detlefsen, M.* (2009). Proof: its nature and significance. In: Gold, B. & R.A. Simons (Eds.). *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Washington, DC, The Mathematical Association of America, 3–32.
14. *Fine, B. & G. Rosenberger.* (2012). *The Fundamental Theorem of Algebra*. New York, Springer, 210.
15. *Hilbert, D.* (1902). Mathematical problems. *Bulletin of American Mathematical Society*, 8, 437–479.
16. *Lakatos, I.* (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Ed. by J. Worrall & E. Zahar. Cambridge, Cambridge University Press, 196.
17. *Löwe, B. & T. Müller.* (2008). Mathematical Knowledge is Context Dependent. *Grazer Philosophische Studien*, 76, 91–107.
18. *Mancosu, K.* (2008). The Euclidean diagram. In: Mancosu, K. (Ed.). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford, Oxford University Press, 80–133.
19. *Tymoczko, T.* (Ed.). (1998). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 456.
20. *Tatton-Brown, O.* (2021). Rigour and intuition. *Erkenntnis*, 86, 1757–1781.
21. *Tymoczko, T.* (1979). The four-color problem and its philosophical significance. *Journal of Philosophy*, Vol. 76, No. 2, 57–83.

Информация об авторе

Ламберов Лев Дмитриевич – Уральский федеральный университет (620002, Екатеринбург, просп. Мира, 19).
lev.lamberov@urfu.ru

Information about the author

Lamberov, Lev Dmitrievich – Ural Federal University (19, Mira av., Yekaterinburg, 620002, Russia).
lev.lamberov@urfu.ru

Дата поступления 15.03.2023