

**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ РАСТУЩЕГО
С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО
ИЗОЛИРОВАННОГО РАЗРЕЗА,
НАГРУЖАЕМОГО ИЗНУТРИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ**

Е. Н. Шер

(Новосибирск)

В работе [1] исследовано напряженное состояние развивающегося с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации идеальной теории упругости. При этом рассмотрены случаи общего автомодельного нагружения и неавтомодельного при сосредоточенном нагружении силами, приложенными в середине разреза к его берегам и произвольно зависящими от времени.

В данной работе аналогичное исследование проводится в рамках идеальной теории упругости для случая плоской деформации, при этом использовались результаты и идеи, опубликованные в работах [2, 3].

Пусть в ненагруженной упругой плоскости xy в начальный момент времени $t = 0$ начинает развиваться вдоль оси x из начала координат с постоянной скоростью v разрез, нагружаемый силами, распределенными по его берегам. Требуется определить возникающее в плоскости напряженное состояние и, в частности, значение коэффициента интенсивности поля напряжений вблизи кончиков разреза. Упругие смещения, как известно [4], удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(0.1) \quad w_i = u_i + v_i, \quad \Delta u_i = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \Delta v_i = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y},$$

где $u_i(x, y, t)$, $v_i(x, y, t)$ — потенциальные и соленоидальные компоненты вектора смещения $w_i(x, y, t)$; a , b — скорости продольных и поперечных волн упругой плоскости.

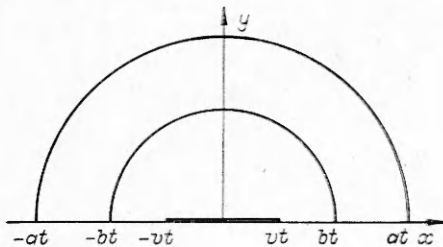
Компоненты тензора напряжений выражаются через смещения формулами

$$(0.2) \quad \sigma_{xx} = \mu \left[\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right],$$

$$\sigma_{yy} = \mu \left[\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right], \quad \sigma_{xy} = \mu \left[\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right].$$

Рассмотрим область верхней полуплоскости $y > 0$, ограниченную дугой продольной волны, излученной в начальный момент времени (фиг. 1). В этой области ищется решение системы (0.1), удовлетворяющее следующим граничным условиям. На берегу разреза при $|x| < vt$ задана внешняя нагрузка: $\sigma_{yy} = -\sigma_y(x, t)$, $\sigma_{xy} = 0$. Вид функции $\sigma_y(x, t)$ будет уточнен в дальнейшем.

На участках оси x от кончиков разреза до продольной волны $vt < |x| < at$, $y = 0$ требуется выполнение условий $w_2 = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, вытекающих из предполагаемой симметрии задачи относительно оси $y = 0$. Начальные условия задачи нулевые. Ищется решение, имеющее корневые особенности



Ф и г. 1

для напряжений в кончиках разреза, вблизи которых вдоль оси x компонента тензора напряжений σ_{yy} имеет вид

$$(0.3) \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) \Big|_{x \rightarrow vt} \approx \frac{2\pi N(t)}{\sqrt{2\pi(x-vt)}},$$

где $N(t)$ — искомый коэффициент интенсивности напряжения.

1. Автомодельное нагружение. Рассмотрим случай нагружения, при котором внешняя нагрузка имеет вид

$$(1.1) \quad \sigma_y = \frac{Q t^{l-1}}{a t_0^{l-1}} \sigma\left(\frac{x}{at}\right),$$

где Q/at_0 , t_0 — константы размерности давления и времени; l — целое неотрицательное число. В этом случае функции

$$U_i = \partial^l u_i / \partial t^l, \quad V_i = \partial^l v_i / \partial t^l$$

являются однородными нулевого порядка относительно переменных x , y , t . При этом U_i удовлетворяют волновому уравнению для продольных волн, V_i — для поперечных. Согласно [4], они могут быть представлены как вещественные части аналитических функций на комплексных плоскостях z_1 и z_2 :

$$U_i(x/at, y/at) = \operatorname{Re} U_i^l(z_1), \quad V_i(x/at, y/at) = \operatorname{Re} V_i^l(z_2),$$

где z_1 и z_2 связаны с переменными x , y , t соотношениями

$$(1.2) \quad \delta_1 \equiv t - z_1 x - y \sqrt{a^{-2} - z_1^2} = 0, \quad \delta_2 \equiv t - z_2 x - y \sqrt{b^{-2} - z_2^2} = 0.$$

В частности, при $y = 0$ $z_1 = z_2 = t/x$. Ветви радикалов в плоскостях с разрезами, соединяющими $(a^{-1}, -a^{-1})$, $(b^{-1}, -b^{-1})$ выбраны так, что при $z \rightarrow \infty$ они стремятся к $i \sqrt{z_{1,2}}$.

Введем аналитическую функцию $W(z)$, связанную с искомыми следующим образом:

$$W(z) = U_2^l(z) + V_2^l(z).$$

Последним двум соотношениям системы (0.1) и условию $\sigma_{xy} = 0$ при $y = 0$ можно удовлетворить, если принять [3]

$$(1.3) \quad (U_1^l)'_z = \frac{b^{-2} - 2z^2}{b^{-2} \sqrt{a^{-2} - z^2}} W'_z, \quad (U_2^l)'_z = -\frac{2z \sqrt{b^{-2} - z^2}}{b^{-2}} W'_z,$$

$$(V_1^l)'_z = \frac{b^{-2} - 2z^2}{b^{-2}} W'_z, \quad (V_2^l)'_z = \frac{2z^2}{b^{-2}} W'_z.$$

При этом на оси $y = 0$ (0.2)

$$(1.4) \quad \frac{\partial^l \sigma_{yy}}{\partial t^l} = \frac{\mu}{t} \operatorname{Re} \left[-\frac{S(z) z W'_z}{b^{-2} \sqrt{a^{-2} - z^2}} \right],$$

$$S(z) = (b^{-2} - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{a^{-2} - z^2} \sqrt{b^{-2} - z^2}.$$

Поставим в плоскости z граничную задачу для функции W'_z . На берегах разреза при $|x| < vt$, $y = 0$, что соответствует, согласно (1.2), в плоскости z интервалу $|\operatorname{Re} z| > v^{-1}$, $\operatorname{Im} z = 0$, задано напряжение σ_y . Используя (1.4), получаем, что на этом интервале оси $\operatorname{Im} z = 0$ должно выполняться условие

$$(1.5) \quad \operatorname{Im} W'_z = \frac{t b^{-2} \sqrt{z^2 - a^{-2}}}{\mu z S(z)} \frac{\partial^l \sigma_y}{\partial t^l}.$$

При $b^{-1} < |\operatorname{Re} z| < v^{-1}$, $\operatorname{Im} z = 0$, что соответствует в физической плоскости xu участкам от кончиков разреза до поперечной волны, имеем $w_2(x, 0, t) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Re} W(z) = 0$. Отсюда $\operatorname{Re} W'_z = 0$. Из условия равенства нулю вертикальных смещений на оси $y = 0$ в продольной вол-

не при $bt < |x| < at$ и вытекающих из нулевых начальных условий равенств

$$\operatorname{Re} U_i^l(z) = 0 \text{ при } |\operatorname{Re} z| < a^{-1}, \operatorname{Im} z = 0,$$

$$\operatorname{Re} V_i^l(z) = 0 \text{ при } |\operatorname{Re} z| < b^{-1}, \operatorname{Im} z = 0$$

следует, что при $|\operatorname{Re} z| < b^{-1}, \operatorname{Im} z = 0$ также выполняется условие $\operatorname{Re} W_z' = 0$.

Таким образом, в нижней полуплоскости z имеем смешанную задачу Келдыша — Седова для функции W_z' . Решение ее будем искать в верхней полуплоскости плоскости $z_3 = 1/az$.

Из требования (0.3) о поведении напряжений в кончиках разрезов следует, что при $z_3 = \pm v/a, z = \pm v^{-1} W_z' \sim (z_3 - v^2/a^2)^{-(l+1/2)}$. Как и в [1], в точках пересечений осей x, y физической плоскости с продольной и поперечной волной, а также в начале координат должно выполняться условие регулярности функции $W(z)$

$$W \sim a_0 + a_1(z_3 \pm b/a) + \dots, \quad W_z' \sim a_1 \text{ при } z_3 \rightarrow \pm b/a,$$

$$W \sim a_0 + a_1(z_3 \pm 1) + \dots, \quad W_z' \sim a_1 \text{ при } z_3 \rightarrow \pm 1,$$

$$W \sim i(a_1 z + a_3 z^3 + \dots), \quad W_z' \sim ia_1 \text{ при } z_3 \rightarrow \pm \infty,$$

$$W \sim a_0 + a_{-2}/z^2 + \dots, \quad W_z' \sim z_3^2 \text{ при } z_3 \rightarrow 0.$$

Последние два условия учитывают предполагаемую в дальнейшем симметрию задачи относительно оси $x = 0$ в физической плоскости.

Функция W_z' , обладающая этими свойствами и удовлетворяющая граничным условиям на оси $\operatorname{Im} z_3 = 0$, имеет вид

$$(1.6) \quad W_z' = \frac{z_3^2}{(z_3^2 - v^2/a^2)^{l+1/2}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-v/a}^{v/a} \frac{(s^2 - v^2/a^2)^{l+1/2} \operatorname{Im} W_z' ds}{s^2 (s - z_3)} + iz_3 \sum_{i=0}^{l-1} A_i z_3^{2i} \right],$$

$\operatorname{Im} W_z'$ здесь определено в (1.5). Полученное решение содержит l констант A_i , значения которых можно получить, например, из системы уравнений

$$(1.7) \quad \frac{\partial^r \sigma_{yy}}{\partial t^r} (vt - 0, 0, t) = - \frac{\partial^r \sigma_y}{\partial t^r} (vt, 0, t), \quad r = 0, \dots, l-1.$$

Здесь σ_{yy} должно быть выражено через решение (1.6) с помощью (1.4), σ_y задано в (1.3).

В дальнейшем рассмотрим подробнее частный случай нагрузки (1.3) — случай сосредоточенного в начале координат нагружения

$$(1.8) \quad \sigma_y = Qt^l \delta_1(x)/t_0^l,$$

где Q, t_0 — константы размерности силы на единицу длины и времени. В этом случае

$$\frac{\partial^l \sigma_y}{\partial t^l} = \frac{Q! \delta_1(x_3)}{t_0^l at} = \frac{f(x_3)}{at},$$

где $x_3 = x/at$. Из (1.5) получаем

$$\operatorname{Im} W_z' = \frac{x_3^4 a^3 \sqrt{1 - x_3^2} f(x_3)}{\mu b^2 D(x_3)},$$

$$D(x_3) = a^4 x_3^4 S(1/ax_3) = [2 - (a/b)^2 x_3^2]^2 - 4 \sqrt{1 - x_3^2} \sqrt{1 - (a/b)^2 x_3^2}.$$

Подставляя полученное выражение для $\text{Im } W'_z$ в (1.6), получаем

$$(1.9) \quad W'_z = \frac{iCz^{2l}}{(v^{-2} - z^2)^{l+1/2}} \left[1 + \frac{1}{z^2} \sum_{i=0}^{l-1} A_i z^{-2i} \right], \quad C = \frac{(-1)^l a^{2l} Q}{2\pi \mu b^2 t_0^l (1 - a^2/b^2)}.$$

Интегрируя (1.4) по t , получаем при $y = 0$

$$(1.10) \quad \frac{\partial^r \sigma_{yy}}{\partial t^r} = \mu \frac{z^{l-1-r}}{(l-1-r)!} \text{Re} \int_{a^{-1}}^z (z-s)^{l-1-r} f_1(s) ds, \quad r = 0, \dots, l-1,$$

$$f_1(s) = - \frac{S(s) W'_z}{b^{-2} \sqrt{a^{-2} - s^2}}.$$

Подставляя эти выражения с учетом (1.8), (1.9) в (1.7), получаем для определения констант A_i (1.9) систему

$$\text{Re} \int_{a^{-1}}^{v^{-1+0}} (v^{-1} - s)^{l-1-r} f_2(s) ds = 0, \quad r = 0, \dots, l-1,$$

$$f_2(s) = - \frac{s^{2l-1} C S(s)}{(v^{-2} - s^2)^{l+1/2} b^{-2} \sqrt{s^2 - a^{-2}}} \left(1 + \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^{l-1} A_i s^{-2i} \right).$$

После тождественных преобразований эта система приводится к следующей:

$$(1.11) \quad \sum_{i=0}^{l-1} \bar{A}_i B_{ji} + B_{jl} = 0, \quad j = 0, \dots, l-1,$$

$$B_{ji} = \text{Re} \int_1^{\bar{v}^{-1+0}} \frac{z^{3l-2i-j-3} \bar{S}(z) dz}{\sqrt{z^2-1} (v^{-2} - z^2)^{l+1/2}}, \quad B_{jl} = B_{ji}|_{i=-1},$$

$$\bar{S}(z) = (a^2/b^2 - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{1 - z^2} \sqrt{a^2/b^2 - z^2}.$$

Здесь введены обозначения: $\bar{v} = v/a$, $\bar{A}_i = A_i a^{2(i+1)}$. Путь интегрирования при числовых расчетах в интегралах (1.11) был выбран с обходом точки \bar{v}^{-1} по дуге круга с центром в этой точке.

Выражение для коэффициента интенсивности напряжений (0.3) можно найти, используя (1.9), из (1.10) при $r = l - 1$.

При этом получается

$$(1.12) \quad N(t) = N^0(t) R(\bar{v}, l), \quad N^0(t) = \frac{2\pi Q t^l}{t_0^l \sqrt{\pi v t}},$$

$$R(\bar{v}, l) = \frac{(-1)^l v^2 l \Sigma \bar{S}(\bar{v}^{-1}) \left(1 + \bar{v}^2 \sum_{i=0}^{l-1} \bar{A}_i \bar{v}^{2i} \right)}{2^l (1 - a^2/b^2) \sqrt{1 - \bar{v}^2}},$$

$$\Sigma = 1 - C_1^{l-1}/3 + C_2^{l-1}/5 - \dots (-1)^{l-1}/(2l-1), \quad C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Величина $N^0(t)$ равна значению коэффициента интенсивности напряжений, возникающей в статической задаче о нагружении неподвижного разреза длины $2vt$ нагрузкой $\sigma_y = Q(t/t_0)^l \delta_1(x)$. Для нахождения $R(\bar{v}, l)$ в (1.12)

Таблица 1

v/b	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,9923644	0,9691741	0,9295275	0,8717291	0,7929041	0,6881701	0,5486786	0,3560028
1	0,9396547	0,8100651	0,6491022	0,4801165	0,3190632	0,177724237	0,06631309	-0,0003102074
2	0,8686700	0,6399174	0,4172112	0,2374483	0,1097657	0,031654	-0,004597291	-0,01011845
3	0,7898806	0,4900660	0,2574812	0,10993404	0,03090074	-0,001638966	-0,00783898	-0,00385634
4	0,709747	0,3683777	0,1544932	0,0468369	0,00406344	-0,00612688	-0,0044095	-0,001393177
5	0,6321809	0,273437	0,0900969	0,0169753	-0,0035219	-0,00473747	-0,00214678	-0,000565843
6	0,559399	0,200957	0,0506253	0,0036505	-0,0045798	-0,00295714	-0,0010408	-0,000258584
7	0,492500	0,146337	0,026877	-0,0017094	-0,00379115	-0,00173	-0,00052476	-0,00012716
8	0,43192	0,10554	0,0129035	-0,003398	-0,0027368	-0,00099965	-0,0002769	-0,00006475
9	0,3775	0,0752	0,004922	-0,003514	-0,001868	-0,00058193	-0,000151	-0,00003395

Т а б л и ц а 2

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v^*/b	0,8	0,69	0,59	0,54	0,48	0,44	0,39	0,38	0,36

применялась следующая процедура. Для выбранных значений \bar{v} и l считывались коэффициенты матрицы системы (1.11). Решение ее определяло константы A_i и значение $R(\bar{v}, l)$.

Таким образом, были найдены значения $R(\bar{v}, l)$ для $l = 0, \dots, 9$, $v/b = 0,1; 0,2, \dots, 0,8$ при $b/a = 0,6$. Эти значения приведены в табл. 1.

Для $l = 0$ функция $R(\bar{v}, 0)$ вычислялась по формуле [3]

$$(1.13) \quad R(\bar{v}, 0) = \frac{\bar{v}^2 \bar{S}(\bar{v}^{-1})}{2\sqrt{1-\bar{v}^2} [1-(a/b)^2]},$$

которая получается также из общего решения (1.9), если принять в нем $l = 0, A_i = 0$.

В случае $l = 1$ для нахождения одной неизвестной константы имеется одно линейное уравнение, коэффициенты которого можно найти аналитически через эллиптические интегралы

$$(1.14) \quad R(\bar{v}, 1) = \frac{\bar{v}^4 I_1 \bar{S}(\bar{v}^{-1})}{2I_2 [1-(a/b)^2] \sqrt{1-\bar{v}^2}},$$

$$I_1 = \operatorname{Re} \int_1^{\bar{v}^{-1}} \frac{\bar{S}(z) dz}{\sqrt{z^2-1} \sqrt{\bar{v}^{-2}-z^2}} = \frac{\bar{v}^{-3}}{3} [4(2\bar{v}^2 - 3m^2 + 2) E(q) + (3m^4 - 4\bar{v}^2) F(q) + 4(m^2 - 2) E(q') + m^2 F(q')],$$

$$I_2 = \operatorname{Re} \int_1^{\bar{v}^{-1}+0} \frac{\bar{S}(z) dz}{\sqrt{z^2-1} (\bar{v}^{-2}-z^2)^{3/2}} = \frac{\bar{v}^{-1}}{1-\bar{v}^2} \{ [m^4 + 4\bar{v}^2(1-m^2)] F(q) - [(2-m^2)^2 + 4(1-\bar{v}^2)] E(q) + 8(1-\bar{v}^2) E(q') - 4m^2(1-\bar{v}^2) F(q') \},$$

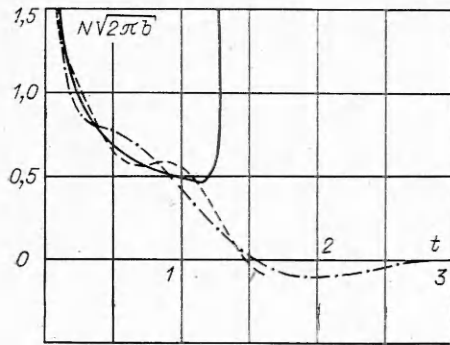
$$q = \sqrt{1-\bar{v}^2}, q' = \sqrt{1-m^2}, m = v/b,$$

$F(q), E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

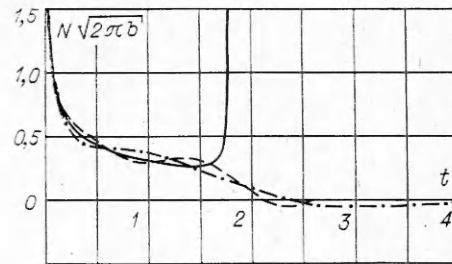
Результаты расчетов, проведенных по этой формуле, совпали с полученными по приведенной выше методике с требуемой точностью.

Интересной особенностью рассматриваемой задачи по сравнению с ее антиплоским вариантом является то, что для некоторого интервала скоростей распространения разреза, больших критической v^* , функция $R(\bar{v}, l)$ принимает отрицательное значение. Причем величина скорости v^* , при которой происходит переход функции $R(\bar{v}, l)$ в отрицательную область, с ростом l уменьшается. В табл. 2 приведено значение скорости v^*/b для $1 \leq l \leq 9, b/a = 0,6$.

2. Неавтомодельное сосредоточенное нагружение. Большой практический интерес представляет случай нагружения, при котором $\sigma_y = \sigma(t) \times \delta_1(x)$ при произвольной функции $\sigma(t)$. Приблизительно он может быть рас-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

смотрен [5] с помощью автомодельных решений п. 1, если функцию $\sigma(t)$ представим в виде отрезка ряда

$$(2.1) \quad \sigma(t) = \sum_{i=0}^r a_i t^i$$

в интервале $0 < t < T$.

В этом случае получаем для коэффициента интенсивности напряжений выражение

$$(2.2) \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi vt}} \sum_{i=0}^r a_i R(\bar{v}, i) t^i.$$

Коэффициенты a_i для $\sigma(t) \in L_2$ могут быть найдены, например, из представления $\sigma(t)$ в интервале $(0, T)$ в виде разложения по полиномам Лежандра.

Указанная процедура была проведена для двух законов изменения нагрузки

$$\sigma_1(t) = \delta_0(t) \delta_0(1-t), \quad 0 < t < T,$$

$$\sigma_2(t) = \delta_0(t) \delta_0(1-t) \sin \pi t, \quad 0 < t < T.$$

Здесь $\delta_0(t)$ — функция Хевисайда. Исследование влияния r на степень приближения ряда (2.1) к точному значению функции $\sigma(t)$ и на сходимость $N(t)$ по r (2.2) показали, что изменение r с 5 до 9 мало меняет значение $\sigma(t)$ и $N(t)$, начисленных по формулам (2.1), (2.2). Было также отмечено, что принятое многочленное представление хорошо приближает непрерывный закон, в то время как для разрывного в области скачка имеет значительные отклонения.

На фиг. 2, 3 представлены зависимости $N(t)$ для первого закона нагружения при $v/b = 0,2; 0,4$. Штриховые и штрихпунктирные линии на фиг. 2, 3 соответствуют значениям $T = 2,4$. Расчеты проводились при $r = 9$. Сплошные линии соответствуют зависимости $N(t)$, полученной для указанного случая из решения [2] задачи о напряженном состоянии плоскости с произвольно растущим изолированным разрезом, нагружаемым произвольно изменяющейся нагрузкой. Это решение содержит в общем случае в выражении для коэффициента интенсивности как минимум трехкратные интегралы, но в случае рассматриваемого закона $\sigma_y(x, t) =$

$= \delta_0(t) \delta_0(1 - t) \delta_1(x)$ это решение упрощается и может быть представлено в виде

$$(2.3) \quad N(t) = \begin{cases} N_0, & 0 < t < t_0 = (1 - v/a)^{-1}, \\ N_0 + mI_2, & t_0 < t < t_1 = (1 - v/b)^{-1}, \\ N_0 - m(I_0 - I_1), & t_1 < t < t_2 = (1 - v/c)^{-1}, \\ N_0 - mI_0, & t_2 < t < t_3 = t_1^2 (1 + v/a). \end{cases}$$

Здесь

$$(2.4) \quad N_0 = R(\bar{v}, 0)/\sqrt{\pi vt}, \quad I_0 = 1/\sqrt{vt}, \quad I_1 = \frac{G(-a/c) \sqrt{a/c - 1}}{\sqrt{v(t_2 - t)} \sqrt{a/v - a/c}},$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{vt}} \int_1^{a(t-1)/(vt)} \frac{\{G(-s)\} \sqrt{s-1} ds}{\sqrt{a(t-1)/(vt) - s} (a/c - s)},$$

$$m = \frac{\sqrt{2} (1 - v/c) G^{-1}(-a/v)}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - v/a}}, \quad G(-s) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - s} d\xi \right],$$

$$\varphi(\xi) = \arctg \frac{4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{a^2/b^2 - \xi^2}}{(2\xi^2 - a^2/b^2)^2},$$

$$\{G(-s)\} = \cos(\varphi(s)) \exp(\kappa(s)), \quad \kappa(s) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_1^{a/b} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - s},$$

c — скорость распространения волн Рэлея (при $b/a = 0,6$, $c/a = 0,5485$). Значения t_0, t_1, t_2 соответствуют моментам времени прихода в конец разреза сигналов продольной, поперечной, рэлеевской волн, излученных при $t = 1$ в центре разреза. Значение t_3 соответствует моменту времени прихода в один конец разреза сигнала продольной волны, излученной при $t = 1$ в центре разреза и отразившейся от другого его конца.

Введение t_3 означает, что решение (2.3) справедливо, когда нет влияния одного конца разреза на другой.

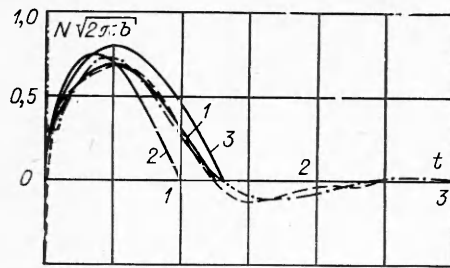
Сравнение кривых на фиг. 2, 3 показывает, что приближенное решение многокленного приближения (2.2) не воспроизводит поведение $N(t)$ в окрестности t_2 — времени прихода в кончик разреза рэлеевской волны, излученной в центре разреза в момент прекращения действия нагрузки ($t = 1$), в остальное же время качественно, а при $0 < t < t_1$ и количественно совпадает с точным.

На фиг. 4—6 представлены зависимости $N(t)$, найденные по (2.2) для закона $\sigma(t) = \delta_0(t) \delta_0(1 - t) \sin \pi t$, $0 < t < T$ при $r = 9$ и значениях $T = 1, 2, 4$ (кривая 1, штриховая и штрихпунктирные кривые соответственно) для $v/b = 0,2; 0,4; 0,6$.

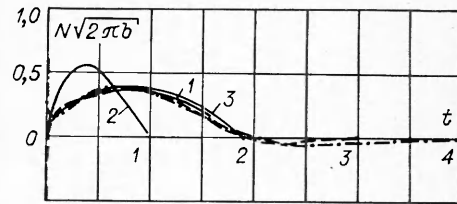
Для оценки $N(t)$ часто используются статическим приближением $N^0 = \sigma(t)/\sqrt{\pi vt}$, где $N^0(t)$ для момента времени t есть величина коэффициента интенсивности напряжений в статической задаче об изолированном разрезе длины $2vt$, нагруженном в центре силами величиной $\sigma(t)$.

Это приближение на фиг. 4—6 представлено кривыми 2. Видно, что уже при $v = 0,4$ и больше отличие динамического решения от статического приближения велико и особенно сильно отличается время положительной фазы функций $N(t)$ и $N^0(t)$.

В работе [1] было найдено для случая антиплоской деформации, что хорошим приближением динамической задачи для растущего изоли-



Фиг. 4

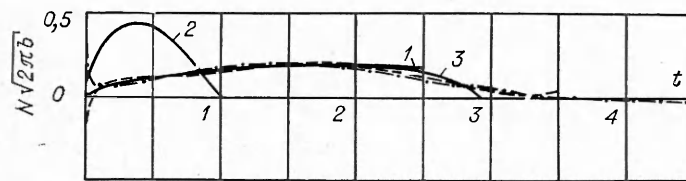


Фиг. 5

рованного разреза при больших значениях скорости его развития является решение задачи для полубесконечного разреза, который в начальный момент времени срагивается из начала координат и затем развивается с постоянной скоростью v .

Нагружение берегов разреза при этом производится сосредоточенными в начале координат силами, изменяющимися во времени по тому же закону $\sigma(t)$, что в задаче для изолированного разреза.

Применимость такого приближения, по-видимому, объясняется ослаблением с ростом v влияния, которое оказывает один конец трещины на другой.



Фиг. 6

Согласно [2], выражение коэффициента интенсивности задачи для растущего полубесконечного разреза, нагруженного указанным выше образом, может быть представлено в виде

$$(2.5) \quad N^1(t) = m(I_0 - I_1 - I_2)/\sqrt{l(t)}, \quad I_0 = \sigma[t - l(t)/b],$$

$$I_1 = G(-a/c)\sqrt{a/c - 1}\sqrt{(1/c - 1/b)l(t)} \int_0^{l(t)/a} \sigma'[t - l(t)/c - x(a/b - a/c)] \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{l(t)/a}}{\pi} \int_1^{a/b} \int_0^{l(t)/a} \sigma'[t - sl(t)/a - x(a/b - s)] \times \\ \times \frac{\{G(-s)\} \sqrt{s-1} \sqrt{a/b-s}}{\sqrt{x(a/c-s)}} dx ds,$$

где $l(t)$ — путь, пройденный кончиком разреза после начала движения. В случае равномерного развития разреза $l(t) = vt$. Остальные обозначения в (2.5) такие же, как и в (2.4).

Расчеты по формуле (2.5) для $\sigma(t) = \delta_0(t)\delta_0(1-t)\sin \pi t$ и $l(t) = vt$ представлены на фиг. 4–6 кривыми 3. Видно хорошее совпадение зависимостей $N(t)$ и $N^1(t)$ при $v \geq 0,4$.

Автор выражает благодарность Л. В. Кузиной за большое участие в расчетной части работы.

Поступила 25 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Шер Е. Н. Динамика растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации.— ПМТФ, 1977, № 4.
2. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
3. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
4. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний.— В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1957.
5. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для полуплоскости.— В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М., Наука, 1975.

УДК 539.31

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРТОТРОПИИ НА СПЕКТР В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК

В. М. Ермоленко

(Новосибирск)

Необходимость исследования распределения собственных частот колебаний тонких упругих оболочек выявилась после появления работы [1], где было обнаружено, что спектр в задачах колебаний имеет точки сгущения, существование которых обусловлено спецификой уравнений. В обзоре [2] изложено современное состояние теории распределения частот. Подобный подход применен к исследованию спектров колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек [3]. Полученный интеграл гиперэллиптического типа вычислялся на ЭВМ. В работе [4] исследован спектр колебаний пологих ортотропных оболочек произвольной кривизны, интеграл гиперэллиптического типа сводится к эллиптическому путем введения приближенного соотношения. В связи с механическими приложениями наибольший интерес представляют начальные точки и точки сгущения спектра, а также их взаимное расположение в зависимости от геометрии оболочки и свойств материала. Ниже рассматривается асимптотическая функция распределения, асимптотическая плотность собственных частот, точки сгущения спектра.

1. Уравнения свободных колебаний пологих ортотропных оболочек запишем в виде [5]

$$(1.1) \quad L_1(c_{jk})w + \Delta_k \psi = \rho h \Omega^2 w, \quad L_2(c_{jk})\psi - \Delta_k w = 0,$$

$$L_1(c_{jk}) = \frac{h^3}{12} \left[c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(c_{12} + 2c_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right],$$

$$L_2(c_{jk}) = \frac{1}{h(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \left[c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33}}{c_{33}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right],$$

$$\Delta_k = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где c_{jk} ($j, k = 1, 2$), c_{33} — упругие константы материала; R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки.

Асимптотическая формула для частот колебаний оболочки, прямоугольной в плане, имеет вид [6]

$$(1.2) \quad \Omega^2 R^4 \rho h^{-2} = c_{11} k_m^4 + 2(c_{12} + 2c_{33}) k_m^2 k_n^2 + c_{22} k_n^4 + \\ + \chi^4 (k_m + \chi k_n)^2 \left[c_{11} k_m^4 + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2 + 2c_{12}c_{33}}{c_{33}} k_m^2 k_n^2 + c_{22} k_n^4 \right],$$