УДК 532.516 + 517.958:532.5

ТРЕХМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УЗКОЙ ТРУБКЕ

А. Е. Медведев

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: medvedev@itam.nsc.ru

Получено приближенное решение задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости в узкой деформирующейся длинной трубке при малых числах Рейнольдса. Показано, что пульсации давления и деформация трубки связаны интегро-дифференциальным уравнением. Найденное решение обобщает решение Пуазейля в эллиптических трубках на случай достаточно произвольного малого деформирования по длине и углу трубки.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье — Стокса, аналитическое решение, течение Пуазейля.

Введение. В гемодинамике особый интерес представляет исследование течений в кровеносных сосудах с такими патологическими изменениями кровеносного русла, как аневризма (локальное вздутие сосуда) или стеноз (локальное сужение сосуда). Изучение данных процессов существенно затруднено вследствие их нестационарности, обусловленной пульсирующим движением крови. Осесимметричные аналитические решения [1–3] недостаточно точно описывают реальные процессы. Численное и экспериментальное моделирование [4] требует значительных затрат (течение трехмерное и нестационарное) и не всегда позволяет установить параметры, оказывающие влияние на рассматриваемый процесс. Возможно, ответы на некоторые вопросы, связанные с изучением особенностей течения крови в кровеносных сосудах (артериях и артериолах), дадут приближенные аналитические решения, полученные в [5] и в данной работе.

Уравнения движения. Рассмотрим трехмерное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) система уравнений имеет вид [6]

$$\begin{gathered}
\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\Big(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big),\\
\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\Big) = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu\Big(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2}\Big),\\
\rho\Big(\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w,\\
\frac{\partial\,(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial\,(rw)}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-91204-ЯФ_а) и в рамках междисциплинарного Интеграционного проекта СО РАН № 91.

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial^2 \varphi} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; μ — динамическая вязкость; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; w, u, v — осевая, радиальная и угловая компоненты вектора скорости соответственно.

На стенке трубки ($r = r_w(t, \varphi, z)$) скорости жидкости равны скоростям стенки по нормали, по касательной и вдоль стенки:

$$u = \frac{\partial r_w}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial^2 r_w}{\partial t\, \partial \varphi}, \qquad w = \frac{\partial}{\partial t}\Big(r_w \frac{\partial r_w}{\partial z}\Big). \tag{2}$$

На оси трубки ($r = 0$) должны выполняться условия

$$u = v = 0. \tag{3}$$

Малые параметры. В уравнениях (1) выполним следующее преобразование переменных:

$$t = \frac{r_0}{U}\,\tilde t, \quad r = r_0 \tilde r, \quad z = \lambda \tilde z = \frac{r_0}{\varkappa}\,\tilde z, \quad u = U\tilde u, \quad v = \frac{U}{\varkappa}\,\tilde v, \quad w = \frac{U}{\varkappa}\,\tilde w, \quad p = \frac{\mu U}{r_0 \varkappa^2}\,\tilde p \tag{4}$$

(r_0 — характерный размер вдоль радиальной координаты; λ — характерный размер вдоль продольной координаты; U — характерная скорость; $\varkappa = r_0/\lambda$).

В безразмерных переменных (4) система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{gathered}
\varkappa^2 \,\mathrm{Re}\,\Big(\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde t} + \tilde u\,\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde r} + \frac{\tilde v}{\varkappa \tilde r}\,\frac{\partial \tilde u}{\partial \varphi} + \tilde w\,\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde z} - \frac{\tilde v^2}{\varkappa^2 \tilde r}\Big) = -\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde r} + \varkappa^2\Big(\tilde\nabla^2 \tilde u - \frac{\tilde u}{\tilde r^2} - \frac{2}{\varkappa \tilde r^2}\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi}\Big),\\
\varkappa \,\mathrm{Re}\,\Big(\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde t} + \tilde u\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde r} + \frac{\tilde v}{\varkappa \tilde r}\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi} + \tilde w\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde z} + \frac{\tilde u \tilde v}{\tilde r}\Big) = -\frac{1}{\tilde r}\,\frac{\partial \tilde p}{\partial \varphi} + \varkappa \tilde\nabla^2 \tilde v + \frac{2\varkappa^2}{\tilde r^2}\,\frac{\partial \tilde u}{\partial \varphi} - \frac{\varkappa \tilde v}{\tilde r^2},\\
\varkappa \,\mathrm{Re}\,\Big(\frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde t} + \tilde u\,\frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde r} + \frac{\tilde v}{\varkappa \tilde r}\,\frac{\partial \tilde w}{\partial \varphi} + \tilde w\,\frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde z}\Big) = -\varkappa\,\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde z} + \varkappa \tilde\nabla^2 \tilde w,\\
\frac{\partial\,(\tilde r \tilde u)}{\partial \tilde r} + \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi} + \frac{\partial\,(\tilde r \tilde w)}{\partial \tilde z} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\tilde\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \tilde r^2} + \dfrac{1}{\tilde r}\,\dfrac{\partial}{\partial \tilde r} + \dfrac{1}{\tilde r^2}\,\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varkappa^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \tilde z^2}$; $\mathrm{Re} = \rho U r_0/\mu$ — число Рейнольдса.

Предположим, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to 0$ и $\varkappa^2 \to 0$. После перехода к пределу при $\mathrm{Re} \to 0$ и $\varkappa^2 \to 0$ уравнения (5) сводятся к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde r} = -\frac{2\varkappa}{\tilde r^2}\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi},\\
\frac{1}{\tilde r}\,\frac{\partial \tilde p}{\partial \varphi} = \varkappa\Big(\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial \tilde r^2} + \frac{1}{\tilde r}\,\frac{\partial \tilde v}{\partial \tilde r} + \frac{1}{\tilde r^2}\,\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde v}{\tilde r^2}\Big),\\
\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde z} = \frac{\partial^2 \tilde w}{\partial \tilde r^2} + \frac{1}{\tilde r}\,\frac{\partial \tilde w}{\partial \tilde r} + \frac{1}{\tilde r^2}\,\frac{\partial^2 \tilde w}{\partial \varphi^2},\\
\varkappa\,\frac{\partial\,(\tilde r \tilde u)}{\partial \tilde r} + \frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi} + \varkappa \frac{\partial\,(\tilde r \tilde w)}{\partial \tilde z} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Предположим также, что

$$\frac{\partial \tilde p}{\partial \tilde r} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde v}{\partial \varphi} \sim \varkappa. \tag{7}$$

Тогда можно отбросить члены $\varkappa\,\partial\tilde{v}/\partial\varphi$ и $\varkappa\,\partial^2\tilde{v}/\partial\varphi^2$ из первого и второго уравнений соответственно, оставив член $\partial\tilde{v}/\partial\varphi$ в четвертом уравнении системы (6). В размерных переменных система уравнений (6) записывается в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\
\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2},\\
\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{\tilde{r}^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2},\\
\frac{\partial\,(ru)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial\,(rw)}{\partial z}=0.
\end{gathered}\tag{8}$$

Решение задачи. Система уравнений (8) имеет общее решение в виде

$$\begin{aligned}
u(t,r,\varphi,z)&=-\frac{r}{4\mu}\Big[\ln\Big(\frac{r}{r_0}\Big)-1\Big]\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}-\frac{r}{2}\,\frac{\partial C(t,\varphi,z)}{\partial\varphi},\\
v(t,r,\varphi,z)&=\frac{r}{4\mu}\Big[2\ln\Big(\frac{r}{r_0}\Big)-1\Big]\frac{\partial p}{\partial\varphi}+rC(t,\varphi,z),\\
w(t,r,\varphi,z)&=-\frac{1}{4\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,(r_0^2-r^2)+\varkappa\,\frac{p_1(t)}{4\mu r_0}\,r^2\Phi(\varphi),
\end{aligned}\tag{9}$$

где $\Phi(\varphi)=A\cos(2\varphi)-B\sin(2\varphi)$; A, B — произвольные постоянные; $p_1(t)$ — функция времени. Функция $C(t,\varphi,z)$ и производная давления $\partial p(t,\varphi,z)/\partial\varphi$ находятся из граничных условий (2) в виде

$$\begin{aligned}
C(t,\varphi,z)&=\frac{1}{r_w}\,\frac{\partial^2 r_w}{\partial t\,\partial\varphi}-\frac{1}{4\mu}\Big[2\ln\Big(\frac{r_w}{r_0}\Big)-1\Big]\frac{\partial p(t,\varphi,z)}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial p(t,\varphi,z)}{\partial\varphi}&=\frac{4\mu}{r_w^2}\int\Big(2r_w\,\frac{\partial r_w}{\partial t}-\frac{\partial r_w}{\partial\varphi}\,\frac{\partial^2 r_w}{\partial t\,\partial\varphi}+r_w\,\frac{\partial^3 r_w}{\partial t\,\partial\varphi^2}\Big)\,d\varphi.
\end{aligned}\tag{10}$$

Решение (9) удовлетворяет системе уравнений (8) при условиях для давления

$$\frac{\partial^3 p}{\partial z\,\partial\varphi^2}=0,\qquad\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0.\tag{11}$$

Условия (11) эквивалентны функции давления следующего вида:

$$p(t,\varphi,z)=p_1(t)z/\lambda+p_2(t,\varphi)+p_3(t).\tag{12}$$

При этом функция деформации стенки равна

$$r_w(t,\varphi,z)=r_0F(z)G(t,\varphi).\tag{13}$$

Таким образом, давление $p_2(t,\varphi)$ и функция $G(t,\varphi)$ деформации стенки $r_w(t,\varphi,z)$ (13) связаны соотношением

$$\frac{\partial p_2(t,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{4\mu}{G^2}\int\Big(2G\,\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial\varphi}\,\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial\varphi}+G\,\frac{\partial^3 G}{\partial t\,\partial\varphi^2}\Big)\,d\varphi.\tag{14}$$

В силу граничного условия (2) для продольной скорости w произведение функций $F(z)G(t,\varphi)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial F^2G^2}{\partial t\,\partial z}=\frac{\varkappa p_1(t)}{2\mu r_0}\,\{F^2G^2[\Phi(\varphi)+1]-1\}.\tag{15}$$

Уравнение (15) имеет решение

$$F(z) = 1 + \varkappa f(z), \qquad G(t,\varphi) = [1 + \varkappa g(t,\varphi)]/\sqrt{\Phi(\varphi)+1}, \tag{16}$$

где $f(z)$, $g(t,\varphi)$ — произвольные функции. Решение (16) удовлетворяет уравнению (15) с точностью до $O(\varkappa^2)$.

Общее приближенное решение. С точностью до членов порядка $O(\varkappa^2)$ решение задачи имеет вид

$$r_w(t,\varphi,z) = r_0\{1 + \varkappa[f(z) + g(t,\varphi)]\}\,/\sqrt{\tilde{\Phi}(\varphi)}; \tag{17}$$

$$p(t,\varphi,z) = p_1(t)z\varkappa/r_0 + p_2(t,\varphi) + p_3(t); \tag{18}$$

$$\begin{gathered} u(t,r,\varphi) = -\frac{r}{4\mu}\Big[\ln\Big(\frac{r}{r_0}\Big) - 1\Big]\frac{\partial^2 p_2}{\partial\varphi^2} - \frac{r}{2}\,\frac{\partial C(t,\varphi)}{\partial\varphi}, \\ v(t,r,\varphi) = \frac{r}{4\mu}\Big[2\ln\Big(\frac{r}{r_0}\Big) - 1\Big]\frac{\partial p_2}{\partial\varphi} + rC(t,\varphi), \\ w(t,r,\varphi) = -p_1(t)[r_0^2 - r^2\tilde{\Phi}(\varphi)]\varkappa/(4\mu r_0), \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = 1 + A\cos(2\varphi) - B\sin(2\varphi), \tag{20}$$

A, B — произвольные постоянные; $f(z)$, $g(t,\varphi)$, $p_1(t)$, $p_3(t)$ — произвольные функции; функция $p_2(t,\varphi)$ связана с деформацией стенки соотношением (10), которое принимает вид

$$\begin{gathered} p_2(t,\varphi) = 4\mu\int\Big[\frac{1}{G^2}\int\Big(2G\,\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial\varphi}\,\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial\varphi} + G\,\frac{\partial^3 G}{\partial t\,\partial\varphi^2}\Big)d\varphi\Big]\,d\varphi, \\ G(t,\varphi) = [1 + \varkappa g(t,\varphi)]\,/\sqrt{\tilde{\Phi}(\varphi)}; \end{gathered} \tag{21}$$

$$C(t,\varphi) = \frac{1}{G(t,\varphi)}\,\frac{\partial^2 G(t,\varphi)}{\partial t\,\partial\varphi} - \frac{1}{4\mu}\Big[2\ln\Big(\frac{r_w}{r_0}\Big) - 1\Big]\,\frac{\partial p_2(t,\varphi)}{\partial\varphi}. \tag{22}$$

Нетрудно проверить, что решение (19) для производной угловой скорости $\partial v/\partial\varphi$ удовлетворяет предположению (7).

Таким образом, найдено общее решение (9), (12)–(14), (16) системы уравнений (8) с граничными условиями (2) и условиями на оси (3), описывающее нестационарное трехмерное движение вязкой несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке. Данное решение описывает течение в трубке при малых числах Рейнольдса и малом (с точностью до второго порядка малости) отношении поперечного и продольного характерных размеров.

Обобщенное течение Пуазейля. Пусть функция $g(t,\varphi) \equiv g(\varphi)$. Тогда

$$r_w(\varphi,z) = r_0\{1 + \varkappa[f(z) + g(\varphi)]\}\,/\sqrt{\tilde{\Phi}(\varphi)}; \tag{23}$$

$$p(t,z) = p_1(t)z\varkappa/r_0 + p_3(t); \tag{24}$$

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w(t,r,\varphi) = -p_1(t)[r_0^2 - r^2\tilde{\Phi}(\varphi)]\varkappa/(4\mu r_0), \tag{25}$$

где

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = 1 + A\cos(2\varphi) - B\sin(2\varphi), \tag{26}$$

A, B — произвольные постоянные; $p_1(t)$, $p_3(t)$ — произвольные функции.

При $g(\varphi) \equiv 0$, $f(z) \equiv 0$ решение (23)–(26) сводится к известному решению Пуазейля задачи о течении сквозь цилиндрическую трубку эллиптического сечения [1. С. 381]. Действительно, в декартовых координатах уравнение деформации стенки (23) является уравнением эллипса

$$(1 + A)x^2 - 2Bxy + (1 - A)y^2 = r_0^2 \tag{27}$$

($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$), не приведенным к главным осям.

Отличие обобщенного решения Пуазейля (23)–(26) от известного решения [6. С. 381] заключается в том, что при малых значениях параметра $\varkappa$ обобщенное решение допускает помимо эллиптической деформации сосуда (27) деформацию по оси z (при $f(z) \neq 0$) и углу φ (при $g(\varphi) \neq 0$).

Перистальтическое течение. Перистальтическое течение представляет собой течение в трубке, когда ее деформация симметрична относительно оси [1, 2], т. е. $r_w = r_w(t, z)$, и угловая скорость $v \equiv 0$.

Найденное решение (17)–(22) не описывает перистальтическое течение, поскольку давление линейно зависит от продольной координаты. Поэтому продольная скорость w также не зависит от координаты z, а четвертое уравнение системы (8) имеет только тривиальное решение $u = 0$. Из условия $u = v = 0$ для данного решения (17)–(22) следует, что функция $g(t, \varphi) = \text{const}$ и деформация стенки не зависит от времени. Поэтому с помощью данного решения невозможно описать перистальтическое течение при $r_w = r_w(t, z)$.

Заключение. В данной работе рассмотрено течение вязкой несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке. Для течения с малыми числами Рейнольдса в узкой длинной трубке (при условии малости деформирования стенок) получено решение нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса. Решение зависит от нестационарной деформации стенки трубки и пульсации давления. Как частный случай найденное решение обобщает решение Пуазейля в эллиптических трубках при достаточно произвольном малом деформировании стенки по длине и углу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Регирер С. А.** О движении жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 202–204.
2. **Регирер С. А.** Квазиодномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 89–97.
3. **Чесноков А. А.** Осесимметричные вихревые движения жидкости в длинной эластичной трубке // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 76–87.
4. **Liou T. M., Liou S. N.** A review on in vitro studies of hemodynamic characteristics in terminal and lateral aneurysm models // Proc. Nat. Sci. Council (China). Pt B. 1999. V. 23, N 4. P. 133–148.
5. **Medvedev A. E.** Blood motion in arteries with a deformable wall // Proc. of the 13rd Intern. conf. on the methods of aerophys. res., Novosibirsk, 5–10 Febr. 2007 / Ed. by V. M. Fomin. Novosibirsk: Publ. House "Parallel", 2007. Pt 2. P. 115–122.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. 5-е изд. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 9/VI 2008 г.