

УДК 532.501.32:532.511

ПЕРВИЧНАЯ ВОЛНА ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ СРАБАТЫВАНИЯ КЛАПАНА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ТРУБОПРОВОДЕ

И. А. Дободейч, Ю. П. Барметов

Воронежская государственная технологическая академия, 394017 Воронеж
E-mail: kafasu@vgta.vrn.ru

Рассматривается изменение скорости, плотности и давления невязкой сжимаемой жидкости при ускорении или замедлении течения после изменения проходного сечения клапана, установленного на трубопроводе с жесткими стенками. Приведены выражения для амплитуды первичной волны давления или разрежения, возникающей при изменении проходного сечения клапана.

Ключевые слова: невязкая сжимаемая жидкость, первичная волна давления, трубопровод, клапан.

Изучению первичной волны давления при возникновении или прекращении течения жидкости (гидроудару) посвящено много работ, в частности [1–3]. В отличие от них в настоящей работе используются полученные авторами аналитические решения соответствующей системы нелинейных уравнений в частных производных для различных граничных условий.

1. Постановка задач. При срабатывании клапана, установленного на трубопроводе, заполненном покоящейся или движущейся сжимаемой жидкостью, возникает первичная волна пониженного или повышенного давления (ПВД). Рассмотрим неустановившееся изэнтропическое течение невязкой сжимаемой жидкости в наклонном трубопроводе постоянного сечения с жесткими непроницаемыми стенками при не мгновенном срабатывании клапана. Предполагается, что жидкость движется со скоростью u , зависящей только от продольной координаты z и времени t . В этом случае уравнения неразрывности и динамики сплошной среды [4] принимают следующий вид:

$$R \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0; \quad (1.1)$$

$$R\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = R\rho F_z; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = R\rho F_r; \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = R\rho F_\varphi. \quad (1.4)$$

Здесь ρ и P — плотность и давление жидкости; R — радиус трубопровода; r и z — радиальная и продольная координаты, деленные на R ; φ — угловая координата; ρF_z , ρF_r и ρF_φ — проекции на оси z , r и φ градиента массовых сил.

Если пренебрегать массовыми силами или рассматривать вертикальный трубопровод, то правые части уравнений (1.3), (1.4) оказываются равными нулю и скорость невязкой

сжимаемой жидкости, плотность и давление не будут зависеть от r и φ . В этом случае систему уравнений (1.1), (1.2) необходимо дополнять либо уравнением состояния $P = f(\rho)$, либо уравнением $\partial P/\partial z = A^2 \partial \rho/\partial z$ при $A = \text{const}$.

Покажем, что в случае действия только силы тяжести, т. е.

$$\rho F_z = \rho g \sin \theta, \quad \rho F_r = \rho g \cos \theta \cos \varphi, \quad \rho F_\varphi = -\rho g \cos \theta \sin \varphi, \quad (1.5)$$

где θ — угол наклона трубопровода к горизонту, а g — ускорение силы тяжести, искомые величины ρ , P , u однозначно определяются системой уравнений (1.1)–(1.4), несмотря на ее кажущуюся переопределенность.

Отсчет φ будем вести по часовой стрелке от направления на наивысшую точку проходного сечения трубопровода, а координату z отсчитывать от клапана в направлении распространения волны давления.

В дальнейшем используем безразмерные величины

$$\tau = \frac{at}{R}, \quad M = \frac{u}{a}, \quad z_* = \frac{L}{R}, \quad B = \frac{Rg \sin \theta}{a^2}, \quad (1.6)$$

где L — длина трубопровода; a — скорость звука в жидкости при $\tau = 0$, $z = 0$ и $r = 0$.

1.1. Задача об ускорении течения невязкой сжимаемой жидкости после начала открытия клапана наряду с уравнениями (1.1)–(1.4) и равенствами (1.5) включает:

— начальные условия

$$\rho(0, z) = \rho_0(z), \quad M(0, z) = M_0(z) \quad (1.7)$$

(в частном случае $M_0(z) = 0$);

— граничное условие

$$z = 0: \quad M(\tau, 0) = f_1(\tau), \quad f_1(\tau_k) \equiv M_{k,0}, \quad f_1(0) \equiv f_{1,0}, \quad (1.8)$$

где $\tau = 0$ и τ_k соответствуют моментам начала и окончания процесса открытия клапана;

— условия для координаты начала фронта ПВД $z_p(\tau)$ при $z_p \leq z_*$, которые совпадают с начальными условиями для соответствующих сечений:

$$M(\tau, z_p) = M_0(z_p), \quad \rho(\tau, z_p) = \rho_0(z_p). \quad (1.9)$$

Координата $z_p(\tau)$ при $\tau \leq \tau_2$ определяется из уравнения

$$\tau = \int_0^{z_p} \frac{dz}{1 + M_0(z)}, \quad (1.10)$$

а время пробега начала ПВД по трубопроводу равно

$$\tau_2 = \int_0^{z_*} \frac{dz}{1 + M_0(z)}. \quad (1.11)$$

В частном случае

$$z_p = \begin{cases} \tau, & M_0(z_p) = 0, \\ z_* = \text{const}, & \tau > \tau_2. \end{cases} \quad (1.12)$$

1.2. Задача о замедлении течения невязкой сжимаемой жидкости после начала закрытия клапана наряду с уравнениями (1.1)–(1.5) включает:

— начальные условия (1.7) при $M_0(z) \neq 0$;

— граничное условие

$$z = 0: \quad M(\tau, 0) = f_2(\tau), \quad f_2(0) \equiv M_{0,0}, \quad f_2(\tau_k) \equiv M_{k,0}, \quad (1.13)$$

где $M_{0,0} \neq 0$; τ_k соответствует моменту окончания уменьшения проходного сечения клапана от начального до конечного; в частном случае (при полном закрытии проходного сечения клапана) $M_{k,0} = 0$;

— условия для координаты начала фронта ПВД z_p , которые совпадают с начальными условиями для соответствующих сечений и формально — с условиями (1.9)–(1.12).

Характер функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ в условиях (1.8) и (1.13) зависит от давления за клапаном и особенностей самого клапана (его конструкции и быстродействия приводного механизма).

Укажем аналитические решения уравнений (1.1)–(1.5) с учетом условий (1.7)–(1.12) для $\tau \leq z_*$ и с условиями (1.9)–(1.13) и (1.7) при $M_0(z) \neq 0$, $0 \leq \tau < z_*/(1 + M_{0,0})$, $0 < |M| \leq 1$ для одного вида функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$, содержащих несколько произвольных постоянных.

2. Аналитические решения. Дифференцируя (1.3) по φ , а (1.4) — по r и исключая P , получим с учетом (1.5) уравнение

$$Rg \cos \theta \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$\rho = \rho_{0,0} f_3(\tau, z) F(x), \quad x \equiv (Rg/a^2) r \cos \theta \cos \varphi, \quad (2.1)$$

где $F(x)$ — произвольная функция x ; $\rho_{0,0}$ — плотность невязкой сжимаемой жидкости при $\tau = 0$, $z = 0$ и $r = 0$. Наряду с (2.1) системе (1.3)–(1.5) соответствует выражение

$$P = \rho_{0,0} a^2 \left[f_4(\tau, z) + f_3(\tau, z) \int F(x) dx \right], \quad (2.2)$$

где f_3 и f_4 — произвольные функции τ , z .

Выражение (2.1), которое полностью соответствует системе (1.3)–(1.5), не противоречит уравнению (1.1) только при $u \neq f(r, \varphi)$. Это согласно (1.2) при (1.5) влечет условие $\rho^{-1} \partial P / \partial z \neq f(r, \varphi)$. Следовательно, всей системе (1.1)–(1.5) выражения (2.1) и (2.2) соответствуют только при $\partial f_4 / \partial z = 0$ и $\frac{1}{F(x)} \int F(x) dx \neq f(x)$. Используем $F(x) = \exp(x/\beta^2)$ при $\beta = \text{const}$. Тогда система (1.1)–(1.6) приводится к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial M}{\partial z} + M \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, & \Phi &= \ln f_3(\tau, z), \\ \frac{\partial M}{\partial \tau} + M \frac{\partial M}{\partial z} &= B - \beta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, & M &\neq f(r, \varphi); \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$P = a^2 [f_4(\tau) \rho_{0,0} + \beta^2 \rho], \quad \beta = \text{const}; \quad (2.4)$$

$$\rho = \rho_{0,0} f_3(\tau, z) \exp(x/\beta^2). \quad (2.5)$$

Заметим, что из выражений (2.4), (2.5) следует $\partial P / \partial z = a^2 \beta^2 \partial \rho / \partial z$.

Условиям поставленных задач удовлетворяет частное решение системы (2.3)

$$f_3(\tau, z) = C \exp[(M - B\tau)/b], \quad C = \text{const}; \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} + (M + b) \frac{\partial M}{\partial z} = B, \quad b = \pm \beta, \quad (2.7)$$

в котором согласно (1.6) $0 \leq B \ll 1$ (для горизонтального трубопровода $B = 0$), а уравнению (2.7) удовлетворяют следующие два выражения для M :

$$M(\tau, z) = [k_2 + (k_3 + z)y + c_0 \sqrt{h}]/T - b + By/2, \quad (2.8)$$

где $h = k_4(k_3 + z)^2 + 2k_2(k_3 + z)y + k_5T + k_2^2 + k_4B^2T^2/4 - BT(k_4z + k_2y)$, $T = y^2 - k_4$, $y = k_1 + \tau$, $k_i = \text{const}$, $c_0 = \pm 1$;

$$M(\tau, z) = c_2 + (c_3 + z)/y - b + 3By/8 + c_0\sqrt{H}, \quad (2.9)$$

где $H = [(c_3 + z)/y - c_2 - By/8]^2 + c_4/y$, $y = c_1 + 2\tau$, $c_i = \text{const}$, $c_0 = \pm 1$.

Подстановка выражений (2.8), (2.9) обращает уравнение (2.7) в тождество. Согласно (2.5) и (2.6) после нахождения постоянной C получим

$$\rho = \rho_{0,0} \exp [x/b^2 + (M - M_{0,0} - B\tau)/b]. \quad (2.10)$$

Эти решения дополняют известные для задач о неустановившемся движении жидкости в трубопроводе [5, 6].

3. Первичная волна давления при ускорении течения невязкой сжимаемой жидкости после открытия клапана. В этом случае, если направления ПВД и течения невязкой сжимаемой жидкости совпадают, то $M > 0$, $b > 0$, что соответствует начальной стадии заполнения трубопровода. А если направления ПВД и течения невязкой сжимаемой жидкости противоположны, то $M < 0$, $b > 0$ (начало опорожнения трубопровода).

Выражения (2.4), (2.8), (2.10) являются решением задачи (1.1)–(1.5) при условиях (1.7)–(1.10), $z < z_*$, $\tau < \tau_*$,

$$f_1(\tau) = By/2 - b + (k_2 + k_3y + c_0\sqrt{h_0})/T, \quad (3.1)$$

где $h_0 = 2k_2k_3y + k_3^2k_4 + k_5T + k_2^2 + BT(Bk_4T/4 - k_2y)$, и если начальные условия $\rho_0(z)$ и $M_0(z)$ в (1.7) удовлетворяют соотношению

$$\rho_0(z) = \rho_{0,0} \exp [(M_0(z) - M_{0,0})/b]. \quad (3.2)$$

Часть постоянных в выражениях (2.8) и (3.1) находится по условию (1.9) с учетом (1.10). Например, при $M_0(z) = 0$ согласно (3.2) $\rho_0(z) = \rho_{0,0}$, что по физическим представлениям при наличии гравитационных сил возможно лишь при $B = 0$. В этом случае

$$b = 1, \quad k_5 = (k_3 - k_1)^2 - k_4 - 2k_2. \quad (3.3)$$

Эти соотношения удовлетворяют также условию (1.7) и получены после подстановки в (2.8) $z = z_p$, $z_p = \tau$ и $M = 0$.

При $\tau \leq \tau_k$ координата конца фронта ПВД z_1 равна нулю, а при $\tau_k < \tau \leq z_*$

$$z_1 = \int_{\tau_k}^{\tau} (1 + M) d\tau \approx (1 + M_{k,0})(\tau - \tau_k). \quad (3.4)$$

Согласно (2.4), (2.10) амплитуда ПВД в невязкой сжимаемой жидкости равна

$$AD = E \exp \left(\frac{x}{b^2} - \frac{B\tau}{b} \right) \left[\exp \left(\frac{M(\tau, z_1)}{b} \right) - \exp \left(\frac{M_0(z_p)}{b} \right) \right],$$

где $AD = P(\tau, z_1) - P(\tau, z_p)$, $E = \rho_{0,0}a^2b^2$. Амплитуда зависит от z , τ_k , $M_{k,0}$, а также от постоянных, входящих в выражения (2.8) и (3.1).

Как видно, выражение (3.1) содержит несколько постоянных интегрирования. Варьируя ими, можно записать решение задачи для достаточно широкого набора граничных условий $f_1(\tau)$ в (1.8), хотя и произвольных.

Например, постоянные k_1, \dots, k_4 можно однозначно связать со значениями $M(\tau_k, 0)$, $M(\tau_k/2, 0)$ и производными M по τ в точках $z = 0$, $\tau = 0$ и $z = 0$, $\tau = \tau_k$, т. е. со свойствами и режимом срабатывания клапана, а также с давлением за клапаном. На рис. 1

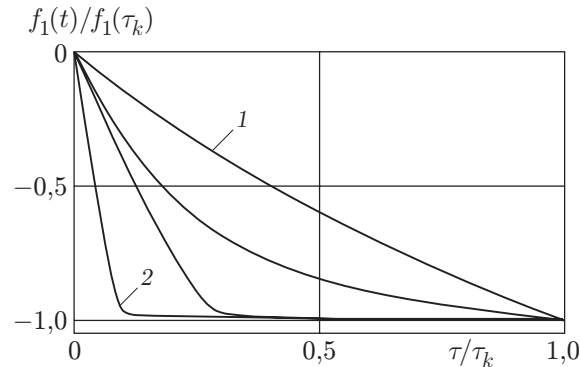


Рис. 1. Возможные варианты распределения скорости у клапана при его открытии

представлены примеры функций $f_1(\tau)/|f_1(\tau_k)|$, рассчитанных при $b = 1$, $c_0 = 1$, $B = 0$, $M_0(z) = 0$ и равенстве нулю производной M по τ при $z = 0$ и $\tau = \tau_k$ (т. е. при допущении плавного изменения функции $f_1(\tau)$ на стадии завершения открытия клапана и условия $f_1(\tau > \tau_k) = \text{const}$ при $\tau < z_*$). В частности, кривая 1 построена при $k_1 = 3,95$; $k_2 = 3,96$; $k_3 = 0,178$; $k_4 = -0,198$; $k_5 = -0,159$; кривая 2 — при $k_1 = 213,05$; $k_2 = -3,626 \cdot 10^4$; $k_3 = 170,86$; $k_4 = 4,523 \cdot 10^4$; $k_5 = 2,91 \cdot 10^4$.

Поскольку при $M < 0$ начальный участок фронта ПВД при условиях (1.7) распространяется против потока, движущегося со скоростью $M_0(z)$, а конечный — против потока с большей по модулю скоростью $M_{k,0}$, время его пробега до некоторого сечения z будет больше, чем у начального участка фронта ПВД.

В общем случае длина фронта ПВД определяется при $\tau_k \leq \tau \leq z_*$ как

$$z_p - z_1 \approx \tau(1 + M_{0,0}) - (\tau - \tau_k)(1 + M_{k,0}), \quad (3.5)$$

а при $\tau_k > z_*/(1 + M_{0,0})$ она равна z_* .

Согласно (3.5) при $\tau \leq z_*$ распространение ПВД по трубопроводу при открытии клапана будет сопровождаться растяжением фронта ПВД, если $M < 0$, и сжатием, если $M > 0$.

4. Первичная волна давления при торможении течения закрытием клапана.

В случае, если ПВД распространяется по потоку невязкой сжимаемой жидкости, $M > 0$, $b > 0$ (начало прекращения заполнения трубопровода). А если направления распространения ПВД и течения противоположны, то $M < 0$, $b > 0$ (имеет место гидроудар вследствие прекращения истечения невязкой сжимаемой жидкости из трубопровода).

Выражения (2.4), (2.9), (2.10) являются решением задачи (1.1)–(1.6) при условиях (1.7), (1.9)–(1.13), (3.2), $z \leq z_*$, $\tau \leq z_*/(1 + M_{0,0})$ и

$$f_2(\tau) = c_2 + c_3/y + 3By/8 - b + c_0 \sqrt{(c_3/y - c_2 - By/8)^2 + c_4/y}.$$

Постоянная c_4 находится из условия (1.12) при $\tau = \tau_k$:

$$c_4 = (M_{k,0} + b)[(M_{k,0} + b - 2c_2)y_k - 3By_k^2/4 - 2c_3] + (4c_2 + By_k)(c_3 + By_k^2/8),$$

где $y_k = 2\tau_k + c_1$.

Постоянные c_1 и c_3 определяются из условия (1.9) с учетом (3.3). Например, при $\rho_0(z) = \rho_0(0)$ и $M_0(z) = M_{0,0}$ (что возможно только в горизонтальном трубопроводе) имеет место $B = 0$ и согласно (1.10) $z_p = \tau(1 + M_{0,0})$. Подставляя в равенство (2.9) $z = z_p$ и $M = M_{0,0}$, получаем уравнение для τ , которое при различных τ обращается в тождество,

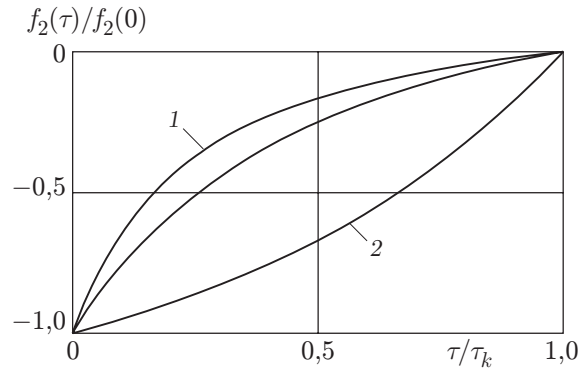


Рис. 2. Возможные варианты распределения скорости у клапана при его закрытии

если в нем приравнять к нулю суммы слагаемых, пропорциональных τ , и слагаемых, не зависящих от τ , т. е. при выполнении следующих условий:

$$(1 - b)(2c_2 - b - M_{0,0}) = 0, \quad c_4 = (2c_3 - c_1 - c_1 M_{0,0})(2c_2 - b - M_{0,0}).$$

На рис. 2 представлены примеры функций $f_2(\tau)/|f_2(0)|$, рассчитанных при $b = 1$, $c_0 = 1$ и значений постоянных $c_1 = 0,562$; $c_2 = 0,577$; $c_3 = -0,188$; $c_4 = -0,236$ — кривая 1 и $c_1 = -13,103$; $c_2 = -5,562$; $c_3 = -61,841$; $c_4 = 676,962$ — кривая 2, при которых выражения (2.4) и (3.1) являются решением задачи (1.1)–(1.5), (1.7), (1.9)–(1.13).

Согласно (2.4), (2.9) и (2.10) для каждого значения $z \leq z_*$ амплитуда первичной волны повышенного давления равна

$$AD = E \exp\left(\frac{f_2(\tau) - M_{0,0}}{b} + \frac{x}{b^2} - \frac{B}{b} \tau\right) [1 - \exp(DM)], \quad (4.1)$$

где $AD = P(\tau, 0) - P(\tau, z)$, $DM = (M - f_2(\tau))/b$, $E = \rho_{0,0} a^2 b^2$.

При $B = 0$

$$DM = \frac{1}{b} \left[\frac{z}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{c_3 + z}{y} - c_2\right)^2 + \frac{c_4}{y}} \mp \sqrt{\left(\frac{c_3}{y} - c_2\right)^2 + \frac{c_4}{y}} \right]. \quad (4.2)$$

В случае $M < 0$, $b > 0$ (гидроудар) координата начала фронта ПВД z_p определяется согласно (1.10), (1.11). В частности, если $M_0(z) = M_{0,0}$, то

$$z_p = \tau(1 + M_{0,0}), \quad \tau_2 = z_*/(1 + M_{0,0}).$$

При $\tau \leq \tau_k$ координата конца фронта ПВД z_1 равна нулю, а для $\tau_k < \tau \leq \tau_2$ определяется согласно (3.4).

Следовательно, при $\tau_2 \leq \tau_k$ протяженность фронта ПВД равна $z_p - z_2 = z_*$. А при $f_2(\tau_k) = 0$ (полное закрытие клапана) и $\tau_k < \tau_2$ протяженность фронта ПВД равна $z_p - z_2 \approx \tau M_{0,0} + \tau_k$.

Амплитуда первичной волны давления будет максимальной при $\tau_k \leq \tau_2$ и $f_2(\tau_k) = 0$, достигая в момент $\tau = \tau_k$ значения

$$AD_{\max} = E \exp\left(\frac{x}{b^2} - \frac{B}{b} \tau_k\right) \left[\exp\left(-\frac{M_{0,0}}{b}\right) - 1 \right]. \quad (4.3)$$

При $\tau_k > \tau_2$ AD будет максимальной в момент $\tau = \tau_2$, достигая значения

$$AD_{\max} = E \exp\left(\frac{x}{b^2} - \frac{B}{b} \tau_2\right) \left[\exp\left(\frac{f_2(\tau_2) - M_{0,0}}{b}\right) - 1 \right]. \quad (4.4)$$

Из (4.3) следует, что в первом приближении при $B = 0$, $|M_{0,0}| \ll 1$, $x = 0$ и $M_{0,0} < 0$ (ПВД при закрытии клапана)

$$AD_{\max} = \exp\left(-\frac{M_{0,0}}{b}\right) \rho_{0,0} a |u_{0,0}| b \left[1 + \frac{1}{2b} M_{0,0} + \frac{1}{6b^2} (M_{0,0})^2 + \dots\right]. \quad (4.5)$$

Это значение близко к результату $AD_{\max} = \rho_{0,0} a |u_{0,0}|$, полученному Н. Е. Жуковским [1] при $b = 1$ для условий справедливости формулы (4.5) иным способом (с учетом податливости стенок трубопровода, при допущении линейности уменьшения скорости $u(0, t)$ или при мгновенном запирании трубопровода), без использования уравнений (1.1), (1.3) и (1.4).

Анализируя выражения (4.1)–(4.4), замечаем, что амплитуда ПВД при закрытии затвора или клапана, установленного на трубопроводе с жесткими стенками:

- пропорциональна $\rho_{0,0} a$;
- увеличивается с увеличением разности конечной (в момент завершения срабатывания клапана τ_k) и начальной скоростей u клапана;
- имеет максимум в момент, когда $M_{k,0} = 0$;
- не зависит от времени срабатывания τ_k и z , если $\tau_k \leq \tau_2$ и $\theta = 0$;
- существенно уменьшается с увеличением $f_2(\tau_2)$, если $\tau_k > \tau_2$, т. е. зависит от продолжительности и характера закрытия клапана, а также от давления за клапаном.

Поскольку эти выводы не противоречат известным экспериментальным данным [1], можно констатировать несущественное влияние использованных допущений при постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуковский Н. Е.** О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
2. **Овсянников В. М.** Расчет возникновения движения жидкости в трубопроводе // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 5. С. 158–160.
3. **Михеев Ю. С.** Расчет гидроудара в магистрали с демпфером на конце // Изв. вузов. Авиац. техника. 1991. № 4. С. 18–21.
4. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
5. **Кочина Н. Н.** О периодических решениях задачи об одномерном неустановившемся движении жидкости в трубе // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 185–190.
6. **Богоявленский О. Н.** Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 1. С. 3–9.

*Поступила в редакцию 5/V 2004 г.,
в окончательном варианте — 12/VII 2004 г.*