

УДК 532.522.2.013.4:532.594

КОРОТКИЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Г. Чесноков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
198013 Санкт-Петербург

Получены асимптотические формулы, описывающие поведение коротковолновых возмущений поверхности цилиндрической струи вязкой жидкости, радиус которой уменьшается с течением времени. Изучено влияние значений чисел Рейнольдса, Вебера и начального значения волнового числа на затухание таких возмущений.

Введение. Явление капиллярного распада капель с неоднородным по длине капли начальным распределением скорости может быть объяснено на основе анализа устойчивости растягивающегося жидкого цилиндра под действием капиллярных сил. В работе [1] изучена капиллярная устойчивость растягивающейся цилиндрической струи вязкой жидкости, истекающей в другую жидкость. В [2] рассмотрена задача об устойчивости вытянутой цилиндрической капли, находящейся во внешнем по отношению к капле потоке, скорость которого зависит от радиус-вектора по линейному закону. Как в [1], так и в [2] рассматривались так называемые ползущие течения, т. е. предполагалось, что силами инерции можно пренебречь по сравнению с силами вязкого трения и поверхностного натяжения. Работы [3, 4] посвящены теоретическому анализу другого важного случая подобных течений, когда главную роль играют силы инерции и поверхностного натяжения, а силы вязкого трения и взаимодействие струи с окружающей средой не существенны.

Как показано в [4], по истечении достаточно большого промежутка времени скорость роста возмущения оказывается тем больше, чем больше начальное значение волнового числа. Таким образом, если в момент образования капли имеются малые возмущения ее поверхности с различными длинами волн, вторичный распад капли может произойти в результате роста наиболее коротковолновых возмущений при условии, что начальная амплитуда этих возмущений не очень мала по сравнению с начальными значениями амплитуд возмущений с большими длинами волн.

В работе [4] предполагалось, что влияние вязкости жидкости на процесс развития возмущений пренебрежимо мало. Как известно, в случае струи идеальной жидкости постоянного радиуса наличие возмущений с малой длиной волны приводит к возникновению гармонических колебаний, частота которых пропорциональна волновому числу в степени $3/2$. Вязкость жидкости вызывает быстрое затухание высокочастотных колебаний. В случае растягивающейся струи возмущения с малой длиной волны по истечении некоторого промежутка времени оказываются быстрорастущими. Рост именно таких возмущений может привести к распаду струи на капли. Поэтому необходимо изучить вопрос о том, насколько быстро затухает амплитуда таких возмущений в начальный период времени. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи. В данной работе рассматривается задача о капиллярной устойчивости струи несжимаемой вязкой жидкости, имеющей цилиндрическую форму, причем радиус струи изменяется с течением времени. Как показано Рэлеем, к распаду

струи на капли приводит рост осесимметричных возмущений, поэтому здесь рассматриваются именно такие возмущения. Предполагается, что скорость жидкости в струе достаточно велика. В этом случае влиянием силы тяжести на процесс распада жидкой струи под действием капиллярных сил можно пренебречь.

При решении задачи удобно использовать безразмерные переменные. Через $h(t)$ обозначим радиус струи (t — время), $h_0 = h(0)$ — начальное значение радиуса, ρ и μ — плотность и вязкость жидкости, σ — поверхностное натяжение на границе раздела между жидкой струей и окружающей средой (газом). Тогда h_0 можно использовать в качестве линейного масштаба, $t_0 = -h_0/(2h_t(0))$ — в качестве масштаба времени, h_0/t_0 — в качестве масштаба скорости жидкости, $p_0 = \sigma/h_0$ — в качестве характерного масштаба давления жидкости. Здесь через $h_t(0)$ обозначена производная от радиуса струи по времени при $t = 0$. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии. Обозначим через u и v осевую и радиальную составляющие вектора скорости жидкости, а через p — давление. Уравнения, описывающие течение жидкости в струе, включают уравнение неразрывности

$$v_r + v/r + u_z = 0, \quad (1.1)$$

осевую составляющую уравнения Навье — Стокса

$$u_t + vu_r + uu_z = -\frac{1}{\text{We}} p_z + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (ru_r)_r + u_{zz} \right], \quad (1.2)$$

радиальную составляющую уравнения Навье — Стокса

$$v_t + vv_r + uv_z = -\frac{1}{\text{We}} p_r + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (rv_r)_r - \frac{v}{r^2} + v_{zz} \right]. \quad (1.3)$$

В (1.1)–(1.3) и далее нижние индексы у переменных обозначают дифференцирование по соответствующей переменной, т. е. $v_r = \partial v / \partial r$ и т. п. Числа Рейнольдса Re и Вебера We определяются равенствами $\text{Re} = \rho h_0^2 / (\mu t_0^2)$, $\text{We} = \rho h_0^3 / (\sigma t_0^2)$. Свободная поверхность струи задается уравнением $r = h(z, t)$. На этой поверхности ставятся кинематическое граничное условие

$$h_t + uh_z = v \quad \text{при} \quad r = h \quad (1.4)$$

и два динамических граничных условия. Одно из них означает, что на поверхности струи обращается в нуль тангенциальная к поверхности составляющая вектора вязкого напряжения:

$$2v_r h_z + (u_r + v_z)(1 - h_z^2) - 2u_z h_z = 0 \quad \text{при} \quad r = h. \quad (1.5)$$

Согласно второму условию нормальная к поверхности составляющая вектора напряжения по разные стороны от поверхности различается на величину $\sigma(1/R_1 + 1/R_2)$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности струи в продольном и поперечном направлениях. В безразмерных переменных это условие записывается в виде

$$p - \frac{\text{We}}{\text{Re}} [2v_r - (u_r + v_z)h_z] = p_a + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1.6)$$

Здесь p_a — давление окружающей среды, которое предполагается постоянным. Главные радиусы кривизны в цилиндрической системе координат вычисляются по формулам

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{h(1 + h_z^2)^{1/2}}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{h_{zz}}{(1 + h_z^2)^{3/2}}.$$

Сформулированная задача допускает решение следующего вида. Будем предполагать, что в процессе деформации струи ее форма не меняется, т. е. $h_z = 0$. Уравнение неразрывности (1.1), а также граничные условия (1.4) и (1.5) удовлетворяются, если выражения для составляющих скорости жидкости имеют вид

$$u = u_1 = z/\tau, \quad v = v_1 = -r/(2\tau). \quad (1.7)$$

Здесь $\tau = 1 + t$. Уравнения движения жидкости (1.2) и (1.3), а также граничное условие (1.6) выполняются, если радиус струи меняется с течением времени по закону

$$h = h_1 = \tau^{-1/2}, \quad (1.8)$$

а давление жидкости вычисляется по формуле

$$p = p_1 = p_a + \tau^{1/2} + \frac{3 \text{We}}{8\tau^3}(1 - \tau r^2) - \frac{\text{We}}{\text{Re} \tau}. \quad (1.9)$$

Приведенные формулы отличаются от аналогичных формул в работе [4] тем, что в выражении для давления в правой части имеется дополнительное слагаемое.

2. Уравнения для малых возмущений основного течения. Соотношения (1.7)–(1.9) описывают одноосное растяжение жидкой струи, происходящее без изменения формы струи. Будем предполагать, что в начальный момент на это основное течение накладываются малые возмущения:

$$u = u_1 + \delta u, \quad v = v_1 + \delta v, \quad h = h_1 + \delta h, \quad p = p_1 + \delta p. \quad (2.1)$$

Здесь δu , δv , δh , δp — возмущения составляющих скорости жидкости, радиуса струи и давления жидкости, которые предполагаются малыми по сравнению с u_1 , v_1 , h_1 и p_1 соответственно.

Уравнения для малых возмущений основного течения и граничные условия для этих уравнений нетрудно получить, подставляя выражения (2.1) в соотношения (1.1)–(1.6) и отбрасывая слагаемые, содержащие произведения малых величин. Введем функцию тока $\delta\psi$: $r\delta v = \delta\psi_z$, $r\delta u = -\delta\psi_r$, а также величину $\delta\zeta$, пропорциональную завихренности поля скорости жидкости: $\delta\zeta = r(\delta v_z - \delta u_r)$. Уравнение для функции тока $\delta\psi$ следует из линеаризованного уравнения неразрывности, а уравнение для $\delta\zeta$ получается из линеаризованных уравнений движения жидкости путем исключения из них δp . Будем предполагать, что в начальный момент $t = 0$ (т. е. $\tau = 1$) имеется возмущение радиуса струи синусоидального вида. Этому начальному условию можно удовлетворить, если искать величины δh , $\delta\psi$ и $\delta\zeta$ в следующем виде:

$$\delta h = i\tau^{-1/2}\eta(t) \exp(ikz), \quad \delta\psi = r\tau^{-1/2}f(r, t) \exp(ikz), \quad \delta\zeta = r\tau^{-1/2}g(r, t) \exp(ikz).$$

Здесь i — мнимая единица; $k(t)$ — волновое число; множители $\tau^{-1/2}$ и $r\tau^{-1/2}$ введены для удобства. Переменная z исключается из уравнений, если волновое число изменяется с течением времени по закону $k = k_0/\tau$, где $k_0 = k(0)$ — начальное значение волнового числа. Перейдем от переменной r к новой независимой переменной $\xi = r\tau^{1/2}$. Уравнения для нахождения неизвестных величин f и g , следующие из уравнений для $\delta\psi$ и $\delta\zeta$, имеют вид

$$g_{\xi\xi} - \left(\frac{3}{4\xi^2} + \frac{k^2}{\tau} \right) g = \frac{\text{Re}}{\tau} g t; \quad (2.2)$$

$$f_{\xi\xi} - \left(\frac{3}{4\xi^2} + \frac{k^2}{\tau} \right) f = \frac{g}{\tau}. \quad (2.3)$$

Граничные условия на поверхности струи в новых переменных представляют собой условия при $\xi = 1$ и имеют следующий вид:

$$\eta_t = kf; \quad (2.4)$$

$$2k^2f + g = 3k\eta/\tau; \quad (2.5)$$

$$2k^2f_\xi - g_\xi + \operatorname{Re}\left(f_{\xi t} + \frac{1}{2}f_t + \frac{f_\xi}{\tau}\right) = \frac{3k\eta}{2\tau} + \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{We}}(k\tau^{1/2} - k^3\tau^{-1/2})\eta - \frac{3\operatorname{Re}}{8}\left(2k\tau^{-3}\eta + \frac{\eta_t}{k\tau}\right). \quad (2.6)$$

3. Коротковолновая асимптотика решения. Для исследования затухания коротковолновых возмущений в начальный период времени построим коротковолновую асимптотику решения при условии, что начальное значение волнового числа k_0 очень велико ($k_0 \rightarrow \infty$). Такая асимптотика, как и в случае идеальной жидкости [4], не может быть равномерно пригодной при всех значениях t . При построении асимптотических формул будем предполагать, что время t ограничено. Возмущения, длина волны которых очень мала по сравнению с радиусом струи, мало отличаются от капиллярных волн на плоской поверхности. Поэтому решение задачи будем искать в следующем виде:

$$\eta = \exp(\omega_0(\tau)k_0^2 + \omega_1(\tau)k_0)(\eta_0 + k_0^{-1}\eta_1 + \dots); \quad (3.1)$$

$$g = k_0^3 \exp(\omega_0(\tau)k_0^2 + \lambda_1(\xi, \tau)k_0)(g_0 + k_0^{-1}g_1 + \dots), \quad (3.2)$$

а неизвестную функцию f представим в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где f_1 — частное решение неоднородного уравнения (2.3); f_2 — общее решение соответствующего однородного уравнения, причем

$$f_i = k_0 \exp(\omega_0(\tau)k_0^2 + \lambda_i(\xi, \tau)k_0)(f_{i0} + k_0^{-1}f_{i1} + \dots), \quad (3.3)$$

где $i = 1, 2$. Множители k_0^3 и k_0 в правых частях формул (3.2), (3.3) введены потому, что при больших k_0 правая и левая части соотношений (2.3) и (2.4) должны быть величинами одного порядка. Подставляя выражение (3.2) в уравнение (2.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях k_0 , получаем

$$\lambda_{1\xi}^2 - \tau^{-3} = \frac{\operatorname{Re} \omega_{0t}}{\tau}, \quad (3.4)$$

$$2\lambda_{1\xi}g_{0\xi} = \frac{\operatorname{Re} \lambda_{1t}g_0}{\tau}, \quad 2\lambda_{1\xi}g_{1\xi} + g_{0\xi\xi} - \frac{3g_0}{4\xi^2} = \frac{\operatorname{Re}}{\tau}(\lambda_{1t}g_1 + g_{0t}).$$

Из формулы (3.4) следует, что величина $\lambda_{1\xi}$ не зависит от ξ , т. е. λ_1 — линейная функция ξ . Из неоднородного уравнения (2.3) с учетом (3.4) получаем следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} \omega_{0t}f_{10} = g_0, \quad \operatorname{Re} \omega_{0t}f_{11} + \operatorname{Re} \lambda_{1t}f_{10} = g_1, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Re} \omega_{0t}f_{12} + 2\lambda_{1\xi}\tau f_{11\xi} + \tau\left(f_{10\xi\xi} - \frac{3f_{10}}{4\xi^2}\right) = g_2.$$

Из однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (2.3), находим

$$\lambda_{2\xi}^2 = \tau^{-3}, \quad f_{20\xi} = 0, \quad f_{21\xi} = \frac{3f_{20}}{8\xi^2\lambda_{2\xi}}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности струи. На поверхности струи при $\xi = 1$ показатели экспонент в правых частях выражений (3.1)–(3.3) должны совпадать.

Тогда $\lambda_1 = \lambda_{1\xi}(\xi - 1) + \omega_1$, $\lambda_2 = \lambda_{2\xi}(\xi - 1) + \omega_1$. Из граничных условий (2.4), (2.5) следует, что при $\xi = 1$ должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \omega_{0t}\eta_0 &= \frac{1}{\tau}(f_{10} + f_{20}), & \omega_{0t}\eta_1 + \omega_{1t}\eta_0 &= \frac{1}{\tau}(f_{11} + f_{21}), \\ \omega_{0t}\eta_2 + \omega_{1t}\eta_1 + \eta_{0t} &= \frac{1}{\tau}(f_{12} + f_{22}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{2}{\tau^2}(f_{10} + f_{20}) + g_0 = 0, \quad \frac{2}{\tau^2}(f_{11} + f_{21}) + g_1 = 0, \quad \frac{2}{\tau^2}(f_{12} + f_{22}) + g_2 = \frac{3}{\tau^2}\eta_0.$$

Рассмотрим граничное условие (2.6). При больших k_0 слагаемые в правой части (2.6), имеющие наибольший порядок величины, пропорциональны k_0^4/Re . В левой части (2.6) слагаемое, имеющее наибольший порядок величины, при больших k_0 пропорционально $k_0^3 \text{Re}/\text{We}$. Отношение этих двух коэффициентов равно $\text{Re}^2/(\text{We} k_0) = (\rho\sigma/\mu^2)(h_0/k_0)$. Следует отметить, что для возмущений, представляющих интерес с физической точки зрения, этот параметр не является малым несмотря на наличие большой величины k_0 в знаменателе. Действительно, величина h_0/k_0 в 2π раз превышает длину волны возмущения. Вряд ли имеет смысл рассматривать такие возмущения, для которых этот параметр меньше 10^{-5} м. В то же время для обычных маловязких жидкостей, по физическим характеристикам подобным воде, параметр $\rho\sigma/\mu^2$ имеет порядок величины 10^7 м^{-1} . Поэтому параметр $\text{Re}^2/(\text{We} k_0)$ является не малым, а наоборот, большим. Это обстоятельство можно использовать для построения приближенных формул. Введем параметр $\varepsilon = \text{We} k_0/\text{Re}^2$. Будем считать, что этот параметр остается ограниченным при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Тогда, приравняв в левой и правой частях (2.6) слагаемые, имеющие наибольший порядок величины, и преобразуя полученное соотношение с использованием формул (3.5)–(3.7), для величины $\lambda_{1\xi}$ получим следующее алгебраическое уравнение:

$$\varepsilon[(1 + \tau^3 \lambda_{1\xi}^2)^2 - 4\tau^{3/2} \lambda_{1\xi}] = -\tau. \quad (3.8)$$

Рассматривая уравнение (3.8) совместно с обыкновенным дифференциальным уравнением (3.4), для $\omega_0(t)$ можно определить зависимость $\omega_0(t)$. Нетрудно построить приближенное решение, считая параметр ε малым. Введем новую неизвестную величину y : $\tau^{3/2} \lambda_{1\xi} = \varepsilon^{-1/4} y$, и будем искать y в виде ряда $y = y_0 + \varepsilon^{1/2} y_1 + \varepsilon^{3/4} y_2 + \varepsilon y_3 + \dots$. Слагаемое порядка $\varepsilon^{1/4}$ здесь отсутствует, так как в уравнении, которое получается из (3.8) после перехода к переменной y , отсутствует член, пропорциональный y^3 . В результате получим

$$y = y_0 - \frac{1}{2y_0} \varepsilon^{1/2} + \frac{1}{y_0^2} \varepsilon^{3/4} - \frac{1}{8y_0^3} \varepsilon + \dots,$$

где y_0 определяется из уравнения $y_0^4 + \tau = 0$. Тогда с использованием (3.4) получим

$$\omega_{0t} = \frac{1}{\text{Re} \tau^2} \left(y_0^2 \varepsilon^{-1/2} - 2 + \frac{2}{y_0^2} \varepsilon^{1/4} - \frac{1}{y_0^3} \varepsilon^{3/4} + \dots \right).$$

Интегрируя это обыкновенное дифференциальное уравнение, для ω_0 получим выражение

$$\omega_0 = \pm \frac{2i\tau^{-1/2}}{\text{We}^{1/2} k_0^{1/2}} + \frac{2\tau^{-1}}{\text{Re}} + \dots$$

Найдем величину ω_1 . Уравнение для ω_1 получим, приравняв в левой и правой частях (2.6) коэффициенты при k_0^3 и преобразуя полученное соотношение:

$$\omega_{1t} \left(1 + \tau^3 \lambda_{1\xi}^2 - \frac{1}{\tau^{3/2} \lambda_{1\xi}} \right) = -\frac{1}{4} \tau^{7/2} \text{Re} \omega_{0t}^2.$$

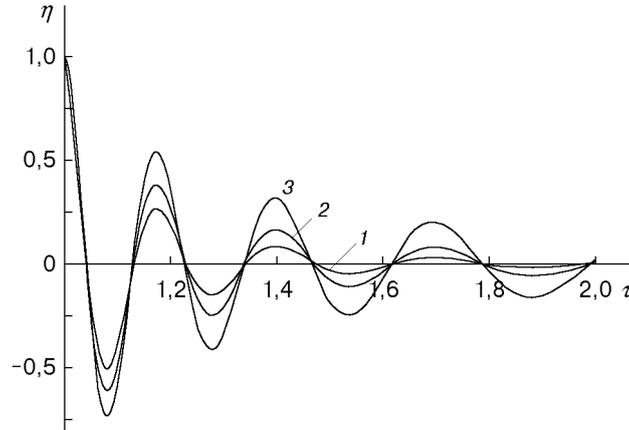


Рис. 1. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи η от времени τ при $k_0 = 12$, $We = 1$:

1 — $Re = 30$, 2 — $Re = 40$, 3 — $Re = 60$

Приближенное решение этого уравнения при малых значениях параметра ε имеет следующий вид:

$$\omega_1 = \pm \frac{i\tau}{4 We^{1/2} k_0^{1/2}} + \frac{2\tau^{1/2}}{Re} + \dots$$

Дифференциальное уравнение для $\eta_0(t)$ чрезвычайно громоздко, поэтому приведем только приближенное выражение, справедливое при малых ε :

$$\eta_{0t} = \eta_0 \left(\mp \frac{19}{32} i \frac{\tau^{3/2}}{We^{1/2} k_0^{1/2}} - \frac{\tau}{4 Re} + \frac{1}{2\tau} + \dots \right).$$

Таким образом, асимптотическая формула, описывающая поведение амплитуды возмущения радиуса растягивающейся струи при больших начальных значениях волнового числа k_0 , имеет следующий вид:

$$\eta = \tau^{1/2} \exp \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{2k_0^2}{\tau} + 2k_0\tau^{1/2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \right) (A \cos \alpha(t) + B \sin \alpha(t)). \quad (3.9)$$

Здесь A и B — постоянные интегрирования; величина $\alpha(t)$ вычисляется по формуле

$$\alpha(t) = \frac{1}{We^{1/2}} \left(\frac{2k_0^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \frac{k_0^{1/2}\tau}{4} + \frac{19\tau^{5/2}}{80k_0^{1/2}} \right).$$

Следует отметить, что при $Re \rightarrow \infty$ полученные выражения согласуются с асимптотическими формулами в работе [4]. На рис. 1–3 приведены зависимости амплитуды возмущения радиуса струи от времени. Зависимость на рис. 1 построена при начальных условиях $\eta(0) = 1$, $\eta_t(0) = 0$ и различных значениях числа Re . Наличие вязкости приводит к затуханию амплитуды колебаний. Затухание происходит тем быстрее, чем меньше значение числа Re . Однако это затухание происходит медленнее, чем затухание возмущений с такой же длиной волны в случае струи постоянного радиуса. Если число Re не слишком мало, то к тому моменту времени, когда можно ожидать начала роста амплитуды возмущений, значение амплитуды, вычисленное по формуле (3.9), не слишком мало. Например, при $\tau = 6$ и значениях параметров $k_0 = 12$, $We = 1$, $Re = 40$ амплитуда возмущения, вычисленная по формуле (3.9) с указанными начальными условиями, $\eta = 0,0128$. Из рис. 2

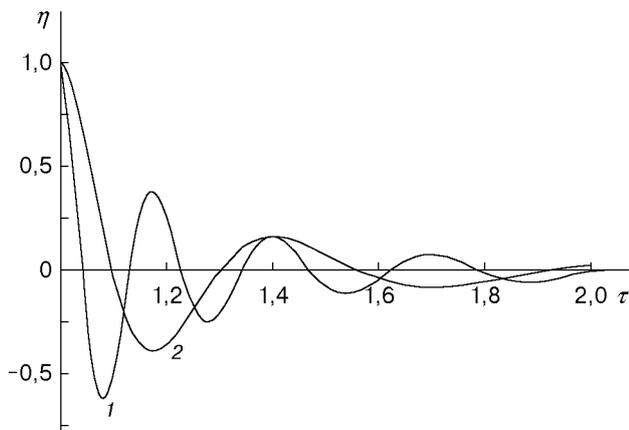


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи η от времени τ при $k_0 = 12$, $Re = 40$:
 1 — $We = 1$, 2 — $We = 2$

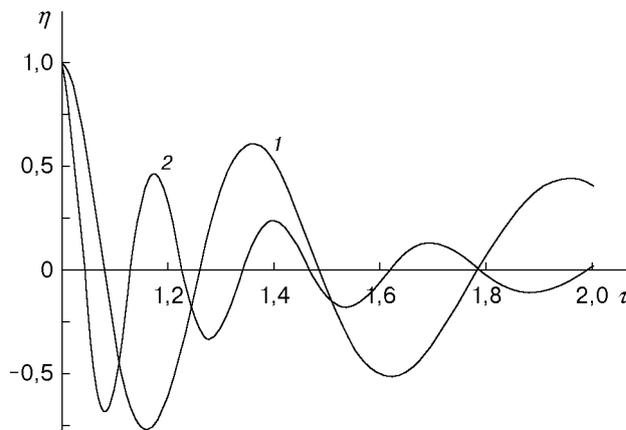


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи η от времени τ при $Re = 50$, $We = 1$:
 1 — $k_0 = 8$, 2 — $k_0 = 12$

следует, что при увеличении числа We уменьшается частота колебаний. При уменьшении начального значения волнового числа скорость затухания возмущений уменьшается (рис. 3). При больших значениях τ полученные асимптотические формулы становятся непригодными. В этом случае решение может быть построено с использованием приближенных одномерных уравнений динамики капиллярной струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tomotika S.** Breaking up of a drop of viscous liquid immersed in another viscous fluid which is extending at uniform rate // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1936. V. 153, N 879. P. 302–318.
2. **Khakhar D. V., Ottino J. M.** Breakup of liquid threads in linear flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13, N 1. P. 71–86.
3. **Андреев В. К.** Об устойчивости нестационарной круглой струи идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1972. № 4. С. 80–84.
4. **Разумовский Н. А., Чесноков Ю. Г.** Капиллярные волны на поверхности растягивающейся цилиндрической струи жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 97–104.

Поступила в редакцию 22/XI 1999 г.,
 в окончательном варианте — 5/XII 2000 г.