$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65Mxx

Метод операторной подгонки с квадратурной формулой Гаусса для параболической сингулярно возмущенной задачи конвекции–диффузии

Д.М. Тефера, А.А. Тирунех, Г.А. Дерезе

Department of Mathematics, Bahir Dar University, Ethiopia

E-mails: dagnmeng@yahoo.com (Тефера Д.М.), awoke248@yahoo.com (Тирунех А.А.), getachewsof@yahoo.com (Дерезе Г.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 15, 2022.

Тефера Д.М., Тирунех А.А., Дерезе Г.А. Метод операторной подгонки с квадратурной формулой Гаусса для параболической сингулярно возмущенной задачи конвекции–диффузии // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 315–328.

В работе рассматривается новая стратегия экспоненциальной операторной подгонки для решения сингулярно возмущенного параболического дифференциального уравнения в частных производных с правым пограничным слоем. Мы дискретизируем временную переменную, используя неявный подход Эйлера, и аппроксимируем наше уравнение в дифференциальное уравнение с запаздыванием первого порядка с малым отклоняющимся аргументом, используя разложение в ряд Тейлора. Для получения трехдиагональной системы уравнений реализуются двухточечная квадратурная формула Гаусса и линейная интерполяция. Эта трехдиагональная система уравнений решается с помощью алгоритма Томаса. Рассматриваются три численных примера, иллюстрирующие эффективность данного метода, и сравниваются с методами, разработанными разными авторами. Анализируется сходимость метода. Для модельных примеров получены абсолютная максимальная ошибка и скорость сходимости. Результат показывает, что данный метод является более точным и ϵ-равномерно сходится для всех $\epsilon \leq h$.

DOI: 10.15372/SJNM20220307

Ключевые слова: *сингулярно возмущенная параболическая задача, квадратурная формула Гаусса, метод операторной подгонки, линейная интерполяция.*

Tefera D.M., Tiruneh A.A., Derese G.A. Fitted operator method over gaussian quadrature formula for parabolic singularly perturbed convection-diffusion problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3. — P. 315–328.

In this manuscript, a new exponentially fitted operator strategy for solving a singularly perturbed parabolic partial differential equation with a right boundary layer is considered. We discretize the time variable using the implicit Euler approach and approximate the equation into first order delay differential equation with a small deviating argument using a Taylor series expansion. The two-point Gaussian quadrature formula and linear interpolation are implemented to obtain a tridiagonal system of equations. The tridiagonal system of equations is solved using the Thomas algorithm. Three numerical examples are considered to illustrate the efficiency of the present method and compared with the methods produced by different authors. Convergence of the method is analyzed. The absolute maximum error and rate of convergence are obtained for the model examples. The result shows that the present method is more accurate and ϵ-uniformly convergent for all $\epsilon \leq h$.

Keywords: *singularly perturbed parabolic problem, gaussian quadrature formula, fitted operator method, linear interpolation.*

1. Введение

Сингулярно возмущенные параболические дифференциальные уравнения в частных производных (СВПДУЧП) конвекции–диффузии представляют собой тип СВПДУЧП, которые имеют, по крайней мере, конвекционные и диффузионные члены. Сингулярно возмущенные параболические задачи играют важную роль в науке и технике. В областях прикладной математики, включающих процессы реакции–диффузии, конвекции–диффузии, добычу нефти, поток подземных вод, перенос растворенных веществ, оценивание опционной цены и другие, эти задачи широко применяются. Например, одномерная модель распределения тепла в стержне, рассмотренная в статье Тесфайе с соавторами [18], задается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) + f(x,t),$$

где $u(x,t)$ — температура в точке x во время t, $\alpha^2 > 0$ — предельная диффузионная способность материала, а $f(x,t)$ — функция источника. Однако аналитические методы не смогут решить все сингулярно возмущенные задачи. В результате были разработаны численные модели для решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Кумар и Кумари [8] пришли к выводу, что классические методы на равномерной сетке не являются достаточными, не обеспечивают хорошей точности и приводят к огромным колебаниям при приближении параметра возмущения к нулю. Авторы [11, 12, 14] показали недостаток классического численного метода решения сингулярно возмущенных задач, обусловленный наличием пограничного слоя. Различные ученые разработали разнообразные численные методы для решения параболических сингулярно возмущенных начально-краевых задач [3, 9, 10, 16].

Башир и Патидар [1] исследовали ϵ-однородный метод операторной подгонки для решения параболического сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с запаздыванием по времени. Тесфайе с соавторами [18] представили численный метод операторной подгонки с усреднением для решения зависящей от времени параболической задачи конвекции–диффузии. Фанеендра и Лалу [13] предложили метод экспоненциальной операторной подгонки с использованием двухточечной квадратурной формулы Гаусса для решения сингулярно возмущенной задачи с разными пограничными слоями (левый, правый, двойной и внутренний). Кадалбаджу и Авасти [6] для зависящих от времени сингулярно возмущенных параболических дифференциальных уравнений в частных производных использовали разностное решение Кранка–Николсона, основанное на усредненной противопотоковой схеме на неравномерной сетке. Кадалбаджу и Авасти [7] предложили стандартную разностную противопотоковую схему со средней точкой для решения зависящих от времени задач конвекции–диффузии в прямоугольной области.

В данной работе решения зависящего от времени сингулярно возмущенного параболического дифференциального уравнения с правым пограничным слоем рассматриваются с использованием метода экспоненциальной операторной подгонки. Мы использовали разложение в ряд Тейлора для преобразования дифференциального уравнения второго порядка в дифференциальное уравнение с запаздыванием первого порядка с малым отклоняющимся аргументом ϵ. Двухточечная квадратурная формула Гаусса применяется к этому дифференциальному уравнению первого порядка для получения коэффициента подгонки и трехдиагональной системы уравнений. Метод имеет почти первый порядок сходимости как по временной, так и по пространственной переменным и является более точным, чем некоторые методы, описанные в литературе.

2. Описание задачи

Рассмотрим параболическую сингулярно возмущенную начально-краевую задачу вида

$$\begin{cases} \epsilon u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u(x,t) - u_t = g(x,t), \\ \quad (x,t) \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = (0,1) \times (0,T], \end{cases} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = s(x)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \gamma_0 \quad \text{и} \quad u(1,t) = \gamma_1.$$

Здесь $0 < \epsilon \ll 1$ — параметр возмущения и $a(x,t)$, $b(x,t)$, $s(x)$, $g(x,t)$ — гладкие ограниченные функции, не зависящие от ϵ на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющие условиям

$$a(x,t) \le \alpha < 0 \quad \text{и} \quad b(x,t) \le \beta < 0. \tag{2}$$

Тогда решение имеет пограничный слой с правой стороны, т. е. при $x = 1$.

Поставим условия совместимости

$$u(0,0) = \gamma_0 \quad \text{и} \quad u(1,0) = \gamma_1.$$

Это означает совпадение данных в двух угловых точках: $(0,0)$ и $(1,0)$. Условия совместимости гарантируют, что существует постоянная M, не зависящая от параметра возмущения такая, что $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$:

$$\begin{cases} |u(x,t) - u(x,0)| \le Mt, \\ |u(x,t)| \le M(1-x). \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство оценки (3) смотри в статье Руса с соавторами [14].

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x,t)$ — любая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая $\varphi(x,t) \ge 0$ для всех $(x,t) \in \partial\Omega$. Тогда $L^\epsilon \varphi(x,t) \le 0$ для всех $(x,t) \in \Omega$ означает, что $\varphi(x,t) \ge 0$ для всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$, где $L^\epsilon \varphi(x,t) \equiv \varphi_{xx} + a(x,t)\varphi_x + b(x,t)\varphi(x,t) - \varphi_t$.*

Доказательство. Предположим, что $(x_*, t_*) \in \overline{\Omega} - \partial\Omega$ такое, что $\varphi(x_*, t_*) = \min_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \varphi(x,t)$, а также предположим, что $\varphi(x_*, t_*) < 0$. Это дает $\varphi_t(x_*, t_*) = 0$, $\varphi_x(x_*, t_*) = 0$ и $\varphi_{xx}(x_*, t_*) \ge 0$, что означает

$$\begin{aligned} L^\epsilon \varphi(x_*, t_*) &= \epsilon\varphi_{xx}(x_*, t_*) + a(x_*, t_*)\varphi_x(x_*, t_*) + b(x_*, t_*)\varphi(x_*, t_*) - \varphi_t(x_*, t_*) \\ &= \epsilon\varphi_{xx}(x_*, t_*) + b(x_*, t_*)\varphi(x_*, t_*) \ge 0. \end{aligned}$$

Мы имеем $L^\epsilon \varphi(x,t) \ge 0$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $\varphi(x_*, t_*) \ge 0$, что приводит к $\varphi(x,t) \ge 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. □

Лемма 2 (Результат устойчивости). *Пусть $u(x,t)$ — решение непрерывной задачи для уравнения* (1). *Тогда*

$$|u(x,t)| \le \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\},$$

где $b(x,t) \le -\mu < 0$ $\forall (x,t) \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\pi^{\pm}$ — двухбарьерная функция, определяемая следующим образом:

$$\pi^{\pm} = \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \pm u(x,t).$$

Тогда

$$\pi^{\pm}(0,0) = \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \pm u(0,0) = \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \pm \gamma_0 \geq 0,$$
$$\pi^{\pm}(1,0) = \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \pm u(1,0) = \mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \pm \gamma_1 \geq 0$$

и

$$\begin{aligned} L^{\epsilon}\pi^{\pm}(x,t) &= \epsilon\pi^{\pm}_{xx}(x,t) + a(x,t)\pi^{\pm}_{x}(x,t) + b(x,t)\pi^{\pm}(x,t) - \pi^{\pm}_{t}(x,t) \\ &= b(x,t)\big(\mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\}\big) \pm L^{\epsilon}u(x,t) \\ &= b(x,t)\big(\mu^{-1}\|g\| + \max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\}\big) \pm g(x,t) \\ &\leq -\big(\|g\| \mp g(x,t)\big) - \mu^{-1}\max\{|\gamma_0|, |\gamma_1|\} \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому, используя лемму 1, мы получим $\pi^{\pm}(x,t) \geq 0 \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. □

Лемма 3. *Производные точного решения $u(x,t)$ уравнения (1) дают следующую границу для $v = 0,1,2$:*

$$\left|\frac{\partial^v u(x,t)}{\partial t^v}\right| \leq M \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

где $M \in \mathbb{R}$ не зависит от ϵ.

Доказательство этой леммы можно найти в [2].

Теорема. *Аналитическое решение уравнения (1) удовлетворяет*

$$\left|\frac{d^i u(x,t)}{dx^i}\right| \leq \left(1 + \epsilon^{-i}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\epsilon}\right)\right), \quad 0 \leq i \leq 4.$$

Доказательство смотри в [4].

3. Формулировка метода

В данном пункте мы получим разностный метод операторной подгонки с использованием квадратурной формулы Гаусса для решения уравнения (1).

3.1. Временная дискретизация

Дискретизуем временную область $[0,T]$ с использованием равномерной сетки с шагом по времени k следующим образом:

$$t_j = jk \ \text{ для } j = 0,1,2,\ldots,n,$$

где $k = \dfrac{T}{n}$ и n — количество подынтервалов в направлении времени.

Используем неявный подход Эйлера для аппроксимации производной по времени уравнения (1), что приводит к системе краевых задач:

$$\epsilon u_{xx}^{j+1} + a\big(x, t^{j+1}\big) u_x^{j+1} + b\big(x, t^{j+1}\big) u^{j+1} - \frac{u^{j+1} - u^j}{k} = g\big(x, t^{j+1}\big).$$

Преобразовывая приведенное выше уравнение, мы получаем

$$\epsilon u_{xx}^{j+1}(x) + a\big(x, t^{j+1}\big) u_x^{j+1}(x) + c\big(x, t^{j+1}\big) u^{j+1}(x) = g\big(x, t^{j+1}\big) - \frac{u^j(x)}{k}, \tag{5}$$

где $c(x, t^{j+1}) = b(x, t^{j+1}) - \frac{1}{k}$.

3.2. Пространственная дискретизация

Разложение в ряд Тейлора $u_x^{j+1}(x+\epsilon)$ дает

$$u_x^{j+1}(x+\epsilon) = u_x^{j+1}(x) + \epsilon u_{xx}^{j+1}(x) + O(\epsilon^2)$$

и означает

$$\epsilon u_{xx}^{j+1}(x) \approx u_x^{j+1}(x+\epsilon) - u_x^{j+1}(x). \tag{6}$$

С использованием уравнения (6) уравнение (5) сводится к дифференциальному уравнению с запаздыванием первого порядка с малым отклоняющимся аргументом:

$$u_x^{j+1}(x+\epsilon) - u_x^{j+1}(x) + a\big(x, t^{j+1}\big) u_x^{j+1}(x) + c\big(x, t^{j+1}\big) u^{j+1}(x) = g\big(x, t^{j+1}\big) - \frac{u^j(x)}{k}. \tag{7}$$

Дискретизуем пространственную область $[0, 1]$ с использованием равномерной сетки с длиной шага h таким образом, что $x_i = ih$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. Интегрируя уравнение (7) относительно x на $[x_{i-1}, x_i]$, имеем

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_x^{j+1}(x+\epsilon)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_x^{j+1}(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} a\big(x, t^{j+1}\big) u_x^{j+1}(x)dx + \\ \qquad \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} c\big(x, t^{j+1}\big) u^{j+1}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g\big(x, t^{j+1}\big)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u^j(x)}{k}\, dx. \end{cases} \tag{8}$$

С использованием двухточечной квадратурной формулы Гаусса [15] имеем

$$\int_{-1}^{1} G(x)dx = G\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + G\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Двухточечная квадратурная формула Гаусса для каждой непрерывной и дифференцируемой функции $G(x)$ в произвольном интервале $[x_{i-1}, x_i]$ принимает следующий вид:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)dx = \frac{h}{2}\Big(G(x_{i-1}+\delta) + G(x_i - \delta)\Big), \tag{9}$$

где $\delta = \dfrac{h\big(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\big)}{2}$.

С использованием уравнения (9) уравнение (8) принимает вид

$$\begin{cases} u^{j+1}(x_i+\epsilon)-u^{j+1}(x_{i-1}+\epsilon)-u^{j+1}(x_i)+u^{j+1}(x_{i-1})+ \\ \qquad a\big(x_i,t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_i)-a\big(x_{i-1},t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_{i-1})- \\ \qquad \dfrac{h}{2}\Big[a'\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_i-\delta)+a'\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_{i-1}+\delta)\Big]+ \\ \qquad \dfrac{h}{2}\Big[c\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_i-\delta)+c\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)u^{j+1}(x_{i-1}+\delta)\Big] \\ \quad =\dfrac{h}{2}\Big[f\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)+f\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\Big]-\dfrac{h}{2k}\Big[u^j(x_i-\delta)+u^j(x_{i-1}+\delta)\Big]. \end{cases} \tag{10}$$

С использованием линейной интерполяции для $u^{j+1}(x_i+\epsilon)$, $u^{j+1}(x_{i-1}+\epsilon)$, $u^{j+1}(x_i-\delta)$, $u^{j+1}(x_{i-1}+\delta)$, $u^j(x_i-\delta)$ и $u^j(x_{i-1}+\delta)$ уравнение (10) принимает вид

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\epsilon}{h}-a\big(x_{i-1},t^{j+1}\big)-a'\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right)+c\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right)\right]u_{i-1}^{j+1}+ \\ \quad \left[\dfrac{-2\epsilon}{h}+a\big(x_i,t^{j+1}\big)-a'\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right)-a'\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right)+\right. \\ \qquad \left. c\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right)+c\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\right]u_i^{j+1}+ \\ \quad \left[\dfrac{\epsilon}{h}+a'\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h}-c\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h}\right]u_{i+1}^{j+1} \\ =\dfrac{h}{2}\left[\Big(f\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)+f\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\Big)-\dfrac{1}{k}\left(\left(1-\dfrac{\delta}{h}\right)u_{i-1}^j+\left(1+\dfrac{2\delta}{h}\right)u_i^j-\left(\dfrac{\delta}{h}\right)u_{i+1}^j\right)\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Преобразуя уравнение (11), мы получим

$$\begin{cases} \dfrac{\epsilon}{h^2}\big(u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}\big)+\dfrac{1}{h}\left[-a\big(x_{i-1},t^{j+1}\big)-a'\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right)+\right. \\ \qquad \left. c\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right)\right]u_{i-1}^{j+1}+\left[a\big(x_i,t^{j+1}\big)-a'\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right)-\right. \\ \qquad \left. a'\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right)+c\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right)+c\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\right]u_i^{j+1}+ \\ \qquad \left[a'\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h}-c\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h}\right]u_{i+1}^{j+1} \\ =\dfrac{1}{2}\left[\Big(f\big(x_i-\delta,t^{j+1}\big)+f\big(x_{i-1}+\delta,t^{j+1}\big)\Big)-\dfrac{1}{k}\left(\left(1-\dfrac{\delta}{h}\right)u_{i-1}^j+\left(1+\dfrac{2\delta}{h}\right)u_i^j-\left(\dfrac{\delta}{h}\right)u_{i+1}^j\right)\right]. \end{cases} \tag{12}$$

Для управления поведением слоя, умножив параметр возмущения ϵ уравнения (12) на экспоненциально подогнанный коэффициент (искусственную вязкость $\sigma(\rho)$), получим

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma(\rho)\epsilon}{h^2}\left(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}\right) + \dfrac{1}{h}\Bigg[- a\big(x_{i-1}, t^{j+1}\big) - a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right) + \\ \quad c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h-\delta}{2}\right)\Bigg] u_{i-1}^{j+1} + \Bigg[a\big(x_i, t^{j+1}\big) - a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right) - \\ \quad a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right) + c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{h+\delta}{2}\right) + c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\Bigg] u_i^{j+1} + \\ \quad \Bigg[a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h} - c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\dfrac{\delta}{h}\Bigg] u_{i+1}^{j+1} \\ = \dfrac{1}{2}\Bigg[\Big(f\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big) + f\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\Big) - \dfrac{1}{k}\Bigg(\Big(1-\dfrac{\delta}{h}\Big)u_{i-1}^j + \left(1+\dfrac{2\delta}{h}\right)u_i^j - \left(\dfrac{\delta}{h}\right)u_{i+1}^j\Bigg)\Bigg]. \end{cases} \tag{13}$$

Значение $\sigma(\rho)$ получаем, следуя книге Дулана с соавторами [5]:

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho a(0, t^{j+1}) \exp\left(\frac{\rho a(m+1, t^{j+1})}{2}\right)}{2\sinh\left(\frac{\rho a(m+1, t^{j+1})}{2}\right)}, \tag{14}$$

где $\rho = \dfrac{h}{\epsilon}$.

Уравнение (13) можно переписать в виде трехдиагональной системы уравнений следующим образом:

$$E_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} + F_i^{j+1} u_i^{j+1} + G_i^{j+1} u_{i+1}^{j+1} = H_i^{j+1}, \tag{15}$$

где

$$E_i^{j+1} = \frac{\sigma\epsilon}{h} - a\big(x_{i-1}, t^{j+1}\big) - a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h-\delta}{2}\right) + c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h-\delta}{2}\right),$$

$$F_i^{j+1} = \frac{-2\sigma\epsilon}{h} + a\big(x_i, t^{j+1}\big) - a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h+\delta}{2}\right) - a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{\delta}{2}\right) + \\ c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h+\delta}{2}\right) + c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

$$G_i^{j+1} = \frac{\sigma\epsilon}{h} + a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\frac{\delta}{h} - c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\frac{\delta}{h},$$

$$H_i^{j+1} = \frac{h}{2}\left[\big(f^{j+1}(x_i-\delta) + f^{j+1}(x_{i-1}+\delta)\big) - \frac{1}{k}\left(\left(1-\frac{\delta}{h}\right)u_{i-1}^j + \left(1+\frac{2\delta}{h}\right)u_i^j - \left(\frac{\delta}{h}\right)u_{i+1}^j\right)\right].$$

Систему уравнений (15) можно легко решить с помощью алгоритма Томаса.

4. Анализ сходимости

В этом пункте мы рассмотрим анализ ошибок предложенного метода и докажем, что он обеспечивает точность первого порядка на равномерной сетке. Матрично-векторное представление трехдиагональной системы уравнений (15) на временном уровне $(j+1)$ задается следующим образом:

$$Au^{j+1} = B, \tag{16}$$

$$A = \begin{bmatrix} F_1^{j+1} & G_1^{j+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_2^{j+1} & F_2^{j+1} & G_2^{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_3^{j+1} & F_3^{j+1} & G_3^{j+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & E_{m-1}^{j+1} & F_{m-1}^{j+1} \end{bmatrix}$$

и

$$B = \left[H_1^{j+1} - E_1^{j+1}\gamma_0, H_2^{j+1}, \ldots, H_{m-2}^{j+1}, H_{m-1}^{j+1} - G_{m-1}^{j+1}\gamma_1\right]^t,$$

где

$$E_i^{j+1} = \frac{\sigma\epsilon}{h} - a\big(x_{i-1}, t^{j+1}\big) - a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h-\delta}{2}\right) + c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h-\delta}{2}\right),$$

$$F_i^{j+1} = \frac{-2\sigma\epsilon}{h} + a\big(x_i, t^{j+1}\big) - a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h+\delta}{2}\right) - a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{\delta}{2}\right) + c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{h+\delta}{2}\right) + c\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

$$G_i^{j+1} = \frac{\sigma\epsilon}{h} + a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\frac{\delta}{h} - c\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big)\frac{\delta}{h},$$

$$H_i^{j+1} = \frac{h}{2}\left[\big(f^{j+1}(x_i-\delta) + f^{j+1}(x_{i-1}+\delta)\big) - \frac{1}{k}\left(\left(1-\frac{\delta}{h}\right)u_{i-1}^j + \left(1+\frac{2\delta}{h}\right)u_i^j - \left(\frac{\delta}{h}\right)u_{i+1}^j\right)\right],$$

для $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Пусть T^{j+1} — локальная ошибка усечения на временном уровне $(j+1)$ в предлагаемой схеме:

$$T^{j+1} = -\frac{h}{2}\Big(a'\big(x_i-\delta, t^{j+1}\big) + a'\big(x_{i-1}+\delta, t^{j+1}\big)\Big)u_{xx,i}^{j+1} + \frac{k}{2}u_{tt,i}^{j+1} + O(h^2+k^2). \tag{17}$$

Мы также имеем

$$A\bar{U}^{j+1} - T^{j+1} = B, \tag{18}$$

где $\bar{U}^{j+1} = \big[\bar{U}_1^{j+1}, \bar{U}_2^{j+1}, \ldots, \bar{U}_{m-1}^{j+1}\big]^t$ — фактическое решение и $T^{j+1} = \big[T_1^{j+1}, T_2^{j+1}, \ldots, T_{m-1}^{j+1}\big]^t$ — локальная ошибка усечения.

Из уравнений (16) и (18) получим

$$A\big(\bar{U}^{j+1} - u^{j+1}\big) = T^{j+1}. \tag{19}$$

В результате получаем уравнение ошибки

$$Ae^{j+1} = T^{j+1}, \tag{20}$$

где $e^{j+1} = \big(\bar{U}^{j+1} - u^{j+1}\big) = \big(e_1^{j+1}, e_2^{j+1}, \ldots, e_{m-1}^{j+1}\big)^t$.

Пусть S_i^{j+1} — сумма элементов i-й строки для $(j+1)$ временного уровня A. Тогда мы имеем

$$S_1^{j+1} = \sum_{w=1}^{m-1} A_{1,w} = F_1^{j+1} + G_1^{j+1} \quad \text{для } i = 1,$$
$$S_i^{j+1} = \sum_{w=1}^{m-1} A_{i,w} = E_i^{j+1} + F_i^{j+1} + G_i^{j+1} \quad \text{для } i = 2, \dots, m-2,$$
$$S_{m-1}^{j+1} = \sum_{w=1}^{m-1} A_{m-1,w} = E_{m-1}^{j+1} + F_{m-1}^{j+1} \quad \text{для } i = m-1.$$

Поскольку $0 < \epsilon \ll 1$, для данного малого h матрица A является неприводимой и монотонной [17]. Следовательно, существует A^{-1} и $A^{-1} \geq 0$.

Из уравнения (20) имеем

$$e^{j+1} = A^{-1} T^{j+1} \tag{21}$$

и

$$\|e^{j+1}\| \leq \|A^{-1}\| \|T^{j+1}\|. \tag{22}$$

Пусть $D_{z,i}$ — (z, i)-й элемент A^{-1} для временного уровня $(j+1)$. Поскольку $D_{z,i} \geq 0$, из теории умножения матриц на обратные матрицы имеем

$$\sum_{i=1}^{m-1} D_{z,i} S_i^{j+1} = 1 \text{ для } z = 1, 2, \dots, m-1. \tag{23}$$

Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} D_{z,i} \leq \frac{1}{\min\limits_{1 \leq i \leq m-1} S_i^{j+1}}.$$

Теперь определим

$$\|A^{-1}\| = \max_{1 \leq z \leq m-1} \sum_{i=1}^{m-1} |D_{z,i}|$$

и $\|T\| = \max_{1 \leq z \leq m-1} |T_i|$.

Из уравнений (21) и (23) получим

$$e_v = \sum_{i=1}^{m-1} D_{z,i} T_i; \quad v = 1, 2, \dots, m-1.$$

Это означает

$$e_v \leq \frac{T_i}{\min\limits_{1 \leq i \leq m-1} S_i^{j+1}}; \quad v = 1, 2, \dots, m-1. \tag{24}$$

Используя уравнения (22) и (24), мы получим

$$\|e\| = O(h + k).$$

Таким образом, предлагаемый метод является методом сходимости первого порядка.

5. Численные примеры

Для проверки эффективности схемы мы выполнили численный анализ трех модельных примеров для различных значений шага сетки и параметра возмущения $\epsilon \le h$. Абсолютная максимальная ошибка $E_\epsilon^{M,N}$ и скорость сходимости $R^{M,N}$ представлены в таблицах 1, 3 и 5.

Мы использовали принцип двойной сетки для оценки абсолютной максимальной ошибки данного подхода, когда точное решение данной задачи неизвестно. Мы использовали следующую формулу для аппроксимации абсолютной максимальной ошибки в выбранных точках сетки:
случай 1) если точное решение известно, $E_\epsilon^{M,N} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\Omega} \left|u(x_i,t_j) - u_i^j\right|$.
случай 2) если точное решение неизвестно, $E_\epsilon^{M,N} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\Omega} \left|\left(u_i^j\right)^{M,N} - \left(u_i^j\right)^{2M,2N}\right|$.

Также оценим соответствующую скорость сходимости $R^{M,N} = \dfrac{\log E_\epsilon^{M,N} - \log E_\epsilon^{2M,2N}}{\log 2}$.

Пример 1. Пусть $a(x,t) = (x^2-2)$, $b(x,t) = -x$, $g(x,t) = -10t^2e^{-t}x(1-x)$, где $(x,t) \in (0,1)\times(0,2]$, с учетом начальных и граничных условий

$$u(x,0) = 0 \ \text{ для } 0 \le x \le 1 \qquad \text{и} \qquad u(0,t) = 0 = u(1,t) \ \text{ для } 0 \le t \le 2.$$

Таблица 1. Максимальная абсолютная поточечная ошибка и скорость сходимости для примера 1

$\epsilon\downarrow M,\, N \longrightarrow$	16, 20	32, 40	64, 80	128, 160	256, 320
10^{-4}	8.7151e−03 0.8422	4.8612e−03 0.9132	2.5814e−03 0.9543	1.3322e−03 0.9765	6.7703e−04
10^{-8}	8.7151e−03 0.8422	4.8612e−03 0.9132	2.5814e−03 0.9543	1.3322e−03 0.9765	6.7703e−04
10^{-12}	8.7151e−03 0.8422	4.8612e−03 0.9132	2.5814e−03 0.9543	1.3322e−03 0.9765	6.7703e−04
10^{-16}	8.7151e−03 0.8422	4.8612e−03 0.9132	2.5814e−03 0.9543	1.3322e−03 0.9765	6.7703e−04
10^{-20}	8.7151e−03 0.8422	4.8612e−03 0.9132	2.5814e−03 0.9543	1.3322e−03 0.9765	6.7703e−04
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_\epsilon^{M,N}$	8.7151e−03	4.8612e−03	2.5814e−03	1.3322e−03	6.7703e−04
$R^{M,N}$	0.8422	0.9132	0.9543	0.9765	

Таблица 2. Сравнение абсолютных максимальных ошибок для примера 1

$\epsilon\downarrow$ M, N $\longrightarrow$	16, 20	32, 40	64, 80	128, 160	256, 320
данный метод					
10^{-6}	8.7151e−03	4.8612e−03	2.5814e−03	1.3322e−03	6.7703e−04
10^{-12}	8.7151e−03	4.8612e−03	2.5814e−03	1.3322e−03	6.7703e−04
Кадалбаджу и Авасти [7]					
10^{-6}	3.2170e−02	2.0804e−02	1.4020e−02	9.73443e−03	6.3763e−03
10^{-12}	3.2168e−02	2.0803e−02	1.4019e−02	9.7337e−03	6.3759e−03
Кадалбаджу и Авасти [6]					
10^{-6}	3.4057e−02	1.8672e−02	1.2543e−02	7.9859e−03	4.9446e−03
10^{-12}	3.4056e−02	1.8671e−02	1.2542e−02	7.9853e−03	4.944e−03

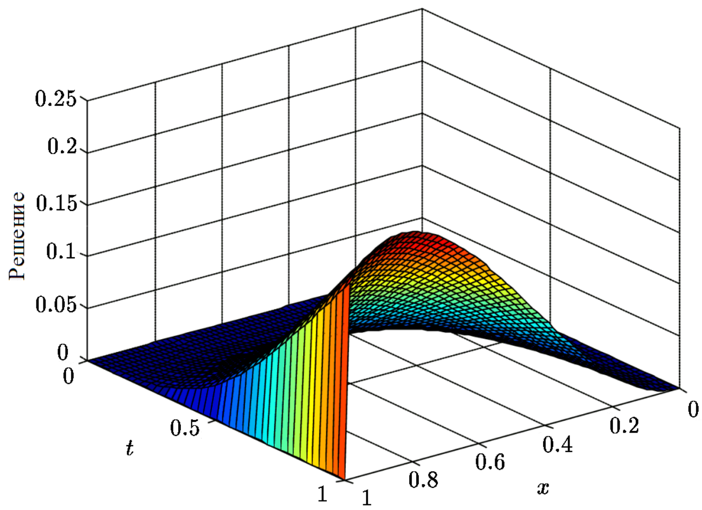

Рис. 1. Физическое поведение решений для примера 1 для $M = 64$, $N = 40$ и $\epsilon = 10^{-8}$

Пример 2. Пусть $a(x,t) = (x^2-2)$, $b(x,t) = -x^2-1-\cos(\pi x)$, $g(x,t) = -10t^2e^{-t}x(1-x)$, где $(x,t) \in (0,1)\times(0,2]$, с учетом начальных и граничных условий

$$u(x,0) = 0 \ \text{ для } \ 0 \le x \le 1 \ \text{ и } \ u(0,t) = 0 = u(1,t) \ \text{ для } \ 0 \le t \le 2.$$

Таблица 3. Максимальная абсолютная поточечная ошибка и скорость сходимости для примера 2

$\epsilon \downarrow M,\ N \longrightarrow$	16, 20	32, 40	64, 80	128, 160	256, 320
10^{-4}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
10^{-8}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
10^{-12}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
10^{-16}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
10^{-20}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_\epsilon^{M,N}$	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
$R^{M,N}$	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	

Таблица 4. Сравнение абсолютных максимальных ошибок и скорости сходимости для примера 2

$\epsilon \downarrow M,\ N \longrightarrow$	16, 20	32, 40	64, 80	128, 160	256, 320
данный метод					
10^{-6}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
10^{-12}	8.0869e−03	4.5066e−03	2.3966e−03	1.2384e−03	6.2983e−04
$R^{M,N}$	0.8436	0.9111	0.9525	0.9754	
Кадалбаджу и Авасти [7]					
10^{-6}	2.5346e−02	1.3953e−02	9.1790e−03	5.7665e−03	3.5602e−03
10^{-12}	2.5346e−02	1.3952e−02	9.1785e−03	5.7661e−03	3.5600e−03
$R^{M,N}$	0.8612	0.6041	0.6707	0.6957	

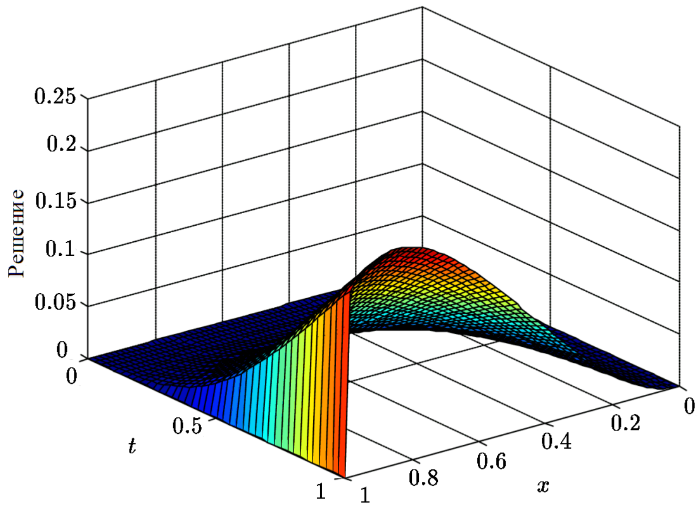

Рис. 2. Для примера 2 физическое поведение решений для $M = 64$, $N = 40$ и $\epsilon = 10^{-8}$

Пример 3. Пусть $a(x,t) = -1 - x - x^2$, $b(x,t) = -1 - x^2$, $g(x,t) = \sin(\pi x(1-x))$, где $(x,t) \in (0,1) \times (0,1]$, с учетом начальных и граничных условий

$$u(x,0) = 0 \quad \text{для } 0 \le x \le 1$$

и

$$u(0,t) = 0 = u(1,t) \quad \text{для } 0 \le t \le 1.$$

Таблица 5. Максимальная абсолютная поточечная ошибка и скорость сходимости для примера 3

$\epsilon \downarrow M,N \longrightarrow$	16, 20	32, 40	64, 80	128, 160	256, 320
10^{-2}	6.5460e−03	3.7688e−03	2.0886e−03	1.1386e−03	6.0254e−04
	0.7965	0.8516	0.8752	0.9181	
10^{-4}	6.5466e−03	3.8014e−03	2.1204e−03	1.1583e−03	6.1577e−04
	0.7842	0.8422	0.8723	0.9115	
10^{-8}	6.5466e−03	3.8014e−03	2.1204e−03	1.1583e−03	6.1577e−04
	0.7842	0.8422	0.8723	0.9115	
10^{-12}	6.5466e−03	3.8014e−03	2.1204e−03	1.1583e−03	6.1577e−04
	0.7842	0.8422	0.8723	0.9115	
10^{-16}	6.5466e−03	3.8014e−03	2.1204e−03	1.1583e−03	6.1577e−04
	0.7842	0.8422	0.8723	0.9115	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_\epsilon^{M,N}$	6.5466e−03	3.8014e−03	2.1204e−03	1.1583e−03	6.1577e−04
$R^{M,N}$	0.7842	0.8422	0.8723	0.9115	

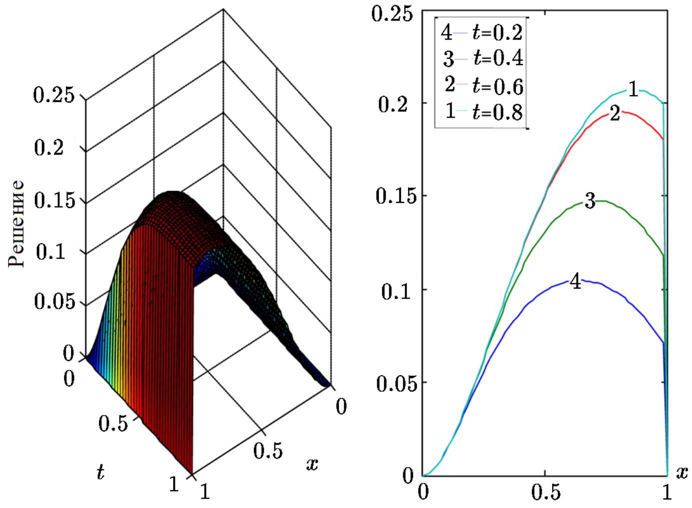

Рис. 3. Физическое поведение и линии уровня решений для примера 3 для $M = 32$, $N = 40$ и $\epsilon = 10^{-6}$

В этом исследовании представлен метод экспоненциальной операторной подгонки для решения сингулярно возмущенного параболического дифференциального уравнения в частных производных с начальными граничными условиями. Основные математические процедуры — формулирование модельной задачи, аппроксимация временной переменной с использованием неявного метода Эйлера, аппроксимация дифференциального уравнения второго порядка в дифференциальное уравнение с запаздыванием первого порядка с использованием малого отклоняющегося аргумента ϵ, а затем применение двухточечной квадратурной формулы Гаусса и линейной интерполяции для приведения к трехдиагональной системе уравнений и, наконец, использование алгоритма Томаса для решения системы уравнений.

Три модельных примера используются для проверки применимости предлагаемого метода. Максимальные ошибки и скорости сходимости представлены в табл. 1, 3 и 5 при различных значениях $\epsilon \leq h$. Сравнение с другими методами, описанными в литературе, дано в табл. 2 и 4. Физическое поведение решения показано на рис. 1–3. Показано, что метод является ϵ-равномерно сходящимся с порядком сходимости $O(h + k)$. Текущий метод является более точным, чем некоторые описанные в литературе методы.

Литература

1. **Bashier E., Patidar K.** A novel fitted operator finite difference method for a singularly perturbed delay parabolic partial differential equation // Appl. Math. Comp. — 2011. — Vol. 217, iss. 9. — P. 4728–4739.

2. **Chakravarthy P., Kumar S.D., and Rao R.** An exponentially fitted finite difference scheme for a class of singularly perturbed delay differential equations with large delays // Ain Shams Engineering J. — 2017. — Vol. 8, iss. 4. — P. 663–671.

3. **Chakravarthy P.P., Kumar K.** An adaptive mesh method for time dependent singularly perturbed differential-difference equations // Nonlinear Engineering. — 2019. — Vol. 8. — P. 328–339.

4. **Clavero C., Gracia J.L.** A higher order uniformly convergent method with Richardson extrapolation in time for singularly perturbed reaction-diffusion parabolic problems // J. Comp. Appl. Math. — 2013. — Vol. 252. — P. 75–85.
5. **Doolan E., Miller J., and Schilders W.** Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. — Dublin: Boole Press, 1980.
6. **Kadalbajoo M.K., Awasthi A.** Crank–Nicolson finite difference method based on a midpoint upwind scheme on a non-uniform mesh for time-dependent singularly perturbed convection-diffusion equations // Intern. J. Comp. Math. — 2008. — Vol. 85. — P. 771–790.
7. **Kadalbajoo M.K., Awasthi A.** The midpoint upwind finite difference scheme for time-dependent singularly perturbed convection-diffusion equations on non-uniform mesh // Intern. J. Comp. Meth. Engineering Science and Mechanics. — 2011. — Vol. 12, iss. 3. — P. 150–159.
8. **Kumar D., Kumari P.** A parameter-uniform numerical scheme for the parabolic singularly perturbed initial boundary value problems with large time delay // J. Appl. Math. Comp. — 2019. — Vol. 59. — P. 179–206.
9. **Kumar K., Gupta T. et al.** An Adaptive Mesh Selection Strategy for Solving Singularly Perturbed Parabolic Partial Differential Equations with a Small Delay // Appl. Math. Scientific Comp. — Springer, 2019.
10. **Linβ T., Stynes M.** A hybrid difference scheme on a Shishkin mesh for linear convection-diffusion problems // Applied Numerical Mathematics. — 1999. — Vol. 31. — P. 255–270.
11. **Miller J., O'Riordan E., and Shishkin G.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. — World Scientific, 2012.
12. **O'Malley R.E.** Historical Developments in Singular Perturbations. — Springer, 1974.
13. **Phaneendra D., Lalu M.** Gaussian quadrature for two-point singularly perturbed boundary value problems with exponential fitting // Communications in Mathematics and Applications. — 2019. — Vol. 10, № 3. — P. 447–467.
14. **Roos Hans-G., Stynes M., Tobiska L.** Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations // Springer Series in Computational Mathematics. — Springer, 2008.
15. **Sastry S.** Introductory Methods of Numerical Analysis. 5th Ed. — New Delhi, 2012.
16. **Singh J., Kumar S., and Kumar M.** A domain decomposition method for solving singularly perturbed parabolic reaction-diffusion problems with time delay // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2018. — Vol. 34, iss. 5. — P. 1849–1866.
17. **Swamy D.K., Phaneendra K., and Reddy Y.** A fitted non standard finite difference method for singularly perturbed differential difference equations with mixed shifts // J. Afrikana. — 2016. — Vol. 3, iss. 4. — P. 1–20.
18. **Tesfaye A.B., Gemechis F.** Fitted operator average finite difference method for solving singularly perturbed parabolic convection-diffusion problems // Intern. J. Engineering and Appl. Sciences. — 2019. — Vol. 11, iss. 3. — P. 414–427.

Поступила в редакцию 06 ноября 2021 г.
После исправления 14 декабря 2021 г.
Принята к печати 24 апреля 2022 г.