

О НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКЕ.
СЛАБЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

П. Ф. Коротков

(Москва)

В геометрической акустике положение лучей определяется только средой. Интенсивность волны находится из условия постоянства энергии элемента волны при его движении по лучевой трубке [1,2].

Распространение слабых ударных волн отличается от распространения волн в акустическом приближении тем, что возникают нелинейные эффекты, которые проявляются в диссиляции энергии на фронте ударной волны и в искривлении лучей при изменении давления вдоль фронта.

В предыдущих работах учитывались либо только эффекты диссиляции [3–5], либо только эффекты дополнительного искривления лучей [5–8]. Последние рассматривались только в однородной среде.

Ниже учитываются одновременно оба этих нелинейных эффекта, влияющих на распространение слабых ударных волн в неоднородной движущейся среде.

В § 1–3 получена замкнутая система уравнений нелинейной геометрической акустики, в § 4 эта система рассмотрена для случая, когда изменения скорости звука и скорость движения среды малы. В § 5 выведены условия на поверхности разрыва функций. В § 6–8 получены некоторые решения системы уравнений нелинейной геометрической акустики.

§ 1. Пусть $f(x_i, t) = 0$ есть уравнение поверхности фронта ударной волны в неподвижной системе координат. Дифференцируя, получим

$$n_i dx_i + \frac{dt}{\sqrt{(\partial f / \partial x_k)^2}} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь n_i — единичный вектор нормали к фронту ударной волны

$$n_i = \frac{\partial f / \partial x_i}{\sqrt{(\partial f / \partial x_k)^2}} \quad (1.2)$$

В (1.1) величина $n_i dx_i$ есть смещение поверхности в направлении нормали за время dt . Это смещение происходит за счет того, что поверхность движется относительно среды со скоростью D в направлении нормали и сносится ветром со скоростью w_i , т. е. скорость элемента волны V_i , которая называется лучевой скоростью, равна

$$V_i = D n_i + w_i \quad (1.3)$$

Здесь для векторов и координат применяются тензорные обозначения. Величины i, k принимают значения 1, 2, 3. В направлении нормали поверхность смещается со скоростью $V_i n_i$, так что получим

$$n_i dx_i = (D + n_i w_i) dt \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим уравнение для искомой поверхности фронта ударной волны

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2} = 0 \quad \begin{pmatrix} w_i = w_i(x_k) \\ c = c(x_k) \\ D = D(x_k) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Отметим, что скорость ударной волны D , в отличие от акустического приближения, зависит от интенсивности волны

$$D = Mc, \quad M = \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{p'}{\rho c^2}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.6)$$

Здесь c — скорость звука в среде, ρ — плотность среды, p' — разность между давлением на фронте ударной волны и давлением перед ним.

Интегрирование уравнения (1.5) сводится к интегрированию характеристической системы уравнений, которую запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= Mcn_i + w_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) &= - \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2} \left(M \frac{\partial c}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + c \frac{\partial M}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из первого уравнения следует соотношение, связывающее производную по времени вдоль луча и производную по координатам

$$\frac{d}{dt} = (Mc n_i + w_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.8)$$

Второе уравнение (1.7) преобразуем к более удобному виду при помощи (1.2)

$$\frac{dn_i}{dt} = (n_i n_k - \delta_{ik}) \left(M \frac{\partial c}{\partial x_k} + n_l \frac{\partial w_l}{\partial x_k} + c \frac{\partial M}{\partial x_k} \right) \quad (1.9)$$

$$\delta_{ik} = 1 \text{ при } i = k, \quad \delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k$$

Таким образом, в уравнение, которое определяет направление лучей, по сравнению с геометрической акустикой добавился еще один член $c \partial M / \partial x_k$. В акустическом приближении $M \equiv 1$, и этот член равен нулю.

Так как величина M зависит от давления в ударной волне, которое заранее неизвестно, то уравнения (1.9) недостаточно для определения направления лучей. Нужно еще дополнительное соотношение.

§ 2. Для получения недостающего соотношения будем рассматривать короткие волны и предположим, что движение газа за фронтом ударной волны происходит по лучам, образованным фронтом.

В этом приближении вдоль каждой лучевой трубки происходит одномерное движение, начинающееся ударным фронтом. Для этого одномерного течения в канале с переменной площадью можно написать уравнения газовой динамики, которые должны решаться совместно с уравнением (1.9), так как положение и площадь каждой лучевой трубки заранее неизвестны и определяются одновременно с давлением на фронте. Таким образом, взаимодействие соседних участков ударной волны происходит в рассматриваемом приближении только через фронт ударной волны. Такое лучевое приближение можно сделать для ударных волн любой интенсивности.

Ниже рассматриваются только слабые ударные волны $p' \ll \rho c^2$ с треугольным профилем давления, для которых получаются более простые уравнения. Для таких волн решение можно получить в явном виде, если положение лучей определяется только свойствами среды [3–5]

$$p' = \frac{a V \rho c}{L} \left(\int_{l_*}^l \frac{dl}{L q q_n V \rho c} \right)^{-1/2}, \quad \lambda = \frac{\gamma+1}{2} a q_n \left(\int_{l_*}^l \frac{dl}{L q q_n V \rho c} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

$$L = \left(1 + \frac{w_i n_i}{c}\right) V S, \quad q = V (c n_i + w_i)^2, \quad q_n = c + n_i w_i$$

Здесь l — расстояние вдоль луча, λ — длина положительной фазы волны по нормали к фронту, S — площадь фронта волны, заключенной в лучевой трубке, a и l_* — постоянные, определяемые по начальным данным.

Исключая из этих соотношений a и l_* , получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{p'^2 S}{\rho c} \left(1 + \frac{w_i n_i}{c} \right)^2 \right] = -\frac{\gamma+1}{2} \frac{p'^3 S}{\rho^2 c^2 \lambda} \left(1 + \frac{w_i n_i}{c} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{c + w_i n_i} \frac{d}{dt} (c + w_i n_i) + \frac{\gamma+1}{4} \frac{p'}{\rho c} \quad (2.3)$$

Применим эти уравнения к слабой ударной волне, распространяющейся по лучам, определяемым уравнением (1.9). Таким образом, будем считать, что в начальный момент волна имеет треугольный профиль давления. Уравнения (2.1) — (2.3) показывают, что в рассматриваемом приближении профиль остается треугольным и в течение всего времени движения вдоль луча.

Отметим, что треугольный профиль рассматривается в качестве начального профиля не случайно. Дело в том, что когда положение лучей не зависит от интенсивности волны, профиль давления слабых ударных волн на большом расстоянии от источника стремится к треугольному, независимо от начального распределения давления [9–10]. В частности, слабые ударные волны, вызванные взрывом, имеют треугольный профиль положительной фазы ($p' > 0$).

Уравнение (2.2) имеет простой физический смысл [11]. В акустическом приближении в его правой части стоит нуль, так что вдоль луча сохраняется величина, стоящая в левой части, которая пропорциональна энергии элемента волны. В нелинейной геометрической акустике энергия волны уменьшается за счет диссипации на фронте, но влияние этой диссипации на величину давления зависит от длины волны: чем длиннее волна, тем меньше это влияние.

Уравнение (2.3) описывает изменение длины ударной волны.

§ 3. В рассматриваемом случае, когда лучи искривляются из-за изменения давления вдоль фронта ударной волны, величина площади лучевой трубы S неизвестна и должна быть определена при помощи уравнения (1.9). Для этого найдем связь между S и n_i .

Применим формулу Остроградского — Гаусса к вектору V_i / Mc и объему внутри лучевой трубы

$$\iiint_T \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{V_i}{Mc} d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{V_k d\sigma_k}{Mc} \quad (3.1)$$

Здесь T , Σ — объем и поверхность лучевой трубы, $d\tau$ и $d\sigma_k$ — малые элементы объема и поверхности. Рассмотрим малый отрезок лучевой трубы длиной dl и площадью нормального сечения σ . Так как $T = \sigma dl$ и $dl = |\mathbf{V}| dt$, то из (3.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{V_i}{Mc} = \frac{1}{\sigma |\mathbf{V}|} \frac{d}{dt} \frac{\sigma |\mathbf{V}|}{Mc} \quad (3.2)$$

Используя соотношение $\sigma |\mathbf{V}| = SV_i n_i$, получим

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = Mc \frac{\partial}{\partial x_i} \left(n_i + \frac{w_i}{Mc} \right) - \frac{Mc}{Mc + w_i n_i} \frac{d}{dt} \frac{w_i n_i}{Mc} \quad (3.3)$$

Величины p' и M связаны между собой соотношением (1.6), которое для слабых ударных волн запишем в виде

$$p' = \frac{4}{\gamma+1} \rho c^2 m, \quad m = M - 1, \quad m \ll 1 \quad (3.4)$$

Сделаем замену переменных согласно этим формулам в уравнениях (1.8), (1.9), (2.2), (2.3) и (3.3) и учтем, что величина m мала по сравне-

нию с единицей. После таких преобразований получим систему уравнений нелинейной геометрической акустики в окончательном виде

$$\begin{aligned} \left(n_k + \frac{w_k}{c} \right) \frac{\partial n_i}{\partial x_k} - (n_i n_k - \delta_{ik}) \frac{\partial m}{\partial x_k} = \\ = (n_i n_k - \delta_{ik}) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x_k} + \frac{n_l}{c} \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right) \quad (n_i^2 = 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} 2 \left(n_k + \frac{w_k}{c} \right) \frac{\partial m}{\partial x_k} + m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(n_k + \frac{w_k}{c} \right) = \\ = -m \left(n_k + \frac{w_k}{c} \right) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \frac{3}{c} \frac{\partial c}{\partial x_k} + \frac{c}{c + w_l n_l} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{w_i n_i}{c} \right) \right] - \frac{2m^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\left(n_k + \frac{w_k}{c} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = \frac{cn_k + w_k}{c + w_i n_i} \frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial x_k} (c + w_i n_i) + m \quad (3.7)$$

Здесь n_i , m и λ — неизвестные величины, а величины c , w_k , ρ — функции координат и должны быть заданы; они определяют состояние невозмущенной среды.

Таким образом, в нелинейной геометрической акустике уравнение для определения направления лучей (2.5) оказалось связано с уравнениями для определения интенсивности волн (3.6), (3.7). Эта связь существует из-за наличия второго члена в левой части уравнения (3.5). В том случае, когда градиенты давления малы по сравнению с градиентами скорости звука и скорости ветра, этим членом можно пренебречь, тогда уравнение лучей (3.5) перестает зависеть от уравнений (3.6), (3.7), и его можно интегрировать отдельно. В свою очередь, уравнения (3.6), (3.7) в этом случае интегрируются и приобретают вид (2.1).

§ 4. Скорость звука в атмосфере изменяется незначительно вплоть до высоты примерно 100 км, так что можно принять

$$c = c_0 + c'(x_i), \quad c_0 = \text{const}, \quad c' \ll c_0 \quad (4.1)$$

Скорость ветра обычно мала по сравнению со скоростью звука, и поэтому тоже можно принять

$$w_k(x_i) \ll c_0 \quad (4.2)$$

При условиях (4.1), (4.2) система (3.5)–(3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} - (n_i n_k - \delta_{ik}) \frac{\partial m}{\partial x_k} = (n_i n_k - \delta_{ik}) \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial c}{\partial x_k} + \frac{n_l}{c_0} \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right) \\ 2n_k \frac{\partial m}{\partial x_k} + m \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = -\frac{n_k}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} m - \frac{2m^2}{\lambda}, \quad n_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = m \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь будем рассматривать случаи, когда начальные данные облашают цилиндрической симметрией, и скорость звука, скорость ветра и плотность воздуха зависят только от одной координаты z , направленной оси симметрии.

При наличии ветра первоначальная симметрия ударной волны не будет сохраняться при движении волны, так как лучи изгибаются не только по направлению к плоскости $z = 0$ (которой, допустим, соответствует поверхность земли), но и в сторону. Однако, как следует из анализа уравнений (4.3), эти отклонения в сторону почти не влияют на изменения давления в волне (эти изменения — второго порядка малости по сравнению с изменениями давления из-за искривления луча по направлению к земле). Это имеет место потому, что соседние лучи тоже отклоняются в сторону примерно на такую же величину, поэтому изменения площади лучевых

трубок при таком отклонении малы. Следовательно, мало изменение давления. Главное значение имеет искривление луча по направлению к земле. Луч, идущий вдоль земли, не может отклониться. Поэтому здесь происходит сильное изменение относительного положения лучей и сильное изменение давления. Таким образом, в уравнениях можно учесть только то значение проекции скорости ветра, которое приводит к изгибу лучей к земле (или от земли). Уравнение, определяющее отклонение луча в сторону, т. е. уравнение для n_φ , рассматривать не будем, так как оно не влияет на давление в волне.

Запишем уравнения (4.3) в цилиндрических координатах и учтем сделанные замечания. Будем рассматривать только лучи вблизи плоскости $z = 0$, так что $n_r \approx 1$, $n_z \approx a$ и $a^2 \ll 1$.

Система уравнений нелинейной геометрической акустики для случая слоистой атмосферы с малыми изменениями скорости звука и скорости ветра для лучей, распространяющихся вдоль земли, имеет вид

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\omega, \quad \omega(z) = \frac{1}{c_0} \frac{dc}{dz} + \frac{1}{c_0} \frac{dw}{dz} \cos \varphi \quad (4.4)$$

$$2 \frac{\partial m}{\partial r} + 2\alpha \frac{\partial m}{\partial z} + m \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -m \frac{v}{r} - m\alpha\delta - \frac{2m^2}{\lambda}, \quad \delta(z) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} + \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial z} = m \quad (4.6)$$

Здесь φ — угол между направлением на рассматриваемую точку из начала координат и вектором скорости ветра, ω — суммарный градиент скорости звука и скорости ветра, величина $v = 1$, если начальные данные обладают цилиндрической симметрией с осью z в качестве оси симметрии, и $v = 0$ для плоской задачи.

Отметим, что заменой $\xi = mr^{-1/2}$ можно избавиться от свободного члена $\sim 1/r$, который появляется в уравнении (4.5) при $v = 1$. Но при этом изменяются уравнения (4.4) и (4.6). Поэтому такую замену не будем рассматривать.

Система уравнений (4.4) — (4.6) будет гиперболической. Направления характеристик этой системы такие

$$dz/dr = a \pm \sqrt{1/2m}, \quad dz/dr = a \quad (4.7)$$

Вдоль первой пары характеристик выполняются соответственно соотношения

$$da \pm \sqrt{2/m} dm = -\omega dr \mp \sqrt{1/2m} (v/r + \alpha\delta + 2m/\lambda) dr \quad (4.8)$$

Вдоль третьей характеристики выполняется соотношение

$$d\lambda = m dr \quad (4.9)$$

Введем новую переменную $\beta = 2\sqrt{2m}$. Уравнения (4.7) — (4.9) примут вид

$$\frac{dz}{dr} = \alpha \pm \frac{\beta}{4}, \quad d\alpha \pm d\beta = -\omega dr \mp \frac{\beta}{4} \left(\frac{v}{r} + \alpha\delta + \frac{\beta^2}{4\lambda} \right) dr \quad (4.10)$$

$$\frac{dz}{dr} = \alpha, \quad d\lambda = \frac{\beta^2}{8} dr \quad (4.11)$$

Величина β представляет собой критический угол наклона стенки при маховском отражении плоской ударной волны интенсивности m (см. (3.4)).

§ 5. Некоторые решения уравнений гиперболического типа обладают особенностью, заключающейся в том, что характеристики одного семейства пересекаются и решение становится неоднозначным. В газовой динамике пересечению характеристик соответствует возникновение ударной волны, которая и устраниет неоднозначность. В уравнениях нелинейной геометрической акустики тоже возможно пе-

ресечение характеристик одного семейства — это было обнаружено при численном счете некоторых задач. Возникающую неоднозначность можно устранить, введя разрыв функций m , n_i , λ .

Условия на поверхности разрыва функций можно получить из тех же физических соображений, что и вывод самих уравнений нелинейной геометрической акустики [6–8].

Единичную нормаль к поверхности разрыва обозначим ν_i . Из условия, что поверхность фронта ударной волны непрерывна на поверхности разрыва, следует, что скорости волны вдоль поверхности разрыва слева и справа от разрыва одинаковые. Это условие дает соотношение

$$\left(\frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}}{V_i n_i} \right)_1 = \left(\frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}}{V_i n_i} \right)_2, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{V}}{|V|} \quad (5.1)$$

При переходе через разрыв площадь лучевой трубы изменяется в соответствии с изменением угла ее наклона. Из этого условия получим

$$\left(S \frac{\boldsymbol{\mu}_k n_k}{\boldsymbol{\mu}_i \nu_i} \right)_1 = \left(S \frac{\boldsymbol{\mu}_k n_k}{\boldsymbol{\mu}_i \nu_i} \right)_2 \quad (5.2)$$

Наконец, вдоль лучевой трубы выполняются следующие соотношения, которые получаются при интегрировании уравнений (2.2) и (2.3) на малом отрезке лучевой трубы, содержащем разрыв функций

$$\left[m^2 S \left(1 + \frac{w_i n_i}{c} \right)^2 \right]_1 = \left[m^2 S \left(1 + \frac{w_i n_i}{c} \right)^2 \right]_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad (5.3)$$

Первое соотношение (5.3) выражает сохранение энергии при переходе ударной волны через поверхность разрыва функций. Подставляя его в (5.2) и учитывая, что параметры среды непрерывны на поверхности разрыва функций и что величина M близка к единице, получим

$$\left[m^2 \left(n_i \nu_i + \frac{\nu_i w_i}{c} \right) \left(1 + \frac{n_i w_i}{c} \right) \right]_1 = \left[m^2 \left(n_i \nu_i + \frac{\nu_i w_i}{c} \right) \left(1 + \frac{n_i w_i}{c} \right) \right]_2 \quad (5.4)$$

Соотношения (5.1), (5.4) и второе равенство в (5.3) есть необходимые условия на поверхности разрыва.

Для упрощенных уравнений (4.4)–(4.6) условия на поверхности разрыва функций также получаются более простые

$$\begin{aligned} \kappa &= \alpha_1 + V \sqrt{2m_1} \frac{\pi^2}{\sqrt{(1+\pi^2)(1+\pi)}}, & \alpha_2 &= \alpha_1 + V \sqrt{2m_1} \frac{\pi^2 - 1}{\sqrt{(1+\pi^2)(1+\pi)}}, \\ \lambda_1 &= \lambda_2, & \pi &= \frac{m_2}{m_1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь κ — угол наклона поверхности разрыва функций к плоскости $z = 0$. Этот угол определяет «скорость» распространения разрыва в плоскости переменных r , z , так как в принятом приближении малых углов величина κ совпадает с производной dz/dr . Из первого соотношения (5.5) следует, что «скорость» слабого разрыва ($\pi \rightarrow 1$) совпадает со «скоростью» первой пары характеристик (4.7).

Физический смысл возникновения разрывов в уравнениях нелинейной геометрической акустики заключается в том, что при этом в действительности (т. е. в более точной постановке задачи, чем лучевое приближение) возникает отраженная ударная волна, так как «излом» ударной волны (т. е. разрыв n_i) возможен только при тройной конфигурации. Чем сильнее возникающий разрыв функций, тем сильнее должна быть отраженная волна. Таким образом, сами уравнения указывают на возникновение лишней ударной волны, кроме той, для которой ведется расчет. В некоторых задачах эта отраженная волна играет существенную роль, как, например, при правильном отражении. Но, пользуясь на разрыве первым соотношением (5.3), тем самым пренебрегаем отраженной волной, поскольку это соотношение выражает сохранение энергии вдоль лучевой трубы. Для отраженной волны не остается энергии.

По этой причине при достижении определенной интенсивности разрыва в уравнениях нелинейной геометрической акустики нужно прекращать счет. Это необходимо сделать, там, где заведомо будет правильное отражение, а именно, где при переходе через разрыв луч изменяет угол наклона на величину больше критического. Можно продолжить счет дальше, если подходящим образом «вставить» отраженную волну.

§ 6. Отметим частные случаи решения системы уравнений (4.4)–(4.6) в однородной атмосфере, т. е. при $\omega = 0$ и $\delta = 0$. Сначала укажем решения уравнений (4.5), (4.6) для прямолинейных лучей. В случае плоской волны, распространяющейся вдоль земли

$$\lambda = \sqrt{c_1 r + c_2}, \quad m = c_1 / 2\sqrt{c_1 r + c_2}, \quad a = 0, \quad v = 0$$

В случае расходящейся сферической волны

$$\lambda = \sqrt{c_1 \ln r + c_2}, \quad m = c_1 / 2r\sqrt{c_1 \ln r + c_2}, \quad a = z/r, \quad v = 1$$

Таким образом, в этих случаях получаются известные решения для затухания слабых ударных волн в однородной атмосфере [9].

Теперь рассмотрим решение уравнения (4.4) в неоднородной атмосфере, но когда давление вдоль фронта ударной волны меняется мало, так что производная $\partial m / \partial z$ мала по сравнению с производными скорости звука и скорости ветра, которые входят в суммарный градиент ω . Пренебрегая в уравнении (4.4) первым членом, получим

$$\partial a / \partial r + a \partial a / \partial z = -\omega(z) \quad (6.1)$$

Отсюда получаем уравнения лучей

$$dz / dr = a, \quad da / dr = -\omega(z) \quad (6.2)$$

При постоянном суммарном градиенте $\omega = \omega_0$ получим известные уравнения лучей в виде парабол [2]

$$z = z_0 + a_0 r - \frac{1}{2}\omega_0 r^2 \quad (6.3)$$

§ 7. Рассмотренное выше лучевое приближение для слабых ударных волн можно проверить путем сопоставления получающихся решений с точными. Особый интерес представляет усиление или ослабление давления на фронте ударной волны при ее распространении вдоль стенки (вдоль земли).

Давление на стенке клина при автомодельном отражении плоской слабой ударной волны при малых углах ($\alpha \ll \beta_1$) получено в [3]:

$$\zeta = 1 + \frac{16}{3\pi} \frac{\alpha}{\beta_1} \approx 1 + 1.7 \frac{\alpha}{\beta_1}, \quad \zeta = \frac{m}{m_1} \quad (7.1)$$

Здесь ζ — коэффициент отражения, α — полуугол раствора клина или угол наклона стенки, индекс 1 относится к падающей волне. С другой стороны, из второго соотношения на разрыве (5.5), при выводе которого было использовано уравнение (2.2), при малых углах $\alpha = \alpha_2 - \alpha \ll \beta_1$ получим

$$\zeta = 1 + 2 \frac{\alpha}{\beta_1} \quad (7.2)$$

Если стенка наклоняется постепенно, так что разрыв функций начинается не в месте начала искривления стенки, а на некотором расстоянии, или же если стенка изогнута в другую сторону (в этом случае происходит ослабление волны), то для длинных волн $\lambda = \infty$ получается решение в виде простой волны, и давление на стенке находится из соотношения (4.8). Получим

$$\zeta = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_1}\right)^2 \quad (7.3)$$

Здесь рассматривается однородная среда. При $\alpha \ll \beta_1$ (7.3) совпадает с (7.2).

Таким образом, при малых углах наклона лучей уравнения нелинейной геометрической акустики дают удовлетворительные результаты.

Теперь сопоставим решения при больших углах (но не больше критического). В работах [14, 15] получено точное значение коэффициента отражения при критическом угле наклона стенки $\zeta = 5$. С другой стороны, из второго соотношения на разрыве (5.5) при $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1$ получим $\zeta = 5.3$. Это выше точного значения всего на 6%.

Таким образом, нелинейная геометрическая акустика достаточно хорошо определяет величину давления на стенке во всем диапазоне маxовского отражения от малых углов и до критического.

Отметим, что нельзя пользоваться формулой (7.3), когда α положительно и близко к β_1 , так как в решении возникает пересечение характеристик одного семейства. Для устранения неоднозначности нужно вводить разрыв функций, и простая волна разрушается.

§ 8. Система уравнений (4.4)–(4.6) была просчитана методом характеристик на электронной счетной машине для различных значений параметров $\omega(z)$, $\delta(z)$, v , λ . На фигурае показан результат расчета коэффициента усиления ζ для симметричного случая начальных данных, соответствующих точечному источнику ударной волны на плоскости $z = 0$, при постоянном суммарном градиенте $\omega = \omega_0$ и $v = 1$, $\delta = 0$, $\lambda = \infty$.

По оси ординат отложено значение коэффициента усиления $\zeta = p'/p'_0$. Здесь p' — давление в слабой ударной волне, которое получено в результате расчета, p'_0 — давление, которое было бы на том же расстоянии при распространении волны в однородной среде, т. е. $p'_0 = kpc^2/r$.

По оси абсцисс отложено расстояние до источника (взрыва), отнесенное к величине критического расстояния r_* , которое равно

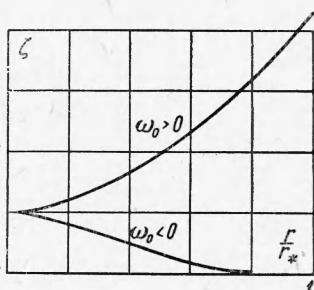
$$r_* = 2[(\gamma + 1)k]^{1/3} |\omega_0|^{-2/3} \quad (8.1)$$

При положительном суммарном градиенте получается усиление давления, а при отрицательном — ослабление. Первый случай обычно наблюдается по ветру, а второй — против.

Отметим, что все случаи постоянных градиентов как скорости звука, так и скорости ветра сводятся к двум случаям: $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 < 0$. Поэтому значения ζ в разных направлениях от взрыва при разных соотношениях между градиентами скорости звука и скорости ветра получаются простым пересчетом результатов, приведенных на фигуре.

Кроме того, отметим, что во всей области, влияющей на указанных расстояниях на величину ζ при $z = 0$ (на земле), не возникло разрыва функций. При расчетах же плоского случая разрыв функций возникает раньше и влияет на величину ζ с расстояниями $r = 0.14 r_*$, на котором $\zeta = 1.65$.

Автор благодарит О. С. Рыжова за полезные замечания, сделанные при обсуждении работы, и В. И. Кожевникова за помощь при проведении расчетов.



Фиг. 1

Поступила 9 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохицев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. Гостехиздат, 1946.
2. Keller J. B. Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
3. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
5. Губкин К. Е. Нелинейная геометрическая акустика и ее приложения. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, 1961.
6. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Part 1. Two-dimensional problems. J. Fluid Mech., vol. 2, part 2.
7. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area of flow. J. Fluid Mech., 1958, part 4.
8. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Part 2. Three-dimensional problems. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, part 3.
9. Ландau Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
10. Коротков П. Ф. Об ударных волнах на значительном расстоянии от места взрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
11. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. Об энергии звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах. ПММ, 1962, т. 26, № 5.
12. Коротков П. Ф. Об увеличении давления в ударной волне взрыва в направлении ветра. ПМТФ, 1961, № 3.
13. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc., ser. A., 1949, vol. 198, No. 1055.
14. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
15. Коротков П. Ф. О маховском отражении ударных волн. ПМТФ, 1964, № 1.