

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 519.246:551.551

Спектральные вклады участков степенной структурной функции стационарных случайных процессов

В.А. Федоров*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 8.07.2021 г.

Рассматривается частотное поведение спектральных вкладов начальных, средних и «конечных» участков степенной структурной функции в спектральную плотность стационарного случайного процесса. Показан их осциллирующий знакопеременный частотный характер. При этом с ростом частоты скорость спада модулей указанных вкладов приближается к обратно пропорциональной зависимости.

Представлены и проанализированы простые аналитические аппроксимационные соотношения, описывающие частотное поведение всех указанных спектральных вкладов. Они рекомендуются для широкого практического использования. Рассмотрено применение полученных формул для более сложных составных степенных функций.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, степенная структурная функция, спектральная плотность, спектральные вклады; stationary random process, power-law structure function, spectral density, spectral contribution.

Введение

Задачи распространения акустических, оптических и радиоволн в турбулентной атмосфере могут быть решены в «структурной» или спектральной области. Такие же подходы используются и при исследовании собственно атмосферы как случайной среды.

Первый («структурный») подход основан на использовании структурных функций (СФ) [1–6]. Он применяется, если изучаемый объект можно отнести к локально-однородному и изотропному скалярному полю, а во временной области – к случайному процессу со стационарными приращениями (СПСП) [7]. Не менее эффективен аппарат СФ для описания стационарных случайных процессов (ССП), соответствующих однородным и изотропным полям. В обоих случаях в качестве исходной модели может быть использована степенная СФ вида $D(\tau) \sim \tau^\mu$, где τ – сдвиг во времени (или в пространстве). Но в первом случае с ростом аргумента она неограниченно возрастает, а во втором ограничена и с ростом аргумента стремится к некоторому постоянному значению. О важности и полезности этой модели свидетельствует то, что ее частный случай с показателем степени $\mu = 2/3$ носит название «закона 2/3» Колмогорова–Обухова [1–6]. Далее рассмотрим СФ $D(\tau)$ для случая СПСП в более общем виде (анализ будет проведен только во временной области). Особенности второго (спектрального) подхода при решении выше-

указанных физических задач изложены, например, в [1–3].

На наш взгляд, для более правильной интерпретации полученных обоими подходами результатов целесообразно уточнить имеющиеся представления о спектрально-структурных связях, в частности для степенной СФ. Поэтому в [8, 9] исследованы спектральные вклады начальных, средних и «конечных» участков (сегментов) данной СФ СПСП в ее полную спектральную плотность $W(\omega)$, где ω – «угловая» частота. Показано, что их поведение в области ω значительно сложнее известной положительной монотонной степенной зависимости спектральной плотности, соответствующей бесконечному интервалу сдвигов $-\infty \leq \tau \leq \infty$ [1–3, 7]:

$$W(\omega) = \frac{C^2 \mu \Gamma(\mu)}{2\pi \omega^{(\mu+1)}} \sin \frac{\pi \mu}{2}, \quad (1)$$

где $0 < \mu < 2$ ($\mu \neq 1$); $\Gamma(\mu)$ – гамма-функция; C^2 – структурная характеристика (постоянная) исследуемого процесса.

В наибольшей степени выражению (1) соответствует только поведение спектрального вклада начального участка данной СФ $W_{0,1}(\omega)$ при $0 < \mu < 1$. Также в [1–3, 7] представлены аналитические аппроксимации частотных зависимостей спектральных вкладов указанных выше сегментов СФ СПСП.

Подобное исследование целесообразно провести и для класса *ограниченных* степенных СФ [1–6], которые соответствуют СПП,

$$D_\mu(\tau) = \begin{cases} C^2 |\tau|^\mu = 2\sigma^2 (|\tau|/L_0)^\mu, & |\tau| \leq L_0, \\ C^2 L_0^\mu = 2\sigma^2, & |\tau| > L_0. \end{cases} \quad (2)$$

* Валерий Александрович Федоров (fva21@iao.ru).

Здесь $L_0 < \infty$ — значение временного сдвига аргумента τ , при котором происходит «насыщение» зависимости (2) на уровне удвоенной дисперсии $2\sigma^2$ изучаемого процесса. При этом в [10] показано, что приведенную функцию можно использовать в качестве структурной только для недифференцируемого ССП и лишь при показателе степени $0 < \mu \leq 1$. Там же представлена связь спектральной плотности стационарных $G(\omega)$ и случайных процессов со стационарными приращениями $W(\omega)$ (1), соответствующих ограниченной (2) и неограниченной степенным СФ.

Заметим, что при теоретических исследованиях, например при решении задач распространения различных волн, часто используется упомянутая выше нестационарная модель. А при экспериментальных исследованиях предполагается наличие стационарности, обеспечивающее относительную простоту обработки входных воздействий. В общем случае переход от нестационарных к стационарным процессам осуществляется в два этапа. На первом этапе обеспечивается его стационарность по среднему значению с использованием комбинаций различных линейных и нелинейных фильтров. Затем отфильтрованный сигнал нормируется на его текущее среднеквадратичное отклонение.

Простейший вариант одноэтапного перехода с применением только линейной фильтрации описан в [5]. В работе [10] отмечается, что частотная зависимость $G(\omega)$ усложнена относительно $W(\omega)$. В отличие от $W(\omega)$, спектральная плотность $G(\omega)$ на нулевой частоте является конечной и определяется параметрами L_0 и μ . С ростом ω частотная зависимость $G(\omega)$ в среднем начинает соответствовать изменению (спаду) $W(\omega)$, т.е. с точностью до константы выполняется $G(\omega) \sim \omega^{-(\mu+1)}$, $\omega \rightarrow \infty$. При этом наблюдается модуляция монотонного степенного хода (1) некоторыми положительными квазипериодическими функциями. Их колебательный характер определяется величинами L_0 и μ . А предполагаемое взаимное соответствие гладких структурно-спектральных соотношений выполняется только на бесконечном интервале изменения τ [3, 10].

Для получения вышеизложенных результатов применялись сложные алгоритмы высокоточного численного интегрирования быстро осциллирующих функций, описанные в [8, 11]. Поэтому в [10] для практического использования были представлены простые, но одновременно точные аппроксимационные зависимости поведения спектральной плотности $G(\omega)$ для всего частотного интервала от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, верные для достаточно широкого диапазона значений L_0 .

Постановка задачи

Цель настоящей работы — изучение структурно-спектральных соотношений для различных сегментов составной степенной СФ ССП $D_\mu(\tau)$ в форме (2) при $0 < \mu \leq 1$. Оценим влияние размеров и положения участков (сегментов) СФ, а также величин L_0 и μ на характеристики соответствующих

спектральных вкладов. Это может быть полезным при интерпретации результатов практического оценивания спектральной плотности $G(\omega)$ в условиях ограниченности (по разным причинам) времени наблюдения изучаемого ССП.

Также следует распространить указанную выше цель и на интервал $1 < \mu \leq 2$. Это целесообразно из-за широко используемых на практике моделей многосоставных (многомасштабных) СФ, отдельные сегменты которых представляются степенными функциями с различными значениями параметра μ из расширенного диапазона $0 < \mu \leq 2$ [1, 2, 4]. Поэтому полезна оценка влияния количества и «размеров» этих сегментов на формирование изучаемой спектральной плотности. Причем указанные сегменты из-за недостатка соответствующей теоретической или иной информации могут и не пересекаться. Достаточно часто используются функции, заданные на трех сегментах. Пример — структурная функция $D_{III}(\tau)$ [2]. Она содержит следующие сегменты: первый для $\tau \ll l_0$ с показателем степени $\mu_1 = 2$, второй для $l_0 \ll \tau \ll L_0$ с $\mu_2 = 2/3$ (инерционный интервал), третий для $\tau \gg L_0$, где происходит насыщение трехсоставной СФ на уровне ее удвоенной дисперсии. Обычно l_0 и L_0 называются внутренним и внешним масштабами турбулентности.

Решение большинства практических задач требует наличия аналитических выражений для всего диапазона τ . Однако для достижения *качественно* правильных результатов часто достаточно получить непрерывную $D_{III}(\tau)$ без выполнения необходимых условий принадлежности такой кривой к классу СФ [2, 10]. Такая аппроксимация для конкретных значений $\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = 2/3$ с введением соответствующих весовых коэффициентов представлена в [2]. При этом первый сегмент занимает область $\tau \leq l_0$, второй — $l_0 < \tau \leq L_0$, третий — $\tau > L_0$. Нетрудно получить и аналогичное общее соотношение для любых μ_1 и μ_2 из диапазона $0 < \mu \leq 2$:

$$D_{III}(\tau) = \begin{cases} C^2 l_0^\beta \tau^{\mu_1} = 2\sigma^2 (l_0^\beta / L_0^{\mu_2}) \tau^{\mu_1}, & \tau \leq l_0, \\ C^2 \tau^{\mu_2} = 2\sigma^2 (\tau / L_0)^{\mu_2}, & l_0 < \tau \leq L_0, \\ C^2 L_0^{\mu_2} = 2\sigma^2, & \tau > L_0, \end{cases}$$

где $\beta = \mu_2 - \mu_1$. Это выражение целесообразно разделить на два, каждое из которых для упрощения дальнейшего анализа должно соответствовать модели степенной функции (2) для $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$. Из-за необходимости обеспечить равенство их дисперсий следует ввести «дополнительный» внешний масштаб для первой функции $L_1 = L_0^q l_0^{1-q}$, где $q = \mu_2 / \mu_1$. В итоге получаем

$$D_{\mu_1}(\tau) = \begin{cases} C^2 l_0^\beta \tau^{\mu_1}, & \tau \leq L_1, \\ C^2 l_0^\beta L_1^{\mu_1}, & \tau > L_1, \end{cases}$$

$$D_{\mu_2}(\tau) = \begin{cases} C^2 \tau^{\mu_2}, & \tau \leq L_0, \\ C^2 L_0^{\mu_2}, & \tau > L_0. \end{cases}$$

Представленные выражения являются основой для получения структурно-спектральных соотношений для различных сегментов трехсоставной степенной СФ типа $D_{III}(\tau)$. Ниже мы вернемся к обсуждению этого вопроса.

Также в литературе, в частности в [2], отмечается, что качественно правильные результаты можно получить, если просто пренебречь участками функции $D_{III}(\tau)$, вносящими предположительно малый относительный вклад в решение поставленной задачи. Отбор значимых участков может происходить и с учетом указанной спектральной информации, которую желательно представить в виде простых и точных аналитических частотных зависимостей.

Оценка вкладов начального участка степенной структурной функции в спектральную плотность. Область задания $|\tau| \leq \tau_1 < L_0$

Следуя [10], запишем в терминах преобразования Фурье выражение для вычисления спектральной плотности $G(\omega)$ для степенной СФ $D_\mu(\tau)$:

$$G(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{L_0} \tilde{D}_\mu(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (3)$$

где $\tilde{D}_\mu(\tau) = D_\mu(\tau) - D_\mu(L_0)$ — центрированная (относительно насыщения $D_\mu(L_0)$) СФ.

Спектральный вклад начального участка СФ от $\tau = 0$ до τ_1 можно записать в виде

$$G_{0,1}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} \tilde{D}_\mu(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Раскрывая выражение для $\tilde{D}_\mu(\tau)$ и подставляя члены $\pm D_\mu(\tau_1)$, получаем

$$G_{0,1}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} [D_\mu(\tau) - D_\mu(\tau_1)] \cos(\omega\tau) d\tau + \Delta G_{0,1}(\omega),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta G_{0,1}(\omega) &= [D_\mu(L_0) - D_\mu(\tau_1)] \frac{\sin \beta_1}{2\pi\omega} = C^2 (L_0^\mu - \tau_1^\mu) \frac{\sin \beta_1}{2\pi\omega} \\ &= \sigma^2 (1 - \alpha_1^\mu) \frac{\sin \beta_1}{\pi\omega}, \quad \beta_1 = \omega\tau_1, \quad \alpha_1 = \tau_1/L_0. \end{aligned}$$

С учетом выражения (3) приходим к формуле

$$G_{0,1}(\omega) = G(\omega)_{\tau_1} + \Delta G_{0,1}(\omega). \quad (4)$$

Таким образом, спектральный вклад начального участка степенной СФ $D_\mu(\tau)$ определяется суммой двух частей. Первую часть — $G(\omega)_{\tau_1}$ — можно формально считать спектральной плотностью, соответствующей насыщению СФ $D_\mu(\tau)$ при $\tau = \tau_1$. При

этом зависимость $G(\omega)_{\tau_1}$ от частоты подобна зависимости $G(\omega)$ при замене характерного масштаба L_0 на τ_1 . Условие $G(\omega)_{\tau_1} \geq 0$ выполняется при всех ω . Асимптотическое поведение $G(\omega)_{\tau_1}$ аналогично поведению исходной спектральной плотности $G(\omega)$.

Вторая часть — $\Delta G_{0,1}(\omega)$ — является знакопеременной функцией, что приводит к появлению отрицательных значений у всего вклада $G_{0,1}(\omega)$ и к асимптотическому поведению $G_{0,1}(\omega) = O(\omega^{-1})$, $\omega \rightarrow \infty$. Периодичность изменения знака определяется τ_1 , а размах — величиной отклонения (скачка) $D_\mu(\tau)$ в точке τ_1 относительно уровня насыщения СФ $D_\mu(L_0)$. Можно сказать, что при малых значениях параметра α_1 анализируемый вклад $G_{0,1}(\omega)$ в большей степени характеризует спектральные свойства этого скачка, нежели структуру самой СФ. С ростом α_1 это искажающее влияние ослабевает и в выражении (4) начинает превалировать член $G(\omega)_{\tau_1}$. Однако это не препятствует появлению отрицательных значений у спектрального вклада $G_{0,1}(\omega)$.

Для примера получим выражение $G_{0,1}(\omega)$ для СФ $D_1(\tau)$ (2), т.е. при $\mu = 1$. В этом случае

$$\Delta G_{0,1}(\omega) = C^2 (L_0 - \tau_1) \frac{\sin \beta_1}{2\pi\omega} = \sigma^2 (1 - \alpha_1) \frac{\sin \beta_1}{\pi\omega}.$$

Из выражения для спектральной плотности $G_1(\omega)$ [10] следует

$$G(\omega)_{\tau_1} = C^2 \frac{\sin^2(\beta_1/2)}{\pi\omega^2} = \alpha_1 \sigma^2 \frac{\sin^2(\beta_1/2)}{\pi\omega(\beta_1/2)}.$$

В итоге получаем

$$G_{0,1}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi\omega} \left\{ \alpha_1 \frac{\sin^2(\beta_1/2)}{(\beta_1/2)} + (1 - \alpha_1) \sin \beta_1 \right\}.$$

Анализ этого выражения подтверждает сделанные выше выводы.

Далее рассмотрим случай «колмогоровской» турбулентности, т.е. когда $\mu = 2/3$. На рис. 1, а в терминах циклических частот $f = \omega/2\pi$ представлен нормированный на C^2 модуль знакопеременного спектрального вклада $|G_{0,1}(f)|$ начального участка этой СФ при $\tau_1 = 10$ с в соответствующую ей спектральную плотность $G(f)$ с $L_0 = 100$ с. Также на этом рисунке показано разделение результата на компоненты $G(f)_{\tau_1}$ и $|\Delta G_{0,1}(f)|$. Для сравнения приведен и аналогичный нормированный частотный ход спектральной плотности $W(f)$ (1). Положительные функции $G(f)$ и $G(f)_{\tau_1}$ вычислялись с помощью соотношения (3) с учетом сделанных выше замечаний и рекомендаций в публикациях [10, 11]. Из рис. 1 видно, что на большей части интервала f величину рассматриваемого спектрального вклада определяет знакопеременная функция $\Delta G_{0,1}(f)$. Исключением являются только небольшие частотные области ее переходов через нуль. Как отмечалось выше, это объясняется малой величиной используемого безразмерного параметра $\alpha_1 = \tau_1/L_0 = 0,1$.

Заметим, что выражение (4) справедливо для степенной функции $D_\mu(\tau)$ не только при $0 < \mu \leq 1$, но и при $1 < \mu \leq 2$. Но во втором случае функция $D_\mu(\tau)$, в силу изложенного в [10], не является СФ ССП, а функция $G(\omega)$, вычисленная по приведенным в [10] соотношениям, не является спектральной плотностью. Поэтому составляющая $G(\omega)_{\tau_1}$ изначально принимает отрицательные значения, а ее асимптотика практически не зависит от величины параметра μ и выполняется $G(\omega)_{\tau_1} = O(\omega^{-2})$, $\omega \rightarrow \infty$. Однако асимптотическое поведение всего вклада $G_{0,1}(\omega)$ из-за наличия второго члена $\Delta G_{0,1}(\omega)$ такое же, как и для $0 < \mu \leq 1$. При этом $G_{0,1}(0) = \sigma^2 \tau_1 [1 - \alpha_1^\mu / (\mu + 1)] / \pi$.

В качестве примера представим выражение для $G_{0,1}(\omega)$, соответствующее функции $D_2(\tau)$ (см. определение в [10]). С учетом приведенных в [10] соотношений можно получить ($\mu = 2$):

$$G_{0,1}(\omega) = \sigma^2 \left\{ \left[2 + (1 - \alpha_1^2) \beta_0^2 \right] \sin \beta_1 - 2\beta_1 \cos \beta_1 \right\} / \pi \omega \beta_0^2,$$

где $\beta_0 = \omega L_0$.

На рис. 1, а приведены графики модулей знаменитых функций $G(f)$, $G(f)_{\tau_1}$, $\Delta G_{0,1}(f)$, $G_{0,1}(f)$, а также спектральной плотности $W(f)$, рассчитан-

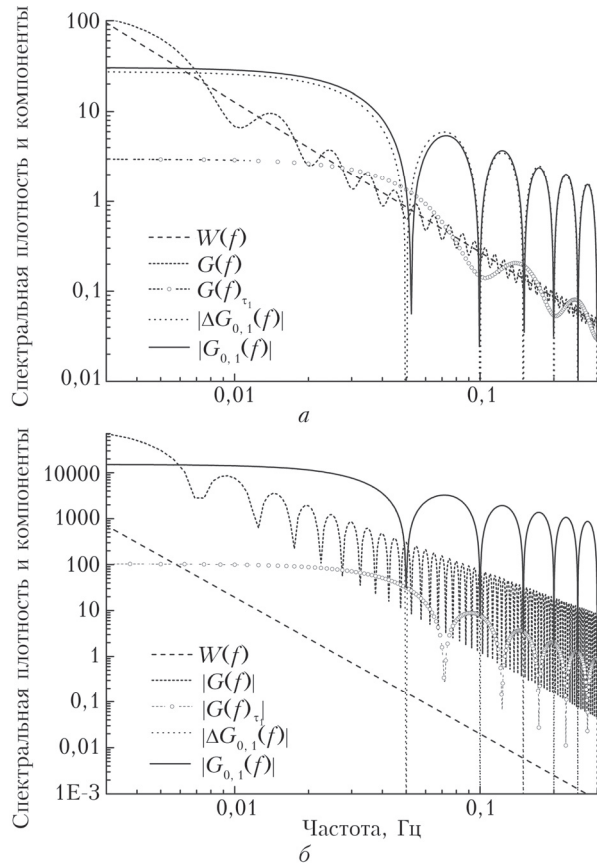


Рис. 1. Нормированные значения спектров $W(f)$, $G(f)$, $G(f)_{\tau_1}$ и модулей $\Delta G_{0,1}(f)$, $G_{0,1}(f)$ для $\mu = 2/3$ (а); нормированные значения спектральной плотности $W(f)$ и модулей $G(f)$, $G(f)_{\tau_1}$, $\Delta G_{0,1}(f)$, $G_{0,1}(f)$ для $\mu = 1,99$ (б); $\tau_1 = 10$ с, $L_0 = 100$ с

ные при $\mu = 1,99$, $\tau_1 = 10$ с, $L_0 = 100$ с. Отметим, что модули функций $\Delta G_{0,1}(f)$ и $G_{0,1}(f)$ практически совпадают на всем частотном интервале, за исключением узких участков вблизи нулевых значений $\Delta G_{0,1}(f)$.

Выражение (4) с учетом материалов [10] позволяет записать аналитическое выражение $G_{0,1apr}(\omega)$, которое с хорошей точностью аппроксимирует величину спектрального вклада $G_{0,1}(\omega)$ начального участка СФ $D_\mu(\tau)$ (или просто СФ при $\mu > 1$) в виде

$$G_{0,1}(\omega) \approx G_{0,1apr}(\omega) = G_{apr}(\omega)_{\tau_1} + \Delta G_{0,1}(\omega), \quad (5)$$

где $G_{apr}(\omega)_{\tau_1}$ является аналогом $G_{apr}(\omega)$ в [10] при замене L_0 на τ_1 :

$$G_{apr}(\omega)_{\tau_1} = \begin{cases} \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu+1}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu+1} - \frac{(\omega \tau_1)^2}{6(\mu+3)} + \frac{(\omega \tau_1)^4}{120(\mu+5)} \right\}, & \omega \leq \omega_b, \\ W(\omega) - \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \left\{ \cos \omega \tau_1 - \frac{(\mu-1)}{\omega \tau_1} \sin \omega \tau_1 \right\}, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (6)$$

Если положить $f_{b1} = 1/4\tau_1$, то по аналогии с соответствующими выражениями в [10] циклическую граничную частоту f_b (следовательно, и угловую $\omega_b = 2\pi f_b$) можно определить как

$$f_b = \begin{cases} f_{b1} + 7 / 64\tau_1, & 0 < \mu \leq 0,1; \\ f_{b1} + 6 / 64\tau_1, & 0,1 < \mu \leq 0,5; \\ f_{b1} + 5 / 64\tau_1, & 0,5 < \mu \leq 0,75; \\ f_{b1} + 3 / 64\tau_1, & 0,75 < \mu \leq 0,9; \\ f_{b1}, & 0,9 < \mu < 1,1; \mu \neq 1; \\ f_{b1} + 3 / 64\tau_1, & 1,1 \leq \mu < 1,25; \\ f_{b1} + 5 / 64\tau_1, & 1,25 \leq \mu < 1,33; \\ f_{b1} + 4 / 64\tau_1, & 1,33 \leq \mu < 1,5; \\ f_{b1} + 3 / 64\tau_1, & 1,5 \leq \mu \leq 1,75; \\ f_{b1}, & 1,75 < \mu < 2. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что частные случаи выражения (5) для $\mu = 1$ и 2 при использовании нижнего соотношения из формулы (6) тождественны приведенным ранее точным аналитическим выражениям $G_{0,1}(\omega)$ на всем частотном интервале от 0 до ∞ .

Как следует из (4) и (5), относительные ошибки

$$\begin{aligned} \epsilon_{0,1}(\omega) &= \left\{ \frac{G_{0,1apr}(\omega) - G_{0,1}(\omega)}{G_{0,1}(\omega)} \right\} \cdot 100 = \\ &= \left\{ \frac{G_{apr}(\omega)_{\tau_1} - G(\omega)_{\tau_1}}{G_{0,1}(\omega)} \right\} \cdot 100 \end{aligned}$$

при замене $G_{0,1}(\omega)$ на функцию $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ во многом определяются аналогичными характеристиками при замене $G(\omega)_{\tau_1}$ на $G_{\text{appr}}(\omega)_{\tau_1}$, подробно исследованные ранее в [10], с учетом замены характерного масштаба L_0 на τ_1 . В целом же поведение $\varepsilon_{0,1}(\omega)$ подобно поведению аналогичных ошибок аппроксимации $\varepsilon(\omega)$ знакопеременной функции $G(\omega)$ при $1 < \mu < 2$ [10]. Так, результаты расчетов показывают, что они максимальны, когда значения $G_{0,1}(\omega)$ меняют знак, т.е. близки к нулю. При этом абсолютная разность между $G_{0,1}(\omega)$ и $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ весьма мала и в значительной мере объясняется вычислительными ошибками. Поэтому существенные увеличения $|\varepsilon_{0,1}(\omega)|$ наблюдаются лишь на чрезвычайно малых частотных интервалах при почти нулевых значениях аппроксимируемой функции и, следовательно, не приводят к значимым отклонениям графика $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ от хода $G_{0,1}(\omega)$. Это хорошо видно на рис. 2, где $G_{0,1}(\omega)$ и $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ практически неразличимы.

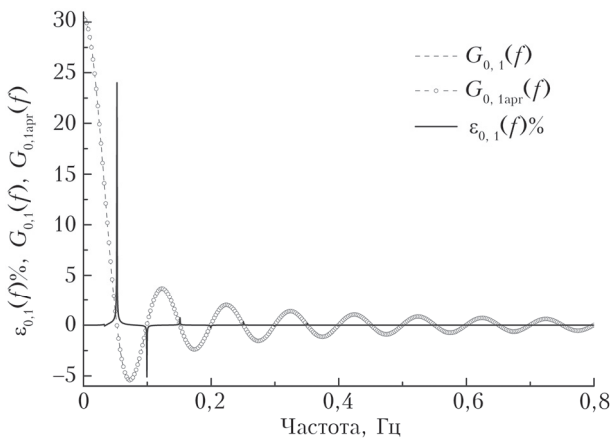


Рис. 2. Сравнение значений спектральных вкладов $G_{0,1}(f)$ и $G_{0,1\text{appr}}(f)$ начального участка СФ $D_\mu(\tau)$ с $\tau_1 = 10$ с для $L_0 = 100$ с и $\mu = 2/3$; $\varepsilon_{0,1}(f)$ – относительная ошибка аппроксимации

Как показали наши исследования, подобные графики характеризуют ошибки $\varepsilon_{0,1}(\omega)$ и при всех других значениях μ в диапазоне $0 < \mu < 2$, а также при всех значимых на практике величинах L_0 , τ_1 . Это позволяет сделать вывод о том, что полученные аналитические соотношения для $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ с высокой точностью описывают поведение $G_{0,1}(\omega)$ во всем диапазоне ω при всех практических ситуациях.

Оценка вкладов среднего участка степенной структурной функции в спектральную плотность. Область задания $\tau_1 \leq |\tau| \leq \tau_2 < L_0$

Из соотношения (3) для монотонных функций $D_\mu(\tau)$ (2) следует выражение для величины спектрального вклада $G_{1,2}(\omega)$ ее среднего участка от τ_1 до τ_2 :

$$G_{1,2}(\omega) = \frac{C^2}{2\pi} \left\{ \frac{L_0^\mu (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)}{\omega} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^\mu \cos(\omega\tau) d\tau \right\}, \quad (8)$$

где $\beta_2 = \omega\tau_2$. Оно справедливо для $0 < \mu \leq 2$. Можно записать эквивалентное выражение с использованием первых производных $D_\mu(\tau)$:

$$G_{1,2}(\omega) = \frac{C^2}{2\pi\omega} \left\{ (L_0^\mu - \tau_2^\mu) \sin \beta_2 - (L_0^\mu - \tau_1^\mu) \sin \beta_1 + \mu \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau \right\}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что спектральный вклад $G_{1,2}(\omega)$ является знакопеременной функцией с асимптотическим поведением $G_{1,2}(\omega) = O(\omega^{-1})$, $\omega \rightarrow \infty$.

Для иллюстрации вышеизложенного с помощью любого из выражений (8), (9) можно получить соотношение $G_{1,2}(\omega)$ для степенной СФ ССП $D_1(\tau)$ в форме (2):

$$G_{1,2}(\omega) = \sigma^2 \{ (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) / \beta_0 + (1 - \alpha_2) \times \\ \times \sin \beta_2 - (1 - \alpha_1) \sin \beta_1 \} / \pi\omega,$$

где $\alpha_2 = \tau_2 / L_0$.

Аналогичная формула для функции $D_2(\tau)$ имеет вид

$$G_{1,2}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi\omega\beta_0^2} \left\{ [2 + (1 - \alpha_2^2)\beta_0^2] \sin \beta_2 - \right. \\ \left. - 2\beta_2 \cos \beta_2 - [2 + (1 - \alpha_1^2)\beta_0^2] \sin \beta_1 + 2\beta_1 \cos \beta_1 \right\}.$$

На рис. 3 после численных интегрирований для $\mu = 2/3$ представлены нормированные спектры СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$ при $L_0 = 100$ с. Там же показан и модуль спектрального вклада $G_{1,2}(f)$ среднего участка СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 80$ с.

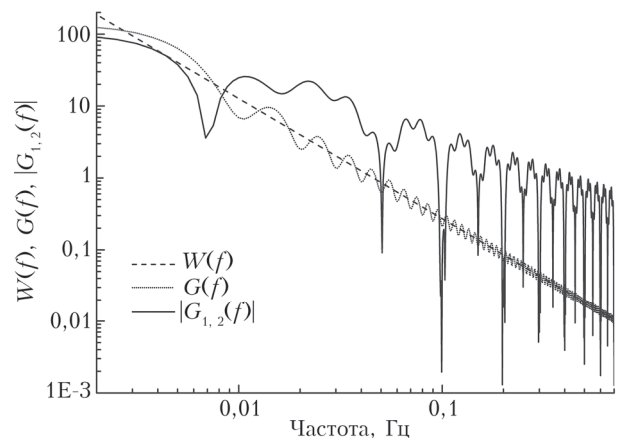


Рис. 3. Нормированные спектры СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$ при $\mu = 2/3$, $L_0 = 100$ с и модуль спектрального вклада $G_{1,2}(f)$ среднего участка СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 80$ с

Отметим более сложный знакопеременный характер поведения вклада $G_{1,2}(f)$ относительно $G_{0,1}(f)$. Он объясняется взаимодействием уже двух спектральных масштабов $1/\tau_1$ и $1/\tau_2$ и является общим для всех значений диапазона $0 < \mu \leq 2$.

На практике для определения $G_{1,2}(\omega)$ вместо численных интегральных расчетов целесообразно использовать очевидное тождество $G_{1,2}(\omega) = G_{0,2}(\omega) - G_{0,1}(\omega)$, где $G_{0,2}(\omega)$ и $G_{0,1}(\omega)$ – описанные в предыдущем разделе спектральные вклады начальных участков функции $D_\mu(\tau)$ на интервалах $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Их нужно вычислить раздельно для значений τ_2 и τ_1 , следуя соответствующим аналитическим выражениям (4)–(7). Для определения $G_{0,2}(\omega)$ во всех указанных выражениях величину τ_1 необходимо заменить на τ_2 . В итоге результаты проведенных расчетов $G_{1,2\text{appr}}(\omega)$ хорошо совпадают с результатами, полученными численными методами. Их точностные характеристики подобны таковым при аппроксимации знакопеременной функции $G_{0,1}(\omega)$ (см. рис. 2). Так, относительные ошибки $|\epsilon_{1,2}(\omega)|$ могут быть велики только вблизи перехода $G_{1,2}(\omega)$ через ноль. Свой искажающий вклад вносят и вычислительные погрешности. В целом ошибками аппроксимации $G_{1,2}(\omega)$ можно пренебречь.

Используя соотношения (5), (6), аппроксимационные аналитические выражения для $G_{1,2}(\omega)$ можно записать и без явного разделения на $G_{0,2}(\omega)$ и $G_{0,1}(\omega)$:

$$G_{1,2}(\omega) \approx G_{1,2\text{appr}}(\omega) = G_{\text{appr}}(\omega)_{\tau_1\tau_2} + \Delta G_{1,2}(\omega), \quad (10)$$

где $\Delta G_{1,2}(\omega) = \sigma^2[(1 - \alpha_2^\mu) \sin \beta_2 - (1 - \alpha_1^\mu) \sin \beta_1] / \pi\omega$

$$G_{\text{appr}}(\omega)_{\tau_1\tau_2} = \begin{cases} \frac{C^2 \mu}{2\pi} \left[\frac{\tau_2^{\mu+1} - \tau_1^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{\tau_2^{\mu+1} \beta_2^2 - \tau_1^{\mu+1} \beta_1^2}{6(\mu+3)} + \frac{\tau_2^{\mu+1} \beta_2^4 - \tau_1^{\mu+1} \beta_1^4}{120(\mu+5)} \right], & \omega \leq \omega_{b2}, \\ \frac{C^2 \mu}{2\pi\omega^2} \left[\tau_1^{\mu-1} \left(\cos \beta_1 - \frac{(\mu-1)}{\beta_1} \sin \beta_1 \right) - \tau_2^{\mu-1} \left(\cos \beta_2 - \frac{(\mu-1)}{\beta_2} \sin \beta_2 \right) \right], & \omega > \omega_{b1}, \end{cases}$$

$\omega_{b1} = \omega_b$ из (7), а для нахождения ω_{b2} необходимо в (7) τ_1 заменить на τ_2 .

Для определения $G_{1,2\text{appr}}(\omega)$ на частотах $\omega_{b2} < \omega \leq \omega_{b1}$ можно использовать любое из приведенных соотношений. Но хорошая точность аппроксимации при этом не гарантируется. Выбор одной переходной частоты затруднен из-за возможной большой вариации значений τ_1 и τ_2 . Поэтому раздельное вычисление $G_{0,2\text{appr}}(\omega)$ и $G_{0,1\text{appr}}(\omega)$ с дальнейшим формированием их разности предпочтительнее. С другой стороны, приведенные в таком виде соотношения для $G_{1,2\text{appr}}(\omega)$ дают более ясное представление о поведении спектральных вкладов $G_{1,2}(\omega)$ на большей части частотного диапазона.

Оценка вкладов «конечного» участка степенной структурной функции в спектральную плотность. Область задания $\tau_2 \leq |\tau| \leq L_0$

Из выражения (8) для функции $D_\mu(\tau)$, если заменить в нем τ_1 на τ_2 , а τ_2 на L_0 , следует соотношение для спектрального вклада $G_{2,L_0}(\omega)$ ее «конечно» участка от τ_2 до L_0 :

$$G_{2,L_0}(\omega) = \frac{C^2}{2\pi} \left\{ \frac{L_0^\mu (\sin \beta_0 - \sin \beta_2)}{\omega} - \int_{\tau_2}^{L_0} \tau^\mu \cos(\omega\tau) d\tau \right\}. \quad (11)$$

Из (9), используя первые производные $D_\mu(\tau)$, получаем эквивалентное выражение

$$G_{2,L_0}(\omega) = \frac{C^2}{2\pi\omega} \left\{ -(L_0^\mu - \tau_2^\mu) \sin \beta_2 + \mu \int_{\tau_2}^{L_0} \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) справедливы для $0 < \mu \leq 2$. Из них следует, что $G_{2,L_0}(\omega)$ является знакопеременной функцией с асимптотикой $G_{2,L_0}(\omega) = O(\omega^{-1})$, $\omega \rightarrow \infty$.

Для иллюстрации вышеизложенного с помощью любого из выражений (11), (12) для степенной СФ $D_1(\tau)$ можно получить соотношение

$$G_{2,L_0}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi\omega} \left\{ \frac{\cos \beta_2 - \cos \beta_0}{\beta_0} - (1 - \alpha_2) \sin \beta_2 \right\}.$$

Аналогично получаем выражение для степенной функции $D_2(\tau)$:

$$G_{2,L_0}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi\omega\beta_0^2} \times \left\{ 2 \sin \beta_0 - 2\beta_0 \cos \beta_0 - [2 + (1 - \alpha_2^2) \beta_0^2] \sin \beta_2 + 2\beta_2 \cos \beta_2 \right\}.$$

На рис. 4 после вычислений по формуле (1) и численного интегрирования соотношений (3), (11) представлены спектры СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$ для $\mu = 2/3$, $L_0 = 100$ с, а также модуль спектрального вклада $G_{2,L_0}(f)$ участка СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_2 = 80$ с до L_0 . Сложный знакопеременный характер поведения $G_{2,L_0}(f)$ является общим для всех значений диапазона $0 < \mu \leq 2$.

На практике для определения $G_{2,L_0}(\omega)$ вместо численного интегрирования целесообразно использовать тождество $G_{2,L_0}(\omega) = G(\omega) - G_{0,2}(\omega)$. При этом $G(\omega)$ – положительная спектральная плотность при $0 < \mu \leq 1$ или знакопеременная частотная функция при $1 < \mu \leq 2$, $G_{0,2}(\omega)$ – спектральный вклад в нее начального участка соответствующей функции $D_\mu(\tau)$ на интервале $0 \leq \tau \leq \tau_2$. $G(\omega)$ вычисляется по аналитическим выражениям, приведенным в [10], а $G_{0,2}(\omega)$ – по соотношениям (4)–(7). При этом для определения $G_{0,2}(\omega)$ в указанных соотношениях τ_1 необходимо заменить на τ_2 .

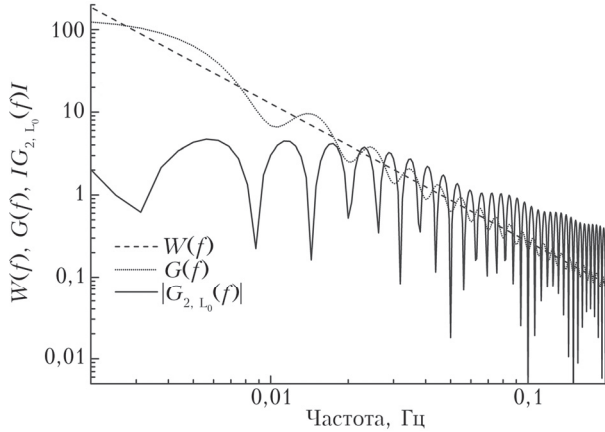


Рис. 4. Нормированные спектры СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$ при $\mu = 2/3$, $L_0 = 100$ с и модуль спектрального вклада $G_{2,L_0}(f)$ «конечного» участка СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_2 = 80$ с до L_0

В итоге результаты проведенных расчетов $G_{2,L_0\text{арг}}(\omega)$ хорошо совпадают с полученными численными методами (оставим этот вывод без иллюстрации). Их точностные характеристики подобны таковым при аппроксимации знакопеременных функций типа $G_{0,1}(\omega)$ и $G_{1,2}(\omega)$. Так, относительные ошибки могут быть велики вблизи перехода $G_{2,L_0}(\omega)$ через ноль даже при существенном уменьшении абсолютных ошибок. Такие увеличения наблюдаются достаточно редко и лишь на малых частотных интервалах и не приводят к значимым отклонениям графика $G_{2,L_0\text{арг}}(\omega)$ от хода $G_{2,L_0}(\omega)$.

Аппроксимационные аналитические выражения для $G_{2,L_0\text{арг}}(\omega)$ можно записать и в виде

$$G_{2,L_0}(\omega) \approx G_{2,L_0\text{арг}}(\omega) = G_{\text{арг}}(\omega)_{\tau_2 L_0} + \Delta G_{2,L_0}(\omega), \quad (13)$$

где $\Delta G_{2,L_0}(\omega) = -\sigma^2(1-\alpha_2^\mu)\sin\beta_2/\pi\omega$;

$$G_{\text{арг}}(\omega)_{\tau_2 L_0} = \begin{cases} \frac{C^2 L_0^{\mu+1} \mu}{2\pi} \left[\frac{1-\alpha_2^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{\beta_0^2 - \alpha_2^{\mu+1} \beta_2^2}{6(\mu+3)} + \frac{\beta_0^4 - \alpha_2^{\mu+1} \beta_2^4}{120(\mu+5)} \right], & \omega \leq \omega_L, \\ \frac{C^2 L_0^{\mu-1} \mu}{2\pi \omega^2} \left[\alpha_2^{\mu-1} \left(\cos\beta_2 - \frac{(\mu-1)}{\beta_2} \sin\beta_2 \right) - \left(\cos\beta_0 - \frac{(\mu-1)}{\beta_0} \sin\beta_0 \right) \right], & \omega > \omega_{b2}, \end{cases}$$

$\omega_L = \omega_b$ из выражения (7) при замене τ_1 на L_0 , а $\omega_{b2} = \pi/2\tau_2$.

Для определения $G_{\text{арг}}(\omega)_{\tau_2 L_0}$ на частотах $\omega_L < \omega \leq \omega_{b2}$ можно использовать любое из приведенных соотношений. Но хорошая точность аппроксимации при этом не гарантируется. Более правильный выбор одной переходной частоты затруднен из-за большого количества возможных комбинаций значений τ_2 и L_0 . Поэтому раздельное вычисление $G(\omega)$ и $G_{0,2\text{арг}}(\omega)$ с дальнейшим формированием их разности предпочтительнее. С другой стороны,

соотношения для $G_{2,L_0}(\omega)$ в виде (13) улучшают представление о поведении этих спектральных вкладов на большей части частотного диапазона. Также заметим, что частные случаи (13) для $\mu = 1$ и 2 при использовании нижних соотношений в определении $G_{\text{арг}}(\omega)_{\tau_2 L_0}$ тождественны приведенным выше точным аналитическим соотношениям для спектральных вкладов $G_{2,L_0}(\omega)$.

На рис. 5 для степенной СФ с $\mu = 2/3$ представлены соответствующие положительные значения спектров СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$, а также знакопеременные спектральные вклады в $G(f)$ ее начального $G_{0,1}(f)$, срединного $G_{1,2}(f)$ и конечного $G_{2,L_0}(f)$ участков. Длительность этих интервалов характеризовалась следующими значениями: $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 80$ с и $L_0 = 100$ с. Хорошо виден процесс формирования строго положительной функции $G(f)$ из ее аддитивных знакопеременных составляющих.

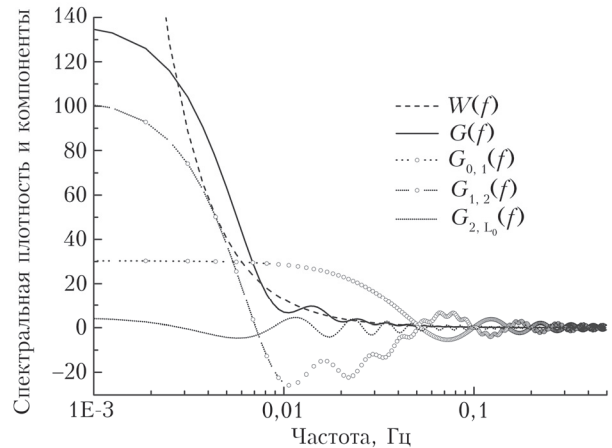


Рис. 5. Нормированные спектры СПСП $W(f)$, ССП $G(f)$ и спектральные вклады $G_{0,1}(f)$, $G_{1,2}(f)$, $G_{2,L_0}(f)$ для $\mu = 2/3$ и $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 80$ с, $L_0 = 100$ с

Вернемся к получению соотношений для спектральных вкладов различных участков многомасштабных структур на примере приведенной ранее трехсоставной функции $D_{\text{III}}(\tau)$, которая в итоге преобразуется в эквивалентную форму, состоящую из двух простых степенных компонент $D_{\mu 1}(\tau)$ и $D_{\mu 2}(\tau)$ вида (2). Из изложенного выше материала вытекают следующие рекомендации.

Так, при нахождении спектрального вклада $G_{0,1}(\omega)$ начального участка функции $D_{\text{III}}(\tau)$ на интервале τ от 0 до τ_1 возможно несколько вариантов.

В простейшем случае ($\tau_1 \leq l_0$) следует использовать только функцию $D_{\mu 1}(\tau)$. При вычислении $G_{0,1}(\omega)$ целесообразно применять аппроксимационные соотношения для $G_{0,1\text{арг}}(\omega)$ в форме (5)–(7). Но прежде структурную характеристику C^2 необходимо умножить на весовой коэффициент l_0^β , а масштаб L_0 заменить на L_1 .

Если $l_0 < \tau_1 \leq L_0$, то используем обе функции $D_{\mu 1}(\tau)$ и $D_{\mu 2}(\tau)$. По $D_{\mu 1}(\tau)$ вычисляем спектральный

вклад ее начального участка от 0 до l_0 , который соответствует аналогичному интервалу функции $D_{III}(\tau)$. Затем определяем вклад среднего участка второй функции $D_{\mu 2}(\tau)$ от l_0 до τ_1 . Суммирование результатов дает искомый частотный вклад $G_{0,1}(\omega)$ начального участка функции $D_{III}(\tau)$. Если $\tau_1 = L_0$, то в итоге получаем спектральную характеристику всей трехсоставной структуры.

При нахождении же спектрального вклада $G_{1,2}(\omega)$ среднего участка функции $D_{III}(\tau)$ на интервале от τ_1 до τ_2 возможны следующие варианты. Если τ_1 и τ_2 находятся внутри интервала от 0 до l_0 , то для получения искомого результата достаточно, следуя рекомендациям соответствующего раздела, вычислить спектральный вклад среднего участка простой степенной функции $D_{\mu 1}(\tau)$. Аналогично, если $l_0 < \tau_1 < \tau_2 \leq L_0$, то используем только $D_{\mu 2}(\tau)$. В противном случае сначала вычисляем спектральный вклад среднего участка функции $D_{\mu 1}(\tau)$ от τ_1 до l_0 . Затем определяем вклад участка $D_{\mu 2}(\tau)$ от l_0 до τ_2 . Суммирование результатов дает искомую спектральную характеристику $G_{1,2}(\omega)$ «среднего» участка трехсоставной функции $D_{III}(\tau)$.

В заключение отметим, что представленные результаты можно распространить и на случай более сложных многосоставных функций.

Заключение

Приведено общее выражение для вычисления спектральных вкладов $G_{0,1}(\omega)$ начальных участков степенной СФ ССП $D_{\mu}(\tau)$ на интервале $|\tau| \leq \tau_1 < L_0$ при $0 < \mu \leq 1$ в спектральной плотности $G(\omega)$. Показано, что $G_{0,1}(\omega) = G(\omega)_{\tau_1} + \Delta G_{0,1}(\omega)$, где $G(\omega)_{\tau_1}$ можно формально считать спектральной плотностью, соответствующей насыщению СФ $D_{\mu}(\tau)$ при $\tau = \tau_1$. Зависимость $G(\omega)_{\tau_1}$ от частоты подобна зависимости спектральной плотности $G(\omega)$ при замене характерного масштаба L_0 на τ_1 ; $\Delta G_{0,1}(\omega)$ — знакопеременная функция частоты с параметрами μ , L_0 и τ_1 , что всегда приводит к отрицательным значениям части общего спектрального вклада $G_{0,1}(\omega)$. При этом выполняется $G_{0,1}(\omega) = O(\omega^{-1})$, $\omega \rightarrow \infty$.

Все вышеизложенное справедливо и для степенной функции $D_{\mu}(\tau)$ при $1 < \mu \leq 2$. Но в этом случае $D_{\mu}(\tau)$ не является СФ ССП, а соответствующая ей функция $G(\omega)$, вычисленная по соотношениям из [10], не является спектральной плотностью. Поэтому составляющая $G(\omega)_{\tau_1}$ изначально принимает отрицательные значения, а ее асимптотика практически не зависит от μ и выполняется $G(\omega)_{\tau_1} = O(\omega^{-2})$, $\omega \rightarrow \infty$. Однако асимптотическое поведение всего вклада $G_{0,1}(\omega)$ из-за наличия второго члена такое же, как и для $0 < \mu \leq 1$.

Также получено простое аналитическое выражение для $G_{0,1\text{арг}}(\omega)$ при $0 < \mu \leq 2$, которое с хорошей точностью описывает поведение спектрального вклада $G_{0,1}(\omega)$ на всем частотном интервале от 0 до ∞ и для большинства значимых на практике величин L_0 , τ_1 .

Более сложную, но похожую частотную структуру имеют спектральные вклады $G_{1,2}(\omega)$ средних участков степенной функции $D_{\mu}(\tau)$ (область задания $\tau_1 \leq |\tau| \leq \tau_2 < L_0$) и спектральные вклады $G_{2,L_0}(\omega)$ ее конечных участков (область задания $\tau_2 \leq |\tau| \leq L_0$). Они тоже являются знакопеременными функциями с асимптотическим поведением типа $\sim O(\omega^{-1})$, $\omega \rightarrow \infty$, независимо от конкретного значения параметра μ из диапазона $0 < \mu \leq 2$.

На основе выражения $G_{0,1\text{арг}}(\omega)$ получены аналитические соотношения, которые с хорошей точностью описывают поведение вышеуказанных спектральных вкладов $G_{1,2}(\omega)$, $G_{2,L_0}(\omega)$ на всем частотном интервале при $0 < \mu \leq 2$ и для большинства значимых на практике величин L_0 , τ_1 , τ_2 . Все приведенные аппроксимационные зависимости $G_{0,1\text{арг}}(\omega)$, $G_{1,2\text{арг}}(\omega)$ и $G_{2,L_0\text{арг}}(\omega)$ рекомендуются для широкого практического использования. Частные случаи этих соотношений для $\mu = 1$ и 2 тождественны соответствующим точным аналитическим выражениям. Также они подтверждают выводы об их асимптотическом частотном поведении, полученные численными методами.

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. Юшков В.П. Структурная функция энтропии и масштабы турбулентности // Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2012. № 4. С. 62–68.
4. Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 359 с.
5. Гладких В.А., Невзорова И.В., Одинцов С.Л. Статистика внешних масштабов турбулентности в приземном слое атмосферы // Оптика атмосф. и океана. 2019. Т. 32, № 3. С. 212–220; Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L. Statistics of outer turbulence scales in the surface air layer // Atmos. Ocean. Opt. 2019. V. 32, N 4. P. 450–458.
6. Рапопорт В.О., Зиничев В.А., Митяков Н.А., Сазонов Ю.А., Выборнов Ф.И., Рыков Н.А. Исследование ветровых характеристик атмосферной турбулентности с помощью многолучевого содара // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. XLVI, № 3. С. 192–199.
7. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
8. Федоров В.А. Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями. Часть 1. Показатель степени меньше единицы // Оптика атмосф. и океана. 2018. Т. 31, № 12. С. 955–961; Fedorov V.A. Spectral contributions of sections of the power-law structure function of random processes with stationary increments: Part 1. The exponent is less than unity // Atmos. Ocean. Opt. 2019. V. 32, N 3. P. 235–241.
9. Федоров В.А. Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями. Часть 2. Показатель степени больше единицы // Оптика атмосф. и океана. 2019. Т. 32, № 1. С. 5–10; Fedorov V.A. Spectral contributions of sections of power-law structure

function of random processes with stationary increments: Part 2. The exponent is greater than unity // Atmos. Ocean. Opt. 2019. V. 32, N 3. P. 242–247.

10. Федоров В.А. Спектральная плотность стационарных случайных процессов со степенной структурной функ-

цией // Оптика атмосф. и океана. 2020. Т. 33, № 2. С. 95–103.

11. Бартепьев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL (Ч. 3). М.: Диалог-МИФИ, 2001. 368 с.

V.A. Fedorov. Spectral contributions from sections of the power-law structure function of stationary random processes.

The frequency behavior of spectral contributions from initial, central, and “final” sections of the power-law structure function to the spectral density of a stationary random process is considered. Their oscillating alternating-sign frequency character is demonstrated. As the frequency increases, the rate of decrease in the absolute values of these contributions approaches the inversely proportional dependence.

Simple analytical approximated relationships describing the frequency behavior of the spectral contributions are suggested and analyzed. They are recommended for wide practical use. The application of the obtained relationships for more complex composite power-law functions is considered.