УДК 160.1

РЕВОЛЮЦИЯ В МАТЕМАТИКЕ?

ЧТО НА САМОМ ДЕЛЕ ПРОИЗОШЛО СТО ЛЕТ НАЗАД И ПОЧЕМУ ЭТО ВАЖНО СЕГОДНЯ*

Фрэнк Квинн

Основная цель статьи – показать, что в следствиях революции в математике были допущены печальные следствия в математическом образовании и маргинализации сердцевины математики. Разумные меры, в случае распознавания болезни, могут позволить избавиться от этих следствий.

Ключевые слова: философия, революция, математика, методология, логика, определение, доказательство, образование.

Все физические науки прошли через «революции»: мучительные переходы, при которых радикально меняются методы, становящиеся более мощными. Хотя это не понято в достаточной степени, то же самое произошло в математике где-то между 1890 и 1930 гг. В первой части статьи кратко описываются происходившие изменения, и то, почему их можно квалифицировать как «революцию», а во второй части описывается беспорядок и сопротивление этим изменениям.

Однако, события в математике часто отличны от событий в естественных науках. Там большая часть старого материала признается неверной и отбрасывается, в то время как старая математика, хотя и нуждается в точном апгрейде, но по большей части остается верной. Естественные науки были полностью преобразованы, в то время как математика разделилась, с сохранившейся, хотя и радикально измененной сердцевиной, на множество прикладных областей, но математические науки за пределами сердцевины остались относительно неизменными. Удивительное разли-

---

* *Квинн Ф.* / Notices of the AMS (January 2012). Перевод с англ. В.В. Целищева. Нумерация ссылок сохранена в соответствии с оригиналом.

чие состоит в том, что естественнонаучные революции были явно ощутимы, в то время как значение такого же события осталось существенно незамеченным. В разделе «Незаметность» исследуется факторы, внесшие вклад в эту ситуацию, и рассматриваются поворотные моменты, которые могли привести к изменениям.

Основная суть данной статьи состоит не в том, что революция имела место, а в печальных следствиях упущения ее из виду. Во-первых, школьное математическое образование все еще основано на методологии XIX в., и мне кажется, что мы не получим удовлетворительного результата, если не будет соответствующих изменений [9]. Во-вторых, математическое сообщество приспособилось к социальному и интеллектуальному окружению середины и конца XX в., и это окружение изменяется в направлении, которое способствует маргинализации сердцевины математики. Но эта сердцевина является скелетом, поддерживающим мускулы и силы науки и технологии; маргинализация влечет аналог научного остеопороза. Разумные меры [2] позволили бы избежать этого, но только в случае распознавания болезни.

Революция

В этом разделе описываются изменения, происшедшие в 1890–1930 гг., препоны, возражения, и то, почему изменения остались почти незаметными. Вопреки сопротивлению, они были невероятно успешными. Молодые математики голосовали за них ногами, и, несмотря на сопротивление некоторых представителей старой гвардии, большая часть математического сообщества сменило направление за несколько поколений.

Современная методология сердцевины

В первом приближении методы естественных наук заключаются в «нахождении объяснения и тщательной его проверке», в то время как сердцевина современной математики заключается в «нахождении объяснения без нарушения правил». Критерий значимости в обоих случаях радикально различны: естественные науки зависят от сравнения с внешней реальностью, в то время математика замкнута на себя (internal).

Обычная мудрость заключается в том, что математика всегда зависит от логической аргументации, свободной от ошибок, но это не полная правда. Весьма легко совершать ошибки с бесконечно малыми, бесконечными рядами, непрерывностью, дифференцируемостью, и т.д., и вполне возможно получение ошибочных заключения даже о треугольниках в евклидовой геометрии. Когда используются интуитивные формулировки, не существует надежных, основанных на правилах, способов обнаружения ошибок, и поэтому на практике неоднозначности и ошибки исправляются с помощью внешних критериев, которые включают проверки принятых заключений, обратную связь от авторитетов, и сравнение с физической реальностью. Другими словами, перед трансформацией математика была в некотором смысле естественнонаучной дисциплиной.

Прорыв был обеспечен с развитием системы правил и процедур, которые действительно работали, в том смысле, что если следовать им тщательно, тогда аргументы без нарушения правил дают совершенно надежные заключения. Например, стало возможным убедиться в том, что некоторые интуитивно возмутительные вещи, тем не менее, верны. Веерштрассовская нигде не дифференцируемая функция (1872 г.) и ужасающая заполняющая пространство кривая Пеано (1890 г.) были ранними примерами, и с тех пор появилось много странных вещей. Не существует абстрактных резонов (то есть, нет доказательств), что такая полезная система правил существует, и нет никакой уверенности в том, что мы найдем ее. Однако она все же существует, и через тысячу лет починок и интенсивного давления со стороны естественных наук в ходе прогресса мы наконец-то нашли ее. Главными компонентами новых методов были следующие:

Точные определения: старые определения обычно описывали, какие вещи предполагаются, и что они означают, а извлечение свойств полагалось в определенной степени на интуицию и физический опыт. Современные определения полностью самодостаточны, и единственные свойства, которые могут быть приписаны объекту, это те свойства, которые могут быть строго дедуцированы из определения.

Логически полные доказательства: старые доказательства могли включать в себя апелляцию к физической интуиции (например, о непрерывности и действительных числах), авторитету (например, «Эйлер желал это, стало быть, все ОК), и свободное установление альтернатив («это наверняка все возможности, поскольку я не могу вообразить других»). Современные доказательства требуют, чтобы каждый шаг был обоснован.

Современные в этом смысле определения были развиты в конце 1800-х. Потребовалось некоторое время для того, чтобы научиться их использовать: понять, как упаковывать разум и эксперимент в перечень аксиом, как делать тонкую настройку на оптимизацию их свойств, и как усматривать возможности новой организации материала с помощью новых определений. Хорошо оптимизированные современные определения имеют неожиданные преимущества. Они дают доступ к материалу, который (насколько мы знаем) не отражен в физическом мире. По настоящему «добротное» определение часто имеет логические следствия, которые являются непредвиденными или противоречащими интуиции. Значительная часть современной математики построена на этих неожиданных бонусах, и они были бы отвергнуты в старом, более естественнонаучном подходе. Наконец, современные определения более доступны новым пользователям. При работе прямо с определениями может быть развита интуиция, и это более быстрый и надежный путь, чем все увязывать с физическим опытом.

Логически полные доказательства были развиты Фреге и другими в начале 1880-х и Гилбертом после 1890-х годов, и (как мне кажется) закончились около 1930 года. Опять-таки, потребовалось некоторое время научиться использовать эти результаты: «официальное» описание в виде последовательности утверждений, полученных логическими операциями, и т.д., запутанно и расплывчато, но были развиты способы сжатия и спрямления доказательств без потери надежности. Трудно описать в точности, что приемлемо в качестве современного доказательства, потому что ключевой критерий. «без потери надежности» существенно зависит от предыдущего и настоящего опыта. Ясно, что более важным является, что именно *не* приемлемо: никакой апелляции к авторитету или физической интуиции, никаких «доказательств примером», и никаких прыжков веры, какими бы разумными они ни казались. И с определениями этот подход привел к неожиданным преимуществам. Попытки восполнить пробелы в первых аппроксимациях к доказательству могут привести к заключениям, которые трудно вообразимы и о которых трудно было даже догадываться. Они также делают более доступными исследования: рядовые математики могут использовать новые методы с доверием и эффективностью, в то время как успех в случае старых методов был ограничен по большей части элитой.

Препятствия

По мере того как математика становилась более приспособленной к своему предмету, она теряла особенности, которые были важны для многих людей.

Новая методология менее доступна тем, кто не является пользователями. Определения в старом стиле, например, обычно соотносили содержание с физическим опытом, так что многие люди могли увязать их со своими представлениями. *Пользователи* же полагали эти связи помехой в функционировании, и они могли приобретать *эффективную* интуицию гораздо быстрее из точных определений. Но для понимания современных определений они должны использоваться, так что они непонятны для тех, кто не является пользователем. Препятствие тут состоит в том, что последние видят только потери: старая дисфункциональность была невидимой, в то время как новая непонятность очевидна.

Новая методология менее связана с физической реальностью. Например, в физическом мире ничего не может быть описано с совершенной точностью, так что основанное на полном следовании правилам мышление не является тут подходящим. На самом деле, история науки насыщена озадачивающими грубыми ошибками из-за излишеств дедуктивного мышления; см. раздел «Упущенные возможности Гильберта» для иллюстрации этого утверждения. Профессиональная практика приспособилось к ситуации через использование математических моделей: математика применяется к модели, но больше даже не претендует говорить нечто о соответствии моделей реальности. Предыдущая связь с реальностью могла быть иллюзией, но люди рассматривали ее как препятствие, которое нужно обойти. В другом направлении, сердцевина математики больше не принимает проверенные «извне» (экспериментальные) результаты в качестве «известных», потому что это приведет к тем же самым ограничениям на дедуктивное мышление, которое необходимо в науке. Даже кажущиеся самыми ничтожными изъяны рано или поздно приведут к коллапсу доказательств от противного и подобных методов. На практике это ведет к разделению «сердцевины» математики и «математической (естественной) науки» (mathematical science). Например, если численная аппроксимация потока жидкости как будто воспроизводит экспериментальные наблюдения, это может считаться свидетельством того, что схема аппроксимации удачна. Это заключение не имеет определенности современного доказательства и не может быть принято как «известное» в том же смысле, как это принято в сердцевине математики. Однако, это разумное *естественнонаучное* (scientific) заключение, вполне уместное для «математической (естественной) *науки*». Подобным же образом гипотеза Римана невероятно хорошо проверена. Для естественнонаучных целей это солидный факт, но он не доказан и остается опасным для использования в сердцевине. Другой взгляд на это развитие заключается в том, что по мере того как математические методы все больше расходятся с естественно-научными, математика все сильнее разделяется на сердцевину, которая отделена от физической науки для эксплуатации своих методов, и математическую (естественную) науку, которая принимает ограничения для того, чтобы сохранить связь с реальностью. Препятствие тут состоит в том, что новая сила в сердцевине и поддержка, которую она оказывает в прикладных областях, не видна посторонним, в то время как отделение от естественных наук бросается в глаза. Люди гадают, а не является ли сердцевина математики бесполезным академическим упражнением, в то время как математическая (естественная) наука является вещью стоящей.

Сопротивление

Анри Пуанкаре был наиболее видным и четким оппонентом новых методов. См. [6]. Он полагал, что выведение Дедекиндом действительных чисел из натуральных было смертельной концептуальной ошибкой, потому что оно угрожало связям с реальностью и интуитивному пониманию непрерывности. Некоторые из споров были весьма горячими; иллюстрированная книга Logicomix [1] драматически иллюстрирует суматоху тех времен (хотя и делает это не очень четко). Исследовательские работы [3] более обстоятельны, но дают ту же самую картину.

По мере того, как совершался переход, споры становились все более горячими, но одновременно более ограниченными. Вначале традиционалисты были глубоко оскорблены, но не испуганы. Но поскольку современные методы не имели внешней проверки, они зависели существенно от полностью надежных исходных данных. Старый материал отфильтровывался для поддержки этого предприятия, и многие старые теоремы были переклассифицированы в «недоказанные», некоторые методы стали неприемлемы для публикаций, и довольно много способов рассмотрения вопросов были отвергнуты как опасно неточные. Вполне понятно, что многие знаменитые математики XIX столетия были в ярости от таких тенденций. Однако битвы велись от имени этих математиков, а не ими самими. Например, монументальное развитие Пуанкаре теории многообразий было полностью интуитивным, и мы сейчас знаем, что некоторые из его основных интуиций были ошибочными. Но в начале XX в. только дурак осмелился бы открыто критиковать Пуанкаре, и он не смог бы ответить на неявные упреки. В результате споры касались абстракций вроде «креативности» и «понимания», часто в контексте образования.

На более общем уровне естественнонаучные вопросы о новых методах были вполне разумными. Решающая важность сверок в физике с внешней реальностью была хорошо усвоенным уроком, и аналогичные процессы в биологии и химии были на подходе («Происхождение видов» Дарвина появилось в 1859 г., периодическая таблица Менделеева в 1869 г.) Каким же образом математическое использование скомпрометированного «чистого разума» могло быть хорошей вещью?

Большинство из различных философских школ были и остаются не убеждёнными в пользе новых методов. Философы контролируют такие слова как «реальность», «знание», «бесконечность», «значение», «истина» и даже «число», и эти термины интерпретировались ими недружественным образом по отношению к новой математике. Например, если математическая идея не проявляет себя явным образом в физическом мире, как она может быть «реальной»? А если она не реальна, какое у нее моет быть «значение», и какой смысл будет в утверждении о «знании» этой концепции? На практике математики все-таки обнаруживают, что их мир имеет смысл и по крайней мере психологическую реальность. Если бы философия была наукой, тогда это было бы вызовом с целью лучшей интерпретации термина «реальность». Но философия не наука. Аргументы в ней подпорчены неопределенностью и культурными и лингвистическими предпочтениями. «Обретение значимости» (validation) по большей части есть дело убеждения и веры, а не функциональности, так что есть механизмы для их корректирования и обнаружения недостатков. Таким образом, вместо того чтобы очистить значение термина «реальность» до уровня приспособления к тому, как люди употребляют его, философы разделились на Платонистов и не-Платонистов, в зависимости от того, в зависимости от того, верят ли они, что математики подгоняют под них свою собственную интерпретацию. Платонистский взгляд трудно защищать, поскольку математики честно не подгоняют к себе обычные значения «реальности» (ср. путаницу в обзоре Linnebo [5]). Не-Платонистский взгляд состоит существенно в том, что математики вводят людей в заблуждение. Ни один из этих взглядов не является полезным для математиков. Для того чтобы осуществить реальный прогресс, математики вынуждены были порвать с философией, и как при всяком разводе, обе стороны имеют претензии друг к другу[1].

[1] Есть исключения, но у меня в этом случае есть такие сомнения: не являются ли эти исключения примерами других аспектов развода. Один партнер любит потому, что полон фантазий из хороших времен. См. раздел «Другие взгляды» в [7] для примеров.

Школьное сообщество было и остается антагонистичным к новой методологии. Одной из причин этого является то, что традиционные математики, среди них особенно выделяется Феликс Клейн, были чрезвычайно влиятельными в образовательной реформе в начале XX в. Клейн основал ICMI [4], образовательную структуру Международного Математического Союза. Его книга 1908 года «Элементарная математика с точки зрения высшей», виртуозный пример методов XIX века, сделал много для закрепления их образовании. «Проект Клейна» [4] является современным международным проектом в обновлении *тематики* книги Клейна, но отнюдь не обновления методологии[2]. Короче, традиционалисты потерпели поражение в профессиональном сообществе, но одержали победу в образовании. Неудача «new math» в 1960-е и 1970-е годы рассматривалась как еще одно подтверждение, что современная математика не подходит для детей. Это было едва ли справедливое сопоставление методологий, поскольку оно было плохо проведено, и многие традиционалисты утвердились в решении, что реформа пойдет только через их трупы. Однако опыт позволил преодолеть антагонизм, и оппозиция в настоящее время стала проявлением глубоко спрятанного акта веры.

Многие ученые и инженеры опираются на математику, но ее надежность скорее результат прозрачности, а не понимания, и они часто пренебрегают сердцевиной математики как бессмысленным формализмом и одержимостью деталями. Эта культивируемая позиция, отражающая ощущение силы в их областях, и мировоззрение, не выходящее практически за пределы области, но она поощряет оппозицию в элементарной математике и философии.

На самом деле, враждебность к математике является эндемической в нашей культуре. Вообразим такой разговор:

A: Что ты делаешь?
B: Я …
A: О, я ненавижу это.

Идеально ответ мог бы быть ограничен таким заполнением пропусков как «серийный убийца», «детский порнограф», и может быть, «политик», но кажется сработает и «математик». Достаточно распространенным обстоятельством является то, что многие из нас не очень-то готовы

[2] Для детального ознакомления см. очерк “Updating Klein’s Elementary Mathematics from Advanced Viewpoint”: Content Only, or the Viewpoint as Well” в [10].

признаться в том, что они математики. Поль Халмош, по слухам, говорил посторонним, что занимается крышами и сайдингом!

Незаметность

Как и большинство людей с некоторым знанием истории математики, я слышал о «кризисе оснований», который случился около ста лет назад. Однако мое первое слабое подозрение в том, что случилось что-то воистину революционное, зародилось на международной конференции по доказательству в математическом образовании[3]. Утонченные преподаватели описывали доказательство таким образом, что я не мог распознать в нем собственно доказательства, и мое описание его [8], основанное на анализе современной практики [7], было чуждо их описанию. После тщательного чтения и изучения проблемы стало ясно, что образователи основывали свои идеи на проницательном анализе профессиональной практики XIX в. Это не было непониманием современной математики, а было правильным пониманием предсовременной математики. Разрыв происходил от изменений в самой математике, изменений, о которых они не подозревали.

Не было такого, чтобы кто-либо не осознавал научных революций. Первая подсекция предполагает, что это вопрос освещения в специализированной печати, и незаметность математического перехода в некотором смысле обязана неудаче в пиаре. Чтобы сделать это более конкретным, вторая секция описывает некоторые возможности пиара, которые были в распоряжении Гильберта, но которыми он не воспользовался.

Замещение и вера

Научные революции по своему характеру были методологическими, но привлекает внимание именно заключения. Коперниканская революция например, известна по заключению, в то время спорному, что Земля вращается вокруг Солнца, а дарвиновская революция в биологии известна по спорному заключению о происхождении человека. В обоих случаях реальным достижением были методологии, достаточно эффективные чтобы сделать альтернативные заключения неприемлемыми, но методологии сложные и технические. Важнейшие заключения служили публичным замещением для методологии.

[3] ICMI Study 19, Taipei, May 2009.

Эти замещения предполагают несколько трудностей для математиков. Во-первых, математические заключения не являются уж такими волнующими, чтобы обеспечить в высшей степени очевидные замены. Во-вторых, заключения, использующиеся для продвижения математики, почти всегда являются приложениями к естественным наукам, медицине и инженерном деле. Они являются замещением для математической науки, в которой достижения математики демонстрируются выпукло, но не для сердцевины. Что касается сердцевины, усилия использовать для нее замещения могут привести к отрицательным результатам. Наконец, когда описываются результаты в области сердцевины, такие как теорема Ферма или гипотеза Пуанкаре, они – в силу необходимости описываются в эвристических терминах, которые совместимы с мировоззрением XIX в. Описания скрывают решающую роль современной методологии, так что они не являются замещением для нее. Мы увидим, что есть метаматематические заключения, которые могли бы служить одновременной и замещением для современных методов, но они не были использованы.

Естественнонаучные проблемы также представляют проблемы с верой. Пользователь принимает более эффективные методы, а непользователи часто отвергают вещи, которые им не нравятся (например, эволюция), независимо от выгод технического сообщества. Методы сердцевины, такие как полностью точные определения (с использованием аксиом) и тщательные логические аргументы хорошо известны, но многие преподаватели, философы, физики, инженеры прикладные математики отвергают их как нечто такое, что не является необходимым. Есть случаи, в которых физические науки неспособны преодолеть свои чувства неприятия, так что даже очень ясный случай современной математики может не преуспеть.

Упущенные Гильбертом возможности

Давид Гильберт был наиболее сильным и в высшей степени известным сторонником новых методов в переходный период, и в силу этого часто был вовлечен в споры. Я описываю несколько ситуаций, в которых Гильберт мог бы переформатировать дебаты и обеспечить метаматематические замены, которые смогли бы привести к более ясной точке зрения сегодня. Исторический контекст используется здесь для достижения большей конкретности, но никак в упрек Гильберту. В конце концов, эти возможности все еще маячат перед нами даже в вековой ретроспективе. Первый спор случился в начале карьеры Гильберта и касался использования закона «исключённого третьего» (доказательства от противного). Его ответ возражениям против такого использования состоял в убеждении, что отказать математикам в таком использовании значило бы то же, что отказать «боксеру в использовании его кулаков»; верный, но не очень ясный тезис или вызов. Если бы он сказал следующее, это вызвало бы негодование:

Аргументы с использованием закона исключенного третьего нереализуемы во многих областях знания, но они абсолютно необходимы в математике. В самом деле, мы могли бы *определить* математику как область, в которой аргументы подобного рода значимы. Вместо того чтобы дебатировать о том, верны ли эти аргументы, следовало бы исследовать ограничения, которые они налагают на наш предмет.

В то время математика в общем рассматривалась как абстракция физической реальности, и было бы нарушением всех приличий предполагать, что логическая техника должна иметь приоритет в оформлении области. Но на самом деле ничто из физического не может быть описано достаточно точно, чтобы сделать аргументы с использованием закона исключенного третьего надежными, и именно это обстоятельство привело к расколу математики. В прикладных областях эти аргументы умерялись мудростью и опытом. В сердцевине связь с реальностью стала косвенной, с использованием моделей как промежуточного звена, главным образом для того, чтобы обеспечить безопасное окружение для аргументов с использованием закона исключенного третьего.

Такое утверждение могло бы перенаправить дебаты, сделав успешное применение этих аргументов замещением для методов сердцевины. Это позволило бы также разрешить споры довольно гладким образом. Так получилось, что этот вопрос был постоянной головной болью для Гильберта; интуиционистская школа Брауэра оживила этот спор в 1930-е гг., и он угас скорее в силу отсутствия интереса, чем от ясного разрешения.

Далее, аксиоматическая формулировка Гильбертом оснований геометрии в 1899 г. в точности специфицировала, как точки, прямые, и т.д. *взаимодействуют* друг с другом, но не то, чем они «являются» и как их взаимодействие объясняется физической интуицией. Сам Гильберт указывал, что это отрывает математику от реальности, потому что можно интерпретировать «точку» как «стул», и при этом аксиомы останутся верными. Это опять-таки спровоцировало возражения. Он мог бы указать, что огромным преимуществом является то, что можно использовать единую математическую конструкцию для моделирования многих физических ситуаций. Это позволило бы отделить замещение для математики в отдельную независимую область. Широко распространенное употребление точного моделирования совмещалось бы тогда с принятием независимости математики. Так уж случилось, что моделирование широко распространилось в профессиональном сообществе, не обладая в его глазах каким-то особым подобным значением.

Знаменитые проблемы Гильберта 1900 г. были мощным техническим вызовом, который запустил развитие множества точных методов работы с бесконечностью. Однако немногие из них, которые стали рассматриваться как замещение для новых способов мышления (например, вторая проблема о непротиворечивости математики), не преуспели особо и изменения, которые позволили достигнуть результатов, остались по большей части невидимыми.

Другие дебаты касались использования аксиоматических определений и детальных логических аргументов. Они спровоцировали сильные возражения по поводу отсутствия реальности и значения, искусственной жесткости, формальной бессодержательной манипуляции символами. Гильберт мог бы ответить так:

Аксиоматические определения могут быть искусственными и бесполезными, но они также могут заключать в себе годы, а может быть и века трудных опытов, и новички могут извлечь из них надежную и эффективную интуицию. Подобным же образом, полностью детализированный аргумент может быть формальным и лишенным содержания, но полный охват всех деталей обычно углубляет понимание, и часто ведет к новым идеям. Полностью детализированные аргументы часто могут дать совершенно надежные заключения, а полная надежность существенна для успешного использования мощного, но хрупкого метода исключенного третьего.

Это могло бы быть признанием опасности формализации, но и установлением надежности в качестве замещения для высокоточной методологии и оспариваемого тезиса о нефизическом виде значения. Взамен этого, Гильберт принял клеветнические обвинения противников, говоря о «математике как игре на бумаге с бессмысленными символами в соответствии с некоторыми правилами». Гильберт также предположил, что эти математические методы могли бы быть прототипами для такого же развития в других науках. Такие вещи в то время были в моде. Артур Конан Дойл, например, поместил свои чрезвычайно популярные истории о Шерлоке Холмсе в мир, где действительно работает логика с законом исключенного третьего:

Когда вы элиминируете невозможное, что бы там ни оставалось, как бы они ни было невероятным, оно должно быть истинным. («Знак четырех»).

Вероятно, не так хорошо известно, что такого рода логика привела самого Дойла к сильной и недешевой вере в чудеса. Катастрофа с «N-лучами» Блондло (Blondlot) во Франции около 1904 г. все еще не считалась предостерегающей историей[4]. С тех пор было немало смущающих провалов благодаря излишне дедуктивному мышлению в науке. Примером этого является эпизод 1989 г. с «холодным термоядом», когда электрохимики Флейшман и Понс объяснили избыточную энергию в некоторых своих экспериментах. После устранения электрохимических объяснений они дедуцировали, что единственной альтернативой, которую они только могут вообразить, – водородная термоядерная реакция на электродах – должна быть истинной. Это стандартный ход в математике и рассказах Дойла, но плохой ход в естественных науках, потому что нет способа установления того, что исчерпаны все альтернативы. Хорошая *естественно-научная* практика потребовала бы от них проверки вывода о термояде, например, поиском радиации, которая должна быть побочным продуктом термояда. Отсутствие ее вернуло бы их назад к интересной электрохимии. Предположительно, они ошиблись в связи с использованием батарей, которые уже были до того в опытах, и излишняя энергия была результатом аккумуляции ее в этих предшествующих экспериментах. Но вместо рассмотрения этого варианта их полагание на силу дедукции привело к краху их карьеры и репутации.

---

4 (Из Wiki) – Renй Prosper Blondlot (1849-1930) был французским физиком, который заявлял об открытии им нового типа вскоре после открытия Рентгеном X-лучей. Он назвал их N-лучами. Blondlot пытался поляризовать X-лучи, и в ходе этих попыток сделал свое открытие. Дюжины других ученых подтвердили существование N-лучей в своих лабораториях. Однако N-лучей не существует. Как могли ошибаться ученые? Они обманывали сами себя, полагая, что видят то, чего на самом деле нет. Они видели то, что хотели видеть с помощью своих инструментов, а не то, что было на самом деле. (Прим. переводчика).

Современный взгляд состоит в том, что предложение Гильберта – а именно, что математическая дедукция может быть общим прототипом для науки – является ошибочным. Оно бросило тень сомнения на математическое развитие вместо того, чтобы обосновать его. Тем временем, достигнутая в математике очень высокая надежность осталась незамеченной. Подход с использованием аксиом и определений сделал математику более доступной. Сто лет назад оригинальные исследования был доступны только для элиты. Сегодня они осуществимы усилиями математиков весьма скромных учебных заведений. Это же относится к процедуре получения Ph.D. Опять-таки, этому огромному изменению никто не придал особого значения.

Окончательно возможности были упущены при обсуждении разногласий по поводу знания, значения и «истины». К 1920 г. поиски надежных оснований увязли в темных философских аргументах. Гильберт придал точное техническое значение понятию «истинно», а именно, «доказуемо из аксиом, непротиворечивость которых может быть показана». Но десятью годами позднее Гедель показал, что в обычной формулировке арифметики есть такие утверждения, противоречие которым невозможно представить, но не доказуемые в гильбертовом смысле. В частности, непротиворечивость системы не может быть доказана в рамках самой этой системы. Этот результат рассматривался как опровержение предложения Гильберта. По иронии судьбы, он имел те же самые практические следствия, потому что устанавливал «невозможность противоречия» в качестве точного математического значения «истины». Гильберт мог бы быть более точным в отношении глубинных целей, например:

Математика нуждается в точном определении «истины», которое является внутренним и доступным для математической верификации, и в частности, не ограниченным философией или воображаемыми связями с физической реальностью. Мы можем беспокоиться, что «означает» такое определение уже после того, как оно развито и показало успешность на практике.

В свете такого тезиса работа Геделя считалась бы скорее успешной модификацией, нежели опровержением[5]. С того времени точное внутрен-

[5] Сомнительно, чтобы как Гильберт, так и Гедель, приняли бы такую формулировку. Оба чувствовали, что аксиомы сердцевины математики должны быть «конкретными интуициями», что является сверхматематическим критерием. Их интерпретация «финитно-

нее значение для «истины» невероятно либерализовалось для профессиональной работы, но выгоды этого процесса вновь не были замечены.

Сводка

Переход в математике оказался таким неприметным, что никто и не понял его значимости. Феликс Клейн осудил новые методы в 1920-х гг., и поскольку его взгляды не только не подверглись опровержению, и им не был практически даже брошен вызов, аутсайдеры приняли их за факт. Историки, преподаватели, философы не ощутили на себе этого перехода, движимые инерцией трехтысячелетнего развития и отторгаемые технической сложностью современной практики.

Странно, но и математики также не осознали решающих изменений в своей области. Новички находят философские аргументы непостижимыми и не имеющими отношения к делу, и в последние десятилетия философия из вполне почтенного предприятия стала просто объектом насмешек и свидетельством маразма. Но этот процесс является заменой плохого объяснения отсутствием какого-либо объяснения вообще. Математики присоединились к рыбам и птицам, делающим нечто хорошо, но без какого-либо представления, как!

Сердцевина в зоне риска?

Большую часть XX в. математика поддерживалась в системе высшего образования. Сердцевина математики доминировала в этой системе, так что у математиков была безопасная ниша, так что они не зависели от понимания того, чем они занимаются. Однако эта ниша разрушается, и безопасность постепенно утрачивается.

Крупномасштабная проблема состоит в том, что ресурсные ограничения подтачивают способность высшего образования поддерживать фундаментальные исследования. Усиливается давление с целью увеличения образовательной продуктивности путем замены исследователей преподавателями за полцены. Математические департаменты с большой сервисной нагрузкой становятся уязвимыми. Есть также давление с целью усилить исследовательскую продуктивность, с последствиями, которые обсуждаются ниже.

го» была менее хорошо определена, и имела менее внутренний характер, чем это принято сейчас. См. Tait [11]. В этом отношении Гильберт и Гедель не были еще полностью современными.

Есть проблемы и с системой внешних грантов. В Соединенных Штатах внешняя поддержка сердцевины математики исходит исключительно от National Science Foundation (NSF). Желание показать что-то стоящее денег привело NSF к пожеланию «расширения контактов», и использование приложений в качестве замещения в продвижении математики привело к тому, что «приложения» стали по умолчанию интерпретацией «расширения контактов». Результатом стал постепенный сдвиг в сторону прикладных областей (и образование; см. ниже). Поскольку внешнее финансирование является главным показателем продуктивности, уменьшение поддержки сердцевины математик со стороны NSF привело к упадку активности в области сердцевины и в академических департаментах.

Еще одна проблема связана с изменениями в прикладной математике. Вплоть до конца XX в. прикладные математики обучались в рамках основных graduate программ, и имели знания современных методов и ценностей. Сегодня есть целые поколения, оторванные от сердцевины фундаментальной математики. Многие из них являются скорее учеными в области естественных наук, нежели математиками в современном смысле, и некоторые из них просто враждебны к методологии сердцевины математики. В то же самое время, требования со стороны естественных наук и инженерных областей, а также давление в сторону более впечатляющих исследований заставили многие академические департаменты сдвигаться в сторону прикладных исследований. В результате департаменты разделены в культурном отношении, и сердцевина математики оказывается все больше в невыгодном положении.

Последняя проблема касается разрыва между школьной математикой и высшим образованием. Школьная математика все еще твердо обитает в XIX в., и успехи учащихся в современных курсах очень низки. Огромные усилия тратятся на улучшение этой ситуации, но недавние перемены, такие как использование калькуляторов и упор на расплывчатое понимание в ущерб мастерству, еще более усугубили разрыв. Что-то надо менять. В идеальном случае, школьная математика должна оказаться в XX в. К несчастью, сообщество школьного преподавания Соединенных Штатов (программа K-12)[6] лучше организовано, более однородно, и гораздо сильнее политически. Внешнее финанси-

[6] K–12 (spoken as "k twelve", "k through twelve", or "k to twelve") – термин для начальной и средней школы. Выражение есть сокращение для kindergarten (K) от 4- до 6-летних до K-12 для 17- до 19-летних.

рование благосклонно к К-12. Для NFS это означает сдвиг в финансировании от исследовательских программ к образовательным программам, которые по настоящему враждебны к исследовательской методологии. Вполне возможно, что система К-12 может быть «улучшена», вынудив высшее образование вернуться к модели XIX в.

Суть всех этих примеров в том, что природа современной сердцевины математики должна быть понята лучше уже для того, что увидеть ее проблемы. А если проблемы не распознаны или к ним обращаются слишком поверхностно, тогда, по крайней мере, в Соединенных Штатах, сердцевина математики может стать маргинальной дисциплиной, и математический Золотой Век, начавшийся в XX веке, закончится в XXI веке.

Встает большой вопрос: почему маргинализация сердцевины будет проблемой, если никто не интересуется этим предметом? На самом деле, сердцевина математики обеспечивает жесткий скелет, который поддерживает мускулы науки, инженерного дела и прикладной математики. Это обстоятельство относительно не видно, потому что сердцевина не может взаимодействовать с внешним миром напрямую. Это взаимодействие проявляется медленно, и не будет немедленных проблем, если такое взаимодействие прекратится. Досовременная математика и современная естественно-математическая наука, с другой стороны, представляют наружную часть скелета: они находятся в прямом контакте с реальностью, но кладут сильные ограничения на размер и силу организма. Долговременные ограничения математического остеопороза таковы, что организм науки вернется в исходное состояние бактерии!

Рецепты для образования

Точка зрения, здесь изложенная[7], состоит в том, что современные методы были приняты, потому что они гораздо более эффективны на высоких уровнях. Если причины их успеха будут ясно поняты, тогда некоторые из этих методов могли бы быть приспособлены к элементарным уровням. Это и есть смысл «прибытия в XX век» в обсуждении выше, и самое меньше, это могло бы улучшить программы К-12 и преподавание в колледжах. Но можно сделать гораздо больше.

[7] Более пространно в [9] и [10].

Более конкретно, рассмотрим дроби. Обычно они преподносятся старомодным способом, через связь с физическим опытом. Это философски предпочтительно и «легче», но следование историческому образцу (см. дискуссию в разделе «Препятствия») нефункционально для большинства студентов. Если мы хотим, чтобы они действительно использовали дроби, тогда путь должен быть указан опытом сердцевины: использовать точное определение, которое поначалу выглядит неясно, но потом оно интернализируется через работу с ним, и при этом становится гораздо более эффективным, как только освоено. Такой подход предложен в [9] и разработан в некоторых очерках в [10]. Подобным же образом, в [8] я объясняю, как тщательное понимание природы современных доказательств может привести к большим успехам даже с арифметикой. (Это детально проиллюстрировано, но преподнесено уже с самого начала, а не как упражнения к тексту).

Еще один большой вопрос: может ли какая-либо версия этого подхода быть использована реальными детьми? Детей влечет мышление, основанное на правилах (подумайте об *играх*), и богатые приложения и успех в дальнейшем должны полной мерой компенсировать начальные неясности. Я подозреваю, что это будет большим вызовом больше преподавателям, чем детям. В качестве начальной точки должно быть признано значение математической революции, которая произошла сто лет назад, и видеть, что новые методы – правильно понятые – являются источником богатых ресурсов, а не вражеской угрозой.

Примечания

1. *Doxiadis A., Papadimitriou C., Paradatos A., and A. DiDonna*. Logicomix: An Epic Search for Truth. – Bloomsbury. – 2009.

2. *Everhart T., Green M., and Weidman S.* Math. Sciences 2025. – Notices of the AMS 58 (July 2011), 765.

3. *Gray J.* Plato’s Ghost: the Modernist Transformation of Mathematics. – Princeton University Press, 2008.

4. *International* Commission on Mathematical Instruction, http://mathunion.org/icmi/home-ICMI Klein Project http://www.kleinproject.org/.

5. *Linnebo O.* Platonism in the Philosophy of Mathematics. // Stanford Encyclopedia of Philosophy, (E. Zalta, ed.) 2011, http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics.

6. *Poincaré H.* Science et Méthode. – E. Flammarion Pub., Paris, 1908.

7. *Quinn F.* Contributions to a science of contemporary mathematics. // Preprint; current draft at http://www.math.vt.edu/people/quinn/.

8. *Quinn F.* Contemporary proofs for mathematics education, to appear in ICMI study 19 (fal 2011).

9. *Quinn F.* A science-of-learning approach to mathematics education. – Notices of the AMS 58 (2011), 1264-1275.

10. *Quinn F.* Contributions to a science of mathematical learning. // Preprint; current draft at http://www.math.vt.edu/people/quinn/.

11. *Tait W.W.* Gödel on Intuition and on Hilbert's finitism. // Gödel K. Essays for His Centennial. (K. Gödel, S. Feferman, C. Parsons, S.G Simpson, eds.) – Cambridge Univ. Press. – 2010. – Pp. 88–108.

Дата поступления 18.09.2014

Автор:
Quinn Frank, professor of mathematics at
Virginia Polytechnic Institute
and State University.
quinn@math.vt.edu
http://dx.doi.org/10.1090/noti787

Переводчик:
Целищев В.В.
Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
director@philosophy.nsc.ru

***Quinn, F.* A Revolution in Mathematics? What Really Happened a Century Ago and Why It Matters Today**

The basic purpose of article – to show that in the consequences of revolution in mathematics were allowed the sad consequences in the mathematical formation and marginalization of the core of mathematics. Reasonable measures, in the case of the recognition of disease, can make it possible to get rid of these consequences.

Keywords: philosophy, revolution, mathematics, methodology, logic, definition, proof, education.