

УДК 539.3

## О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КОНИЧЕСКОЙ НАСЫПИ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

**А. П. Бобряков, С. В. Клишин, А. Ф. Ревуженко**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: bobriakov@ngs.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Анализируется эффект, полученный в ИГД СО АН СССР в 1970-е годы, который заключается в том, что при формировании конической насыпи максимум нормального давления заметно смещен от центра основания. Приведены новые экспериментальные данные. В трехмерной постановке методом дискретных элементов решена задача о напряженно-деформированном состоянии насыпи между параллельными гладкими пластинами. Численные расчеты подтверждают основной эффект.

*Сыпучий материал, коническая насыпь, лабораторный эксперимент, напряжение, датчик, численная модель, метод дискретных элементов*

DOI: 10.15372/FTPRPI20190602

Начало работы Е. И. Шемякина в Институте горного дела СО АН СССР в 1971 г. дало новый импульс исследованиям в области механики сыпучих сред. В эти годы выполнен ряд работ, которые послужили основой для дальнейших исследований как у нас в стране, так и за рубежом [1, 2].

В 1970-е годы О. Н. Чинакалом с соавторами [3] обнаружен интересный эффект, который состоял в следующем. При формировании струей конической насыпи из сыпучего материала в центре основания эпюра нормальных давлений имела существенный провал, т. е. максимум давления заметно смещался от точки, соответствующей максимальной высоте насыпи. Этот результат находился в резком противоречии с теорией предельного состояния, изложенной в классической монографии А. Надаи [4]. Возникло много сомнений и споров (“...Надаи ошибался?”), и затем работа в этом направлении была прекращена.

В то время не было достаточно адекватных моделей и вычислительных ресурсов для полного решения данной задачи. Основная проблема состоит в том, что в действительности в предельном состоянии находится не весь объем материала, а его узкий поверхностный слой, поэтому решение [4] можно рассматривать только как оценку реальной ситуации. Для получения более точных решений условие предельного состояния следует снять и заменить нестрогим неравенством. Затем необходимо рассмотреть как допредельное деформирование материала, так

и условия формирования насыпи. В настоящее время возможности вычислительной техники позволяют вернуться к этой задаче на новом уровне. Оказалось, что эффект [3] был позднее и независимо описан в [5, 6] и частично исследован в [7–9]. Ниже приведем его дальнейшее изучение, опираясь прежде всего на приоритетную работу [3].

### ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Эксперименты проводились на двух видах кварцевого песка крупностью частиц  $d \sim 0.3$  с примесью пылевой мелкой фракции и  $d = 0.7 - 1.6$  мм. Формирование конической насыпи осуществлялось струей круглого сечения при двух значениях массовой скорости потока материала  $\dot{V}$ , 21 г/с. Масса сформированной кучи  $P$  в опытах фиксирована и равна 4250 г.

На рис. 1 линией 1 показан исходный профиль сформированной кучи песка с радиусом  $R = 160$  мм, высотой  $H_1 = 96$  мм и углом естественного откоса  $\alpha = 32^\circ$ , линия 2 — его профиль с неравномерной осадкой после воздействия вибраций от многократных слабых сотрясений. При вариации размера частиц и массовой скорости потока внешние размеры образовавшейся насыпи оказались практически одинаковыми.

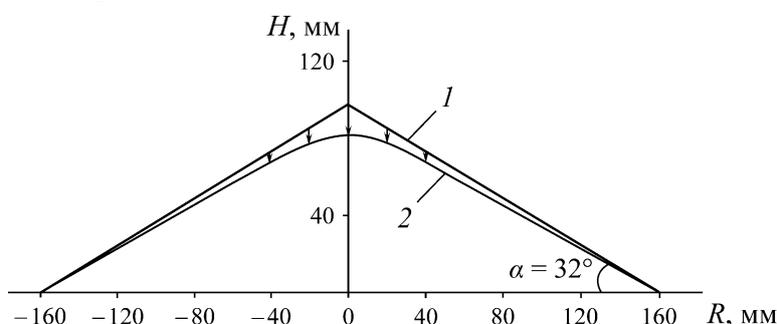


Рис. 1. Профили конической насыпи: 1 — сформированной равномерной струей; 2 — неравномерная осадка после воздействия вибраций от слабых сотрясений

Приведем данные для сухого кварцевого песка: удельный вес  $\rho = 2.5$  г/см<sup>3</sup>; объем первого исходного сформированного конуса  $W_1 = 2572$  см<sup>3</sup>; объем второго после вибровоздействия  $W_2 = W_1 S_2 / S_1 = 2419$  см<sup>3</sup>, где  $S_1 / S_2 = 1.063$  — отношение площадей профилей до и после вибрации; начальный объемный вес  $\gamma_1 = P / W_1 = 1.65$  г/см<sup>3</sup>; объемный вес после вибрации  $\gamma_2 = P / W_2 = 1.756$  г/см<sup>3</sup>; начальная пористость (объемная доля пустот в образе)  $\Pi_1 = (1 - \gamma_1 / \rho) \cdot 100\% = 34\%$ ; пористость после вибрации  $\Pi_2 = (1 - \gamma_2 / \rho) \cdot 100\% = 30\%$ .

Согласно существующим представлениям, распределение давления на основании должно повторять профиль насыпи, т. е. максимальное давление  $\sigma_{\max} = \gamma_1 H_{\max} = 1.58$  кПа ( $H_{\max}$  — высота насыпи под вершиной конуса), а давление на расстоянии  $R = 58$  мм от центра —  $\sigma = 1$  кПа.

Чтобы оценить, насколько приведенные давления отличаются от действительных, с учетом ранее разработанной методики [10, 11] выполнены измерения нормальных и касательных напряжений на горизонтальных площадках в основании конической насыпи. В исходном положении датчики размещались на гладкой горизонтально установленной платформе по диаметру будущей насыпи на разных расстояниях  $R$  от ее центра, расположенного по оси струи. Включалась непрерывная подача заранее взвешенной порции материала, одновременно проводилась запись напряжений. На рис. 2 приведены эпюры нормальных напряжений во времени

на датчике, отстоящем от центра на расстоянии  $R = 58$  мм при двух скоростях формирования насыпи и двух размерах частиц. Масштаб времени на рис. 2б уменьшен, поскольку массовая скорость потока струи увеличена приблизительно в 8 раз. Напряжения, измеренные в конце формирования насыпи (точка 2), равны в одном случае 1.36, в другом — 0.54 кПа, что не соответствует выше приведенному значению  $\sigma = 1$  кПа, рассчитанному по существующим представлениям (рис. 2).

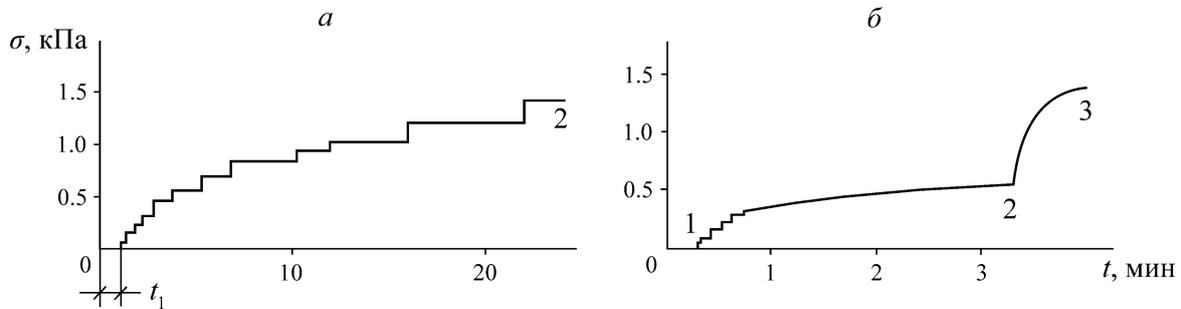


Рис. 2. Исходная эпюра нормального напряжения на горизонтальной площадке в основании конической насыпи из кварцевого песка, формируемой во времени: *a* — равномерной струей с массовой скоростью потока  $\dot{v}$  г/с и средним размером частиц  $d \sim$  мм; *б* — равномерной струей с  $\dot{v}$  г/с и  $d = 0.7 - 1.6$  мм

Установлено, что формирование склона насыпи происходит не непрерывно, а дискретно за счет крутых естественных откосов, оползающих под собственным весом и принимающих более пологое очертание, а также за счет вертикальных осадок массива по мере накопления материала. На рис. 2а рост напряжений возникает после некоторого промежутка времени  $t_1$ , определяемого временем вступления материала на датчик, смещенный от центра. В этот момент возникают первые малые скачки роста напряжений, которые видны в начале эпюры и которые являются следствием воздействия веса оползней на чувствительный элемент датчика. По мере накопления материала происходит уход от прямого воздействия оползневой массы на датчик, малые скачки исчезают. Дальнейшее формирование насыпи сопровождается скачкообразным ростом напряжений, состоящим из восьми ступеней. В промежутках между скачками напряжения практически не меняются, хотя подача материала в это время не прекращается. Визуально установлено, что большие скачки на эпюре напряжений возникают вследствие осадок массива. Напряжения после окончания формирования насыпи (точка 2), а также конфигурация профиля (рис. 1, кривая 1) при отсутствии внешних возмущений устойчивы и могут сохраняться в течение длительного времени.

Эксперименты на крупном песке показали, что вначале деформирования насыпи наблюдаются малые скачки напряжений (рис. 2б). Отличие от рис. 2а состоит в том, что напряжения на всей диаграмме изменяются монотонно без больших скачков по слабонарастающей гладкой кривой. При воздействии на массив слабых вибраций низкое давление на диаграмме резко возрастает (на эпюре отрезок кривой 2–3) и затем выходит на постоянный уровень.

Рассмотренные эффекты могут быть объяснены следующей гипотезой. Предполагается, что песчаная куча представляет собой “лабиринт из арок” разных уровней, простирающихся в различных направлениях. Под давлением песчинки перестраиваются так, что заклинивают друг друга, мешая взаимному перемещению, появляются “арочные структуры”. В арке каждый отдельный элемент не может переместиться в направлении внешней силы (веса материала), так как он зажат враспор соседними элементами, которым и передает действующую нагрузку. В результате под внешним и внутренним давлением песок утрачивает подвижность и приобре-

тает свойство твердого тела. Этим объясняется прочность сводов туннелей метро, куполов соборов, арочных проемов и т. д. Предельная нагрузка определяется прочностью элементов внутренней структуры.

Понятие свода как структуры в сыпучем теле, воспринимающей давление вышележащих слоев, введено в конце позапрошлого столетия для объяснения горного давления. В более поздних работах своды исследовались как препятствие к истечению материалов из бункеров. Образовавшиеся в сыпучем особые структуры, называемые динамическими сводами, воспринимают вертикальную нагрузку сверху и передают ее на боковые стенки бункера, разгружая его дно. Установлено, что динамически разгружающиеся своды имеют параболический вид в случае щелевых и прямоугольных выпускных отверстий, для круглых и квадратных отверстий свод куполообразный.

В процессе формирования конической насыпи “арочные структуры” и динамические своды, образующиеся при выпуске сыпучих материалов, отличаются от первых непостоянством состава: одни частицы из свода выбывают и здесь же заменяются другими, сохраняя устойчивость. Расход определяется прочностью самого нижнего динамического свода, опирающегося на края выпускного отверстия, но это не всегда. При возрастании прочности свода могут возникать зависания, когда течение материала прекращается. Тогда задача сводится к созданию механизмов предотвращения и устранения сводообразований в бункерах, трубах, каналах, руслах и т. д.

Наличием “арочных структур” могут быть объяснены скачки напряжений, имеющиеся на экспериментальных кривых для мелкого песка с примесью пылевой мелкой фракции (рис. 2а). Каждый скачок напряжений на датчике — следствие недостаточной прочности, разрушения и осадки “арочных структур” под нарастающим весом материала. Отсутствие скачков на крупном песке (рис. 2б) свидетельствует о наличии достаточно прочных слоев, так что ориентация сил между частицами каждого слоя не зависит от слоев, насыпанных позднее. Причиной уменьшения давления материала на датчик является прочная многоярусная “арочная защита” его от давления верхних слоев материала, которая может быть разрушена воздействием слабых вибраций. В результате разрушения появляется нелинейная осадка массива (см. профиль 2 на рис. 1) и резкое возрастание вертикального давления материала на основание.

С учетом влияния эффектов, связанных с образованием и разрушением “арочных структур”, экспериментально исследован вопрос распределения касательных и нормальных напряжений, действующих в основании кучи. На рис. 3 приведена диаграмма нормальных напряжений, возникших после формирования насыпи в зависимости от места положения датчика относительно центра основания (отсчет напряжений проводился в точке 2, рис. 2а). Размер частиц  $d \sim 0.3$  мм, массовая скорость потока  $\dot{V}$  г/с.

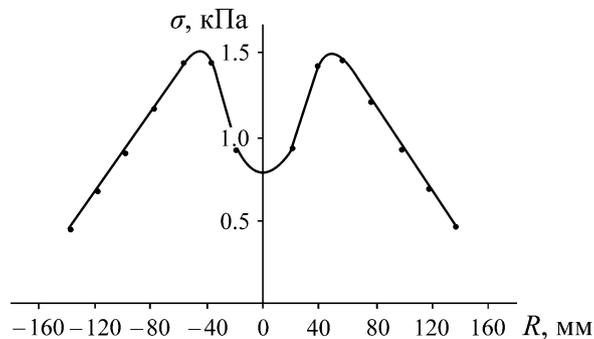


Рис. 3. Распределение нормального давления в зависимости от расстояния  $R$  до центра основания конической насыпи

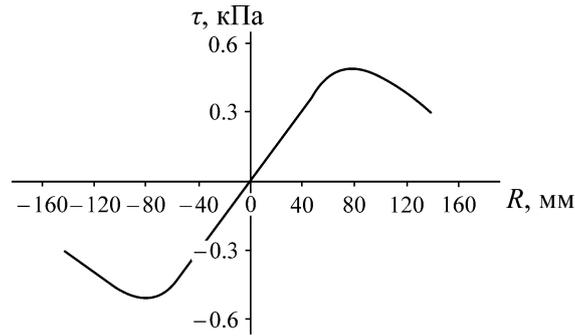


Рис. 4. Распределение касательных напряжений в зависимости от расстояния  $R$

Установлено, что давление, которое конусообразная куча оказывает на поверхность платформы, максимально не в центре, а ближе к краям. В “арочной модели” вес кучи переносится к ее краям, не давая расти давлению в центре. Аналогично на рис. 4 представлена диаграмма касательных напряжений в зависимости от местоположения датчика, из которой следует, что касательные напряжения, переходя через “0”, меняют знак, а абсолютные максимальные значения достигаются приблизительно на половине радиуса основания кучи. На границе основания конуса измерение напряжений не проводилось. По данным рис. 3, 4 построено отношение касательных напряжений к нормальным, которое хорошо аппроксимируется линейной зависимостью по всей длине радиуса  $R$  (рис. 5).

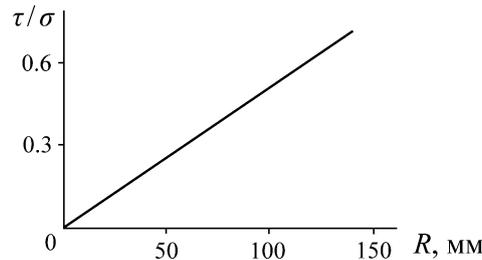


Рис. 5. Изменение отношений компонент касательного напряжения к нормальному на расстоянии  $R$  от центра основания насыпи

На рис. 6 показано распределение нормальных напряжений до и после вибровоздействия (кривые 1, 2). Видно, что вибровоздействие приводит к разрушению “арочных структур”, вследствие чего напряжения возрастают, приближаясь к значениям  $\gamma H$ . При этом суммарные значения давлений до и после вибрации отличаются вследствие их концентрации на краях основания (рис. 6б). Детально этот эффект не исследовался.

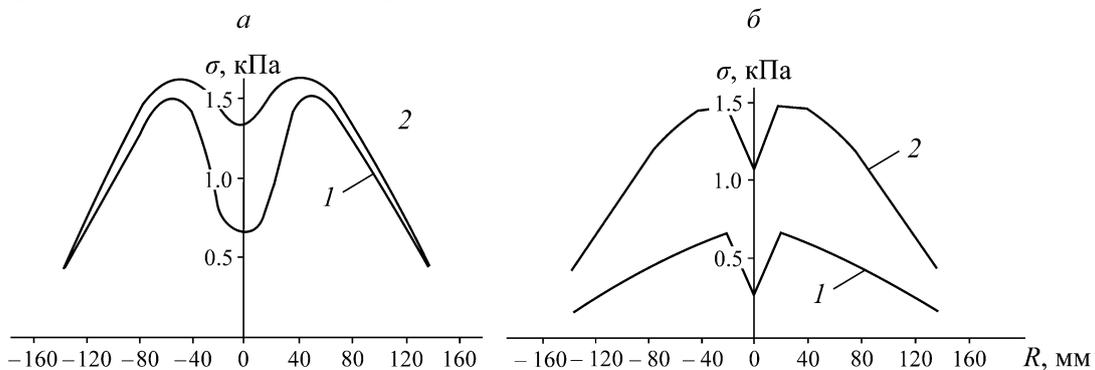


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений в основании насыпи, сформированной струей с массовой скоростью потока  $\dot{r}$  г/с: 1 — измеренных после ее формирования; 2 — после вибраций от многократных слабых сотрясений. Размер частиц  $d \sim$  мм (а);  $d = 0.7 - 1.6$  мм (б)

Сравним максимальные напряжения (рис. 6), измеренные после воздействия вибраций, и максимальные напряжения, рассчитанные по высоте профиля кучи после утряски (рис. 1, профиль 2). Измерения составили:  $\sigma_{\max} = 1.60, 1.46$  кПа, а вычисленное напряжение через профиль —  $\sigma_{\max} = \gamma_2 H_{\max} = 1.756 \text{ г/см}^3 \cdot 8 \text{ см} = 1.4$  кПа. Максимальное отклонение вычисленного значения от фактически полученных данных составило 14 %.

Слабое возрастание напряжений на диаграммах  $I$  свидетельствует о наличии прочных “арочных структур”, возникающих при подаче крупного песка струей (рис. 6б). Менее прочными оказались структуры, которые разрушались под действием возрастающей массы кучи во время ее формирования (рис. 6а, диаграмма  $I$ ), вызывая скачки напряжений на исходных эпюрах напряжений (рис. 2а, мелкий пылеватый песок с  $d \sim$  мм, мощная струя  $i$  г/с). Полученная диаграмма имеет большие значения максимумов напряжений и минимальный провал в центре кучи. Под воздействием вибраций глубокие провалы напряжений в центральной части кучи выполаживаются, но полностью не исчезают из-за полостей и арок, оставшихся в толще сыпучего материала.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ДАВЛЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ НАСЫПИ НА ШЕРОХОВАТОЕ ОСНОВАНИЕ

Несмотря на значительные достижения в экспериментальных исследованиях процесса создания различного рода насыпных конструкций, актуальным остается выбор наиболее адекватного теоретического описания поведения гранулированного материала при решении прикладных задач. Удовлетворительной и наиболее близкой по результатам к экспериментам является модель метода дискретных элементов, в рамках которого исследуемая среда представляется в виде набора отдельных жестких сферических частиц, на контактах между которыми постулируются определенные законы взаимодействия. Данный метод — принципиальная альтернатива классическим методам, основанным на традиционных представлениях механики сплошных сред, и в настоящее время широко используется при исследовании различных режимов течения сыпучих материалов [12 – 14].

Рассмотрим следующую трехмерную постановку задачи. Пусть в плоскости  $Oxy$  задана шероховатая плита длиной  $L=3$  м и шириной  $W=0.2$  м. Дискретные элементы генерируются последовательно в заданной области на некоторой высоте от плиты. В процессе численного счета частицы под действием силы тяжести осаждаются вниз с учетом их контактного взаимодействия друг с другом и основанием. Абсолютно гладкие передняя и задняя стенки ориентированы параллельно плоскости  $Oxz$ . В эксперименте реализуется состояние, близкое к условиям плоской деформации. Дискретные элементы, у которых координата  $x$  центра тяжести по модулю превышает значение  $L/2$ , из расчета удалялись. Формирование насыпи осуществляется путем засыпки “дождем” из области шириной  $D_s=0.8L$  (рис. 7а) и “струей” шириной  $D_j=0.03L$  (рис. 7б).

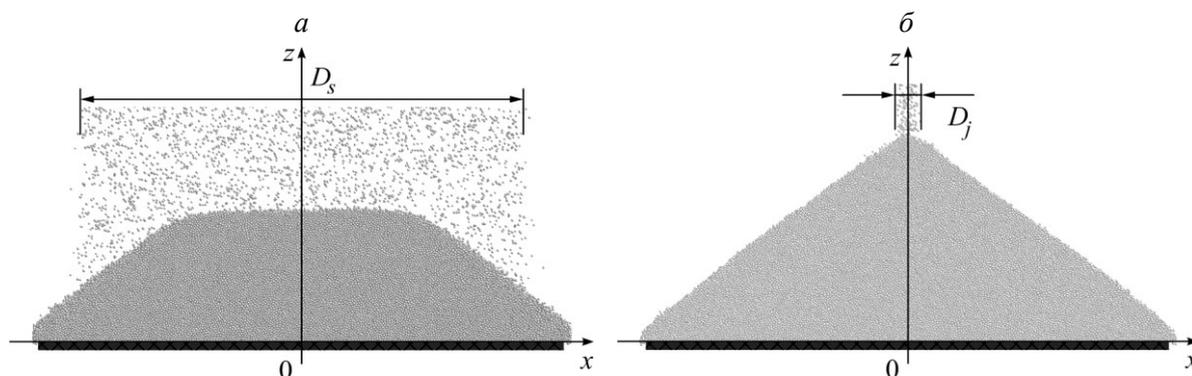


Рис. 7. Формирование конической насыпи “дождем” (а) и “струей” (б)

Физические характеристики дискретных элементов: модуль упругости  $E_i = 5.4 \cdot 10^3$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu_i = 0.16$ ; плотность  $\rho_i = 1350$  кг/м<sup>3</sup> ( $i = 1, \dots, N$  — общее количество частиц). Радиусы частиц выбираются из равномерного распределения на отрезке 0.006–0.0084 м. Во всех численных экспериментах угол внешнего сухого трения между частицами, а также между частицами и нижней границей фиксирован и составляет 30°. Угол сопротивления качению фиксирован и равен 10°. Коэффициент восстановления скорости 0.5.

По окончании процесса засыпки частицы сформировали насыпь треугольной формы с плоскими откосами, расположенными симметрично относительно вертикальной оси  $Oz$  и составляющими с горизонтальной осью острый угол естественного откоса  $\alpha = 39^\circ$ . На рис. 8 приведены нормальные и касательные напряжения, полученные в результате численного расчета для разных способов формирования насыпи. При засыпке “струей” на графике вертикального напряжения  $\sigma_y$  имеется ярко выраженный провал. Сравним полученное численное решение с решением, выведенным в [4] на основе теории идеально сыпучих сред и описывающим напряженное состояние остроугольной насыпи, которая находится в равновесии под действием силы тяжести. На рис. 8 распределения вертикальных  $\sigma_y$  и касательных  $\tau_{xy}$  напряжений показаны гладкими кривыми. Пик нормального напряжения приходится на центр насыпи, а его значение равно весу вышележащего материала.

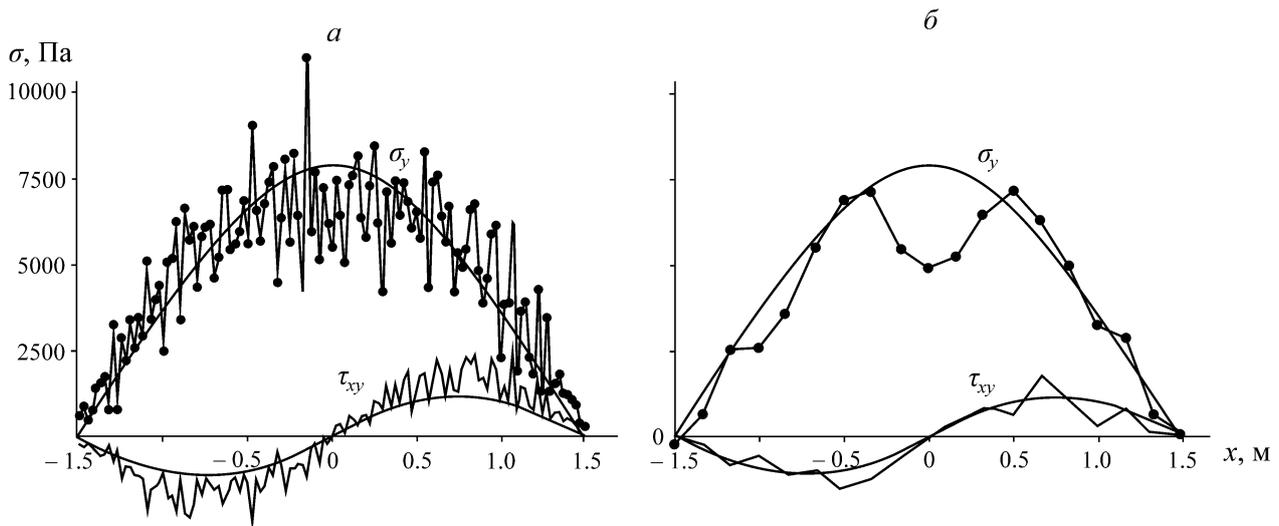


Рис. 8. Распределение нормальных и касательных напряжений на основании остроугольной насыпи при засыпке “дождем” (а) и “струей” (б)

## ВЫВОДЫ

Напряжения в основании конической насыпи после ее формирования имеют заниженные значения в центре провала над ее вершиной. Причина слабого роста — образующаяся многоярусная “арочная структура”, задерживающая рост давления от верхних слоев, насыпанных позднее. Процесс формирования кучи может сопровождаться разрушением “арочных структур” под собственным весом, вызывая скачки роста на эпюре напряжений. Напряженное состояние зависит от способа насыпания и от грансостава сыпучего материала. Согласно экспериментам, “арочная структура” может быть разрушена воздействием слабых вибраций, при этом напряжения резко возрастают, приближаясь к значениям  $\gamma H$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. Новые методы расчета нагрузок на крепи // ФТПРПИ. — 1976. — № 3. — С. 21–40.
2. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246. — № 3. — С. 572–574.
3. Федянин А. С., Стажевский С. Б., Чинакал О. Н. Экспериментальное исследование влияния способов и условий формирования сыпучего материала на его напряженное состояние // Механика сыпучих материалов: тез. докл. III Всесоюз. конф. — Одесса: ОТИПП им. М. В. Ломоносова, 1975. — С. 137–138.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел: в 2 т. — М.: Мир, 1969. — Т. 2. — 863 с.
5. Smid J. and Novosad J. Pressure distribution under heaped bulk solids, Industrial Chem. Eng. Symp., 1981.
6. Wittmer J. P., Claudin P., Cates M. E., and Bouchaud J. P. A new approach to stress propagation in sandpiles and silos, Friction, Arching, Contact Dynamics, 1997. — P. 153–167.
7. Zuriguel I., Mullin T., and Rotter J. M. Effect of particle shape on the stress dip under a sandpile, Phys. Rev. Lett., 2007, Vol. 98, Issue 2. — P. 028001.
8. Dai B.-B., Yang J., Zhou C.-Y., and Zhang W. Effect of particle shape on the formation of sandpile, Proc. of the 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Discrete Element Methods, 2017.
9. Liu Y.-Y., Yeung A. T., Zhang D.-L., and Li Y.-R. Experimental study on the effect of particle shape on stress dip in granular piles, Powder Technol, 2017, Vol. 319. — P. 415–425.
10. А. с. 1485046. Датчик для измерения касательных напряжений / А. П. Бобряков, А. Ф. Ревуженко, В. П. Косых // Оpubл. в БИ. — 1989. — № 21.
11. Бобряков А. П., Клишин С. В., Косых В. П., Ревуженко А. Ф. О проблеме измерения и расчета напряжений при выпуске сыпучих материалов // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2017. — Т. 4. — № 3. — С. 32–37.
12. Клишин С. В., Лавриков С. В., Микенина О. А., Ревуженко А. Ф. Модификация метода дискретных элементов, допускающая переход к модели линейно-упругого тела // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Междунар. науч.-техн. конф. — Воронеж, 2017. — С. 1072–1078.
13. Стажевский С. Б., Хан Г. Н. О связи повышенных тектонических напряжений с эндогенными кольцевыми структурами // ФТПРПИ. — 2017. — № 6. — С. 50–60.
14. Клишин С. В., Клишин В. И., Опрук Г. Ю. Математическое моделирование гравитационного движения разупрочненной горной массы в технологии с выпуском подкровельной толщи // Научные технологии разработки и использования минеральных ресурсов. — 2018. — № 4. — С. 80–85.

*Поступила в редакцию 08/X 2019*

*После доработки 13/X 2019*

*Принята к публикации 27/XI 2019*