ПМТФ, № 5, 1973

УДК 532.529.

ДВИЖЕНИЕ МАЛОЙ СФЕРЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается движение малого шара в произвольном потенциальном потоке идеальной жидкости. Для общего случая получены интеграл уравнений движения и частное решение. Найдены потоки, в которых сила, действующая на сферу, является центральной. Получены также точные решения уравнений движения шара для случаев стационарных потоков около цилиндра и около некоторого тела вращения, когда силы нецентральные.

Н. Е. Жуковский [1] вычислил силу, действующую на неподвижный шар в произвольном нестационарном потоке. Кельвин [2] получил уравнения движения шара в стационарном потоке жидкости, циркулирующей через отверстие в твердом теле. Формула для силы $\mathbf{F}$, действующей на неподвижное малое тело объема V в стационарном потоке со скоростью v, получена Тейлором [3]

$$\mathbf{F} = (\partial T_0 / \partial \mathbf{v})\nabla \mathbf{v} + {}^1/_2 \rho V \nabla v^2$$

Здесь T_0 — кинетическая энергия безграничной жидкости при движении в ней тела со скоростью $\mathbf{v}$. Задача решена в [3] путем непосредственного интегрирования сил давления по поверхности тела в потоке, заданном мультиполями первого и второго порядков в бесконечности.

1. Основные уравнения. Вывод уравнений движения газового пузыря и тела в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости на основе уравнений Лагранжа имеется в работах [4, 5], в которых получены выражения для аддитивной составляющей функции Лагранжа, соответствующей движению жидкости.

Функция Лагранжа L системы шар — жидкость кроме разности кинетической энергии в относительном движении и произведения объема тела на давление в потоке [4, 5] включает еще кинетическую энергию шара радиуса R

$$L = {}^1/_3\, \pi R^3\, [\rho\, (\mathbf{q}^{\cdot} - \mathbf{v})^2 - 4p_0] + {}^2/_3 \pi R^3 \rho' \mathbf{q}^{\cdot 2}$$

Здесь ρ и ρ' — соответственно плотности жидкости и шара, v и p_0 — соответственно скорость и давление невозмущенного потока в центре шара, $\mathbf{q}$ — координаты центра шара. В случае твердого шара выражение для L можно упростить, добавляя полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{3} R^3 \Phi_0\right) = \frac{2\pi}{3} R^3 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \mathbf{q}^{\cdot}\mathbf{v}\right)$$

и учитывая интеграл Коши — Лагранжа для невозмущенного потока с потенциалом Φ_0

$$L = {}^1/_3 \pi R^3\, [(\rho + 2\rho')\, \mathbf{q}^{\cdot 2} - 6p_0]$$

Функция L дает следующие уравнения движения:

$$(\rho + 2\rho')\, q_\alpha^{\cdot\cdot} = -3\partial p_0/\partial q_\alpha \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.1}$$

Эти уравнения можно также получить, исходя из выражения для силы, действующей на сферу, движущуюся в неоднородном потоке [6].

В стационарном потоке идеальной жидкости уравнения (1.1) принимают вид

$$mq_\alpha^{\cdot\cdot} = {}^1/_2\, \partial v^2/\partial q_\alpha \quad (m = (\rho + 2\rho')/3\rho) \tag{1.2}$$

Уравнения (1.2) соответствуют движению частицы с массой m в поле сил с потенциалом ${}^1/_2 v^2$. Из (1.1) следует, что ускорение шара пропорционально ускорению жидкости. При $\rho' = 0$ (пузырь) ускорение шара равно трем ускорениям жидкости. При $\rho' = \rho$ ускорения тела и жидкости совпадают.

Уравнение (1.2) имеет следующее частное решение:

$$\dot{q}_\alpha = v_\alpha / \sqrt{m}$$

что проверяется подстановкой. Это решение показывает, что при некоторых начальных условиях частицы могут двигаться по линиям тока жидкости.

Уравнения движения малого шара (1.2) имеют первый интеграл, аналогичный интегралу энергии в динамике точки

$$m\dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{v}^2 = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

Для двумерной задачи при наличии еще одного первого интеграла можно получить точное решение. Наиболее простым является случай центральных сил.

2. Течения, в которых сила центральная. Для плоского потока с комплексным потенциалом W можно доказать следующую теорему.

Теорема. Сила, действующая на малую сферу в плоском потоке, является центральной в том и только в том случае, когда производная от комплексного потенциала имеет вид $dW / dz = cz^\lambda$, где c — произвольное комплексное число, λ — действительное.

Доказательство. Как следует из (1.2), сила центральная, если

$$| dW / dz | = f (| z |)$$

где f — функция действительного аргумента.

Следовательно, действительная часть аналитической функции $\mathrm{Ln}\,(dW / dz)$ является гармонической функцией, зависящей только от $|z|$. Общий вид такой гармонической функции $\lambda \ln |z| + c$. Отсюда

$$dW / dz = cz^\lambda$$

Примером движения с центральной силой будет движение в вихре-источнике, комплексный потенциал которого равен $c\, \mathrm{Ln}\, z$. К этому же классу относятся течения внутри угла ($W = cz^\lambda$, $\lambda > {}^1/_2$).

При $\lambda = 2$ получается течение в окрестности критической точки в потоке, обтекающем цилиндрическое тело.

В пространственном случае центральным силам соответствует движение в поле источника.

Во всех указанных случаях нетрудно записать точные решения уравнений (1.2) по крайней мере в квадратурах, используя кроме (1.3) интеграл момента количества движения. Интегрирование (1.2) усложняется, если силы нецентральные.

3. Некоторые точные решения в случае нецентральных сил. Рассматривается малая сфера в потоке, обтекающем круговой цилиндр. Пусть скорость потока на бесконечности равна единице и радиус цилиндра также равен единице, величина r — расстояние до оси цилиндра, θ — угол, отсчитываемый от направления скорости потока на бесконечности. Тогда компоненты скорости жидкости равны

$$v_r = \cos\theta\,(1 - r^{-2}), \quad v_\theta = -\sin\theta\,(1 + r^{-2})$$
$$v^2 = 1 + r^{-4} - 2r^{-2}\cos 2\theta$$

Уравнение изменения момента количества движения, соответствующее (1.2), есть

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta^{\cdot}) = \frac{2\sin 2\theta}{r^2}$$

Переходя в последнем уравнении к дифференцированию по θ, можно найти $r^2\theta^{\cdot}$ как функцию θ.

Таким образом, уравнения (1.2) в случае сферы в потоке около цилиндра имеют два первых интеграла

$$m(r^{\cdot 2} + r^2\theta^{\cdot 2}) - r^{-4} + 2r^{-2}\cos 2\theta = E$$
$$mr^4\theta^{\cdot 2} + 2\cos 2\theta = H$$

Первое уравнение совпадает с (1.3). Полученная система уравнений эквивалентна следующей:

$$mr^4r^{\cdot 2} = 1 - Hr^2 + Er^4 \qquad (3.1)$$
$$mr^4\theta^{\cdot 2} = H - 2\cos 2\theta$$

Решение уравнений (3.1) выражается через эллиптические интегралы.

Пусть частица движется из бесконечности вместе с потоком, тогда $E = m$, $H = mb^2 + 2$ (b — расстояние до линии, параллельной скорости потока и проходящей через центр, когда сфера находится в бесконечности). Полагая в первом уравнении (3.1) $r^{\cdot} = 0$, можно найти наименьшее расстояние r_*, на которое может приблизиться сфера к оси цилиндра при заданном b

$$2mr_*^2 = mb^2 + 2 + \sqrt{(mb^2 + 2)^2 - 4m} \qquad (3.2)$$

При $m < 1$ ($\rho' < \rho$) тело не достигает поверхности цилиндра, так как $r_*^2 > 1$. Касание частицами цилиндра возможно, если $m > 1$. Таким образом, возможность касания малой сферической частицы и цилиндра определяется соотношением плотности частицы ρ' и плотности жидкости ρ. Частицы, более плотные, чем жидкость, касаются цилиндра, а менее плотные нет.

Формула (3.2) позволяет вычислить сечение захвата σ при $m > 1$ ($\rho' > > \rho$)

$$\sigma = \pi b_0^2 = \pi(m - 1)/m$$

Здесь b_0 — наибольшее прицельное расстояние b, при котором сфера касается поверхности цилиндра. Из (3.1) следует, что точка $\theta = \theta_0$ на цилиндре, в которой происходит касание при $b = b_0$, определяется из уравнения

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + m - 2\cos 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{m}} K\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода.

В работе [7] путем численных расчетов находились траектории пузыря в потоке жидкости, обтекающей круговой цилиндр. Была установлена невозможность осаждения пузыря на цилиндр в потоке идеальной жидкости. С этим выводом согласуются полученные выше результаты.

Пусть сфера движется в осесимметричном течении, которое состоит из равномерного потока и источника

$$v_r = \cos\theta + r^{-2},\ v_\theta = -\sin\theta,\ v^2 = 1 + r^{-4} + 2r^{-2}\cos\theta$$

Это течение можно рассматривать как обтекание неограниченного тела, контур которого задается уравнением

$$r = 1 / \sin(\theta / 2) \tag{3.3}$$

В данном случае первые интегралы уравнений (1.5) имеют следующий вид:

$$mr^4\dot{r}^2 = 1 - Hr^2 + Er^4 \tag{3.4}$$

$$mr^4\dot{\theta}^2 = H + 2\cos\theta$$

Траектории движения, получаемые из (3.4), можно представить через эллиптические интегралы. Для сферических тел, движущихся из бесконечности вместе с потоком жидкости, $E = m$, $H = mb^2 + 2$. Для r_* из первого уравнения (3.4) получается та же формула (3.2), что и в случае цилиндра. Из (3.2) и (3.3) получается оценка для наименьшего расстояния r от источника, при котором возможно касание сферы и тела вращения, с уравнением образующей (3.3). В частности, для сферического пузыря $r > 3 + \sqrt{6} \approx 5.45$.

Если обратить рассматриваемое течение жидкости, то получится задача о засасывании частиц в сток. В этом случае уравнения (3.4) принимают следующий вид:

$$mr^4\dot{r}^2 = 1 - (mb^2 - 2)\, r^2 + mr^4 \tag{3.5}$$

$$mr^4\dot{\theta}^2 = mb^2 - 2 + 2\cos\theta$$

Из первого уравнения (3.5) можно получить выражение для r_*

$$2mr_*^2 = mb^2 - 2 + \sqrt{(mb^2 - 2)^2 - 4m} \tag{3.6}$$

Вообще говоря, существует и другое значение r_*, соответствующее второму меньшему корню квадратного уравнения. Однако при интегрировании уравнений (3.5) от $r = \infty$ это второе значение не достигается.

Из формулы (3.6) следует, что точка поворота r_* существует при условии

$$b^2 > (2 + 2\sqrt{m}) / m \tag{3.7}$$

Если прицельное расстояние удовлетворяет условию (3.7), то шарик, достигнув наименьшего расстояния (3.6), уходит на бесконечность. Если же условие (3.7) не выполнено, то шарик втягивается в сток.

Таким образом, неравенство (3.7) определяет наименьшее прицельное расстояние b_0, при котором сферические частицы не втягиваются в сток. Расстояние r_0, на которое приблизится к стоку частица, определяется из (3.6)

$$b_0^2 = (2 + 2\sqrt{m}) / m,\ r_0 = 1 / \sqrt{m} \tag{3.8}$$

При $b = b_0$ первое уравнение (3.5) интегрируется в элементарных функциях. При помощи (3.8) можно рассчитать количество частиц N, попадающих в единицу времени внутрь стока мощности Q в потоке, если известно количество частиц в единице объема n

$$N = \pi n Q \left(2 + 2\sqrt{m}\right) / m$$

Из формулы видно, что величина N не зависит от скорости равномерного потока.

Поступила 16 IV 197

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Обобщение задачи Бъеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч., т. 2. Гидродинамика. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
2. *Kelwin W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or a fixed solid. Philos. Mag., 1873, vol. 45.
3. *Taylor G. I.* The forces on a body placed in a curved or converning stream of fluid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1928, vol. 120, No. 785.
4. *Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, вып. 5.
6. *Воинов О. В.* О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1973, № 4.
7. *Ильичев В. И., Канзеба А. А., Кузнецов Г. Н., Листров А. Т.* Движение газового пузырька в гидродинамическом поле обтекаемого тела. Тр. Акуст. ин-та, 1969, вып. 6.