

AMS subject classification: 49J20, 65N30

Априорные оценки ошибки и сверхсходимость положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для псевдогиперболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления*

Ч. Ксу

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, Jilin, China

E-mail: 386270479@qq.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 13, 2020.

Ксу Ч. Априорные оценки ошибки и сверхсходимость положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для псевдогиперболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 1. — С. 23–37.

В данной статье рассматриваются априорные оценки ошибки и сверхсходимость положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для задач оптимального управления, описываемых псевдогиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями. Переменные состояния и переменные сопряженного состояния аппроксимируются смешанными функциями конечных элементов Равьяра–Тома наименьшего порядка, а переменная управления аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Сначала мы получим априорные оценки ошибки для переменной управления, переменных состояния и сопряженного состояния. Затем будет получен результат сверхсходимости для переменной управления.

DOI: 10.15372/SJNM20200102

Ключевые слова: псевдогиперболические интегро-дифференциальные уравнения, задачи оптимального управления, априорные оценки ошибки, сверхсходимость, положительно определенные смешанные методы расщепления конечных элементов.

Xu C. A priori error estimates and superconvergence of splitting positive definite mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic integro-differential optimal control problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 1. — P. 23–37.

In this paper, we discuss a priori error estimates and superconvergence of splitting positive definite mixed finite element methods for optimal control problems governed by pseudo-hyperbolic integro-differential equations. The state variables and co-state variables are approximated by the lowest order Raviart–Thomas mixed finite element functions, and the control variable is approximated by piecewise constant functions. First, we derive a priori error estimates both for the control variable, the state variables and the co-state variables. Second, we obtain a superconvergence result for the control variable.

*Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 11601014) и Проекта развития молодежных интеграционных исследований и инноваций университета Бэйхуа.

Keywords: *pseudo-hyperbolic integro-differential equations, optimal control problems, a priori error estimates, superconvergence, splitting positive definite mixed finite element methods.*

1. Введение

Конечно-элементная аппроксимация задач оптимального управления широко исследовалась в литературе. Мы не можем представить здесь даже очень краткий обзор (см. [2, 5, 15, 22] и [16, 17] для описания эллиптических и параболических задач управления соответственно).

Метод конечных элементов успешно используется для моделирования большого числа задач оптимального управления. Однако он не годится для решения некоторого класса задач оптимального управления, в которых целевая функция содержит не только основную переменную состояния, но и ее градиенты. Самый лучший выбор — смешанные методы конечных элементов, поскольку как скалярная переменная, так и переменная потока могут аппроксимироваться с одинаковой точностью с использованием таких методов. Некоторые результаты по априорным оценкам ошибки и сверхсходимости смешанных методов конечных элементов Равьяра–Тома для эллиптических и параболических задач оптимального управления можно найти в [3, 4, 6, 21]. В статьях [3, 4] Чен использовал оператор проектирования для постобработки, определенный Мейером и Решем [15] для доказательства квадратичной сверхсходимости управления с использованием смешанных методов конечных элементов. В [9] Го, Фу и Чжан рассматривали положительно определенный смешанный метод расщепления конечных элементов для эллиптической задачи оптимального управления и получили априорные оценки ошибки.

Во многих реальных применениях, таких как управление теплопроводностью материалов с памятью, управление динамикой популяций, волновое управление и управление в упругопластической механике, необходимо рассматривать задачи оптимального управления, подчиняющиеся эллиптическим интегральным уравнениям, параболическим интегро-дифференциальным уравнениям и гиперболическим интегро-дифференциальным уравнениям. В [2] авторы проанализировали конечно-элементную дискретизацию Галеркина для класса задач оптимального управления с ограничениями, подчиняющихся интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям Фредгольма. В [19] Шен с соавторами получили эквивалентные апостериорные оценки ошибки с нижним и верхним пределами конечно-элементной аппроксимации задачи оптимального управления с ограничениями, подчиняющейся параболическому интегро-дифференциальному уравнению. В [10] Хоу рассмотрел H^1 -смешанную конечно-элементную аппроксимацию Галеркина для линейных параболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления и получил априорные оценки ошибки. В [11] Хоу получил априорные оценки ошибки смешанных методов конечных элементов Равьяра–Тома для задач оптимального управления, подчиняющихся гиперболическим интегро-дифференциальным уравнениям. Насколько известно автору, в литературе нет работ по положительно определенным смешанным методам расщепления конечных элементов для гиперболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления.

Положительно определенные смешанные методы расщепления конечных элементов были впервые предложены в [23] для решения задач вытеснения смешивающимися агентами сжимаемого потока в пористых средах. Преимущества этого метода по сравнению со стандартными смешанными методами конечных элементов в следующем: условие совместности Ладыженской–Бабушки–Бреци (ЛББ) между пространствами конечных

элементов не является необходимым, и исходные задачи могут быть расщеплены на две независимые симметрические положительно определенные подсхемы. Сверхсходимости полностью дискретных положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для гиперболических уравнений изучалась в [20]. Априорные оценки ошибки положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для гиперболических и эллиптических задач оптимального управления можно найти в [14, 24] и [9] соответственно.

В данной статье будут рассмотрены априорные оценки ошибки и сверхсходимость положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для псевдогиперболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления. Интерес для нас представляют следующие задачи оптимального управления, часто встречающиеся в процессах реакции-диффузии и нервной проводимости:

$$\min_{u \in K \subset U} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \left(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|^2 + \|y - y_d\|^2 + \|u\|^2 \right) dt \right\}, \quad (1.1)$$

$$y_{tt} - \operatorname{div} \mathbf{p} - \operatorname{div} \mathbf{p}_t + \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{p}(s) ds = f + u, \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{p} = \nabla y, \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.3)$$

$$\nabla y \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in J, \quad (1.4)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$y_t(x, 0) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.6)$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — многоугольная область, $J = [0, T]$, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль на $\partial\Omega$. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в $U = L^2(J; L^2(\Omega))$, f и $y_d \in L^2(J; L^2(\Omega))$, $\mathbf{p}_d \in L^2(J; (L^2(\Omega))^2)$, а y_0 и $y_1 \in H^1(\Omega)$. Множество K определяется следующим образом:

$$K = \left\{ u \in U : \int_0^T \int_{\Omega} u dx dt \geq 0 \right\}. \quad (1.7)$$

В данной статье используются стандартные обозначения: $W^{m,p}(\Omega)$ — пространства Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, задаваемой как $\|v\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$, и полунормой $|\cdot|_{m,p}$, задаваемой как $|v|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$. Положим $W_0^{m,p}(\Omega) = \{v \in W^{m,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для $p = 2$ обозначим: $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$.

Пусть $L^s(J; W^{m,p}(\Omega))$ — банахово пространство для всех L^s -интегрируемых функций из J в $W^{m,p}(\Omega)$ с нормой $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}^s dt \right)^{1/s}$ для $s \in [1, \infty)$ и стандартной модификацией для $s = \infty$. Для простоты пусть $\|v\|_{L^s(W^{m,p})}$ служит для обозначения $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))}$. Аналогичным образом можно определить пространства $H^1(J; W^{m,p}(\Omega))$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h , где h — пространственный шаг сетки.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы строим положительно определенную смешанную конечно-элементную схему расщепления для задачи оптимального управления (1.1)–(1.6) и даем эквивалентные условия оптимальности. Основные результаты статьи представлены в пунктах 3 и 4. В п. 3 введены некоторые полезные вспомогательные переменные и даны априорные оценки ошибки для переменной управления, переменных состояния и сопряженного состояния. В п. 4 получены свойства сверхсходимости для всех переменных. Затем, используя метод постобработки, получен результат сверхсходимости для переменной управления.

2. Смешанные методы для задач оптимального управления

Здесь мы построим положительно определенную смешанную конечно-элементную схему расщепления для задачи управления (1.1)–(1.6). Для реализации этой идеи возьмем пространства состояния $\mathbf{L} = H^2(J; \mathbf{V})$ и $\mathbf{W} = H^2(J; W)$, где определим $\mathbf{V}$ и W следующим образом:

$$\mathbf{V} = H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad W = L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

Гильбертово пространство $\mathbf{V}$ имеет норму

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = \left(\|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Смешанную слабую форму (1.2), (1.3) можно задать следующим образом:

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = -(y, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.2)$$

$$(y_{tt}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, w) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), w) ds = (f + u, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.3)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение $L^2(\Omega)$.

Как в [9], взяв $w = \operatorname{div} \mathbf{v}$ в (2.3) и дифференцируя (2.2) по t , получим

$$(\mathbf{p}_{tt}, \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}) ds = -(f + u, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.4)$$

Теперь преобразуем (1.1)–(1.6) в следующую слабую форму: найти $(\mathbf{p}, y, u) \in \mathbf{L} \times \mathbf{W} \times K$, такое что

$$\min_{u \in K \subset U} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \left(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|^2 + \|y - y_d\|^2 + \|u\|^2 \right) dt \right\}, \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{p}_{tt}, \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}) ds = -(f + u, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{p}(x, 0) = \nabla y_0(x), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p}_t(x, 0) = \nabla y_1(x), \quad (2.8)$$

$$(y_{tt}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, w) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), w) ds = (f + u, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.9)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad (2.10)$$

$$y_t(x, 0) = y_1(x). \quad (2.11)$$

Поскольку целевой функционал является выпуклым, из [13] следует, что задача оптимального управления (2.5)–(2.11) имеет единственное решение $(\mathbf{p}, y, u)$ и что триплет $(\mathbf{p}, y, u)$ является решением (2.5)–(2.11), если и только если имеется сопряженное состояние $(\mathbf{q}, z) \in \mathbf{L} \times \mathbf{W}$ такое, что $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z, u)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(\mathbf{p}_{tt}, \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}) ds = -(f + u, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{p}(x, 0) = \nabla y_0(x), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{p}_t(x, 0) = \nabla y_1(x), \quad (2.14)$$

$$(y_{tt}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}, w) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_t, w) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}(s), w) ds = (f + u, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.15)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad (2.16)$$

$$y_t(x, 0) = y_1(x), \quad (2.17)$$

$$(z_{tt}, w) = (y - y_d, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.18)$$

$$z(x, T) = 0, \quad (2.19)$$

$$z_t(x, T) = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{q}_{tt}, \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{q}, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{q}_t, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \int_t^T (\operatorname{div} \mathbf{q}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}) ds \\ &= (z, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \int_t^T (z(s), \operatorname{div} \mathbf{v}) ds - (z_t, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{q}(x, T) = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{q}_t(x, T) = 0, \quad (2.23)$$

$$\int_0^T (u - \operatorname{div} \mathbf{q} + z, \tilde{u} - u) dt \geq 0 \quad \forall \tilde{u} \in K. \quad (2.24)$$

Неравенство (2.24) можно представить следующим образом:

$$u = \max\{0, \overline{z - \operatorname{div} \mathbf{q}}\} - (z - \operatorname{div} \mathbf{q}), \quad (2.25)$$

где $\overline{z - \operatorname{div} \mathbf{q}} = \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (z - \operatorname{div} \mathbf{q}) dx dt}{\int_0^T \int_{\Omega} 1 dx dt}.$

Пусть $\mathcal{T}_h$ — регулярное разбиение области Ω на прямоугольники, h_τ — диаметр τ и $h = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$. Пусть $\mathbf{V}_h \times W_h \subset \mathbf{V} \times W$ обозначает пространство Равьяра–Тома смешанных конечных элементов наименьшего порядка [18], а именно,

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} : \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_\tau \in Q_{1,0}(\tau) \times Q_{0,1}(\tau)\}, \quad (2.26)$$

$$W_h := \{w_h \in W : \forall \tau \in \mathcal{T}_h, w_h|_\tau \in Q_{0,0}(\tau)\}, \quad (2.27)$$

где $Q_{m,n}(\tau)$ — пространство многочленов, степень которых не превышает m и n по x и y на τ соответственно. Положим $K_h = U_h \cap K$, где $U_h = L^2(J; W_h)$.

Прежде чем представить смешанную конечно-элементную схему, введем два оператора. Сначала определим стандартную $L^2(\Omega)$ -проекцию [7] $P_h : W \rightarrow W_h$, которая удовлетворяет для любого $\phi \in W$ следующим условиям:

$$(P_h \phi - \phi, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.28)$$

$$\|\phi - P_h \phi\|_{-s,r} \leq Ch^{1+s} \|\phi\|_{1,r}, \quad s = 0, 1, \quad 2 \leq r \leq \infty, \quad \forall \phi \in W^{1,r}(\Omega). \quad (2.29)$$

Вспомним проекцию Фортина (см. [1] и [7]) $\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$, которая для любого $\mathbf{q} \in \mathbf{V}$ удовлетворяет условиям:

$$(\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}), w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.30)$$

$$\|\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}\|_{0,\rho} \leq Ch \|\mathbf{q}\|_{1,\rho}, \quad 2 \leq \rho \leq \infty, \quad \forall \mathbf{q} \in (W^{1,\rho}(\Omega))^2, \quad (2.31)$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q})\| \leq Ch \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|_1 \quad \forall \operatorname{div} \mathbf{q} \in H^1(\Omega). \quad (2.32)$$

Теперь построим положительно определенную смешанную конечно-элементную аппроксимацию расщепления для задачи (1.1)–(1.6): найти $(\mathbf{p}_h, y_h, u_h) \in H^2(J; \mathbf{V}_h) \times H^2(J; W_h) \times K_h$ так, что

$$\min_{u_h \in K_h \subset U_h} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (\|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d\|^2 + \|y_h - y_d\|^2 + \|u_h\|^2) dt \right\}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_{htt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ & = -(f + u_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{p}_h(x, 0) = \Pi_h \nabla y_0(x), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{p}_{ht}(x, 0) = \Pi_h \nabla y_1(x), \quad (2.36)$$

$$(y_{htt}, w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_h, w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}, w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(s), w_h) ds = (f + u_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.37)$$

$$y_h(x, 0) = P_h y_0(x), \quad (2.38)$$

$$y_{ht}(x, 0) = P_h y_1(x). \quad (2.39)$$

Подобно непрерывному случаю задача оптимального управления (2.33)–(2.39) имеет единственное решение $(\mathbf{p}_h, y_h, u_h)$, и триплет $(\mathbf{p}_h, y_h, u_h)$ является решением (2.33)–(2.39), если и только если имеется сопряженное состояние $(\mathbf{q}_h, z_h) \in H^2(J; \mathbf{V}_h) \times H^2(J; W_h)$, такое что $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h, u_h)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_{htt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ & = -(f + u_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{p}_h(x, 0) = \Pi_h \nabla y_0(x), \quad (2.41)$$

$$\mathbf{p}_{ht}(x, 0) = \Pi_h \nabla y_1(x), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & (y_{htt}, w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_h, w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}, w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(s), w_h) ds \\ & = (f + u_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$y_h(x, 0) = P_h y_0(x), \quad (2.44)$$

$$y_{ht}(x, 0) = P_h y_1(x), \quad (2.45)$$

$$(z_{htt}, w_h) = (y_h - y_d, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.46)$$

$$z_h(x, T) = 0, \quad (2.47)$$

$$z_{ht}(x, T) = 0, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{q}_{htt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{q}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (\operatorname{div} \mathbf{q}_{ht}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\
& = (z_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (z_h(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds - (z_{ht}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.49)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_h(x, T) = 0, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{q}_{ht}(x, T) = 0, \quad (2.51)$$

$$\int_0^T (u_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + z_h, \tilde{u}_h - u_h) dt \geq 0 \quad \forall \tilde{u}_h \in K_h. \quad (2.52)$$

Аналогичным образом неравенство (2.52) можно переписать в следующем виде:

$$u_h = \max\{0, \overline{z_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h}\} - (z_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h), \quad (2.53)$$

где $\overline{z_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h} = \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (z_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h) dx dt}{\int_0^T \int_{\Omega} 1 dx dt}.$

3. Априорные оценки ошибки

Введем некоторые вспомогательные переменные и получим априорные оценки ошибки. Сначала определим для любого $\tilde{u} \in K$ дискретное решение состояния $(\mathbf{p}_h(\tilde{u}), y_h(\tilde{u}), \mathbf{q}_h(\tilde{u}), z_h(\tilde{u}))$ с $\tilde{u}$, удовлетворяющее

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{p}_{htt}(\tilde{u}), \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(\tilde{u})(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\
& = -(f + \tilde{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_h(\tilde{u})(x, 0) = \Pi_h \nabla y_0(x), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{p}_{ht}(\tilde{u})(x, 0) = \Pi_h \nabla y_1(x), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& (y_{htt}(\tilde{u}), w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(\tilde{u}), w_h) - (\operatorname{div} \mathbf{p}_{ht}(\tilde{u}), w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{p}_h(\tilde{u})(s), w_h) ds \\
& = (f + \tilde{u}, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$y_h(\tilde{u})(x, 0) = P_h y_0(x), \quad (3.5)$$

$$y_{ht}(\tilde{u})(x, 0) = P_h y_1(x), \quad (3.6)$$

$$(z_{htt}(\tilde{u}), w_h) = (y_h(\tilde{u}) - y_d, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (3.7)$$

$$z_h(\tilde{u})(x, T) = 0, \quad (3.8)$$

$$z_{ht}(\tilde{u})(x, T) = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{q}_{htt}(\tilde{u}), \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (\operatorname{div} \mathbf{q}_{ht}(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(\tilde{u})(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\
& = (z_h(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (z_h(\tilde{u})(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds - \\
& \quad (z_{ht}(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\mathbf{p}_h(\tilde{u}) - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_h(\tilde{u})(x, T) = 0, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{q}_{ht}(\tilde{u})(x, T) = 0. \quad (3.12)$$

Как было определено ранее, точное решение и его аппроксимацию можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z) &= (\mathbf{p}(u), y(u), \mathbf{q}(u), z(u)), \\ (\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h) &= (\mathbf{p}_h(u_h), y_h(u_h), \mathbf{q}_h(u_h), z_h(u_h)).\end{aligned}$$

Лемма 3.1. Пусть $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z)$ — решение (2.12)–(2.24), а $(\mathbf{p}_h(u), y_h(u), \mathbf{q}_h(u), z_h(u))$ — решение (3.1)–(3.12) при $\tilde{u} = u$. Предположим, что $y, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ и z обладают достаточной регулярностью для нашей цели. Тогда мы имеем

$$\|y - y_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch, \quad (3.13)$$

$$\|z - z_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch. \quad (3.14)$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h(u), & \rho_2 &= \mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}, & \rho_3 &= y - P_h y, & \rho_4 &= P_h y - y_h(u), \\ \rho_5 &= \Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u), & \rho_6 &= \mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}, & \rho_7 &= z - P_h z, & \rho_8 &= P_h z - z_h(u).\end{aligned}$$

Из (2.12)–(2.23) и (3.1)–(3.12), с (2.28) и (2.30) для любых $w_h \in W_h$ и $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ мы получим следующие уравнения для ошибки:

$$(\rho_{2tt} + \rho_{1tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \rho_1, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \rho_{1t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} \rho_1(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds = 0, \quad (3.15)$$

$$(\rho_{4tt}, w_h) - (\operatorname{div} \rho_1, w_h) - (\operatorname{div} \rho_{1t}, w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} \rho_1(s), w_h) ds = 0, \quad (3.16)$$

$$(\rho_{8tt}, w_h) = (\rho_4, w_h), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}(\rho_{6tt} + \rho_{5tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \rho_5, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (\operatorname{div} \rho_{5t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\operatorname{div} \rho_5(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ = (\rho_8, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\rho_8(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds - (\rho_{8t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\rho_2 + \rho_1, \mathbf{v}_h).\end{aligned} \quad (3.18)$$

Взяв $\mathbf{v}_h = \rho_{1t}$ из (3.15) и используя неравенство Коши, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\rho_{1t}\|^2 + \|\operatorname{div} \rho_1\|^2) + \|\operatorname{div} \rho_{1t}\|^2 \leq C(\|\rho_{2tt}\|^2 + \|\rho_{1t}\|^2) + C \int_0^t \|\operatorname{div} \rho_1(s)\|^2 ds. \quad (3.19)$$

Интегрируя (3.19) от 0 до t и используя $\rho_1(0) = \rho_{1t}(0) = 0$, лемму Гронуолла и (2.31), получим

$$\|\rho_{1t}\|_{L^\infty(L^2)}^2 + \|\operatorname{div} \rho_1\|_{L^\infty(L^2)}^2 + \|\operatorname{div} \rho_{1t}\|_{L^2(L^2)}^2 \leq Ch^2 \|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)}^2. \quad (3.20)$$

Отметим, что $\rho_1 = \int_0^t \rho_{1t}(s) ds$. Тогда имеем

$$\|\rho_1\|^2 \leq C \int_0^t \|\rho_{1t}(s)\|^2 ds. \quad (3.21)$$

Из (3.20), (3.21) получим

$$\|\rho_1\|_{L^\infty(L^2)} + \|\rho_{1t}\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div} \rho_1\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div} \rho_{1t}\|_{L^2(L^2)} \leq Ch \|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)}. \quad (3.22)$$

Взяв $w_h = \rho_{4t}$ из (3.16) и используя неравенство Коши, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho_{4t}\|^2 \leq C(\|\operatorname{div} \rho_1\|^2 + \|\rho_{4t}\|^2 + \|\operatorname{div} \rho_{1t}\|^2) + C \int_0^t \|\operatorname{div} \rho_1(s)\|^2 ds. \quad (3.23)$$

Интегрируя (3.23) от 0 до t и используя $\rho_4(0) = \rho_{4t}(0) = 0$, лемму Гронуолла и (3.22), получим

$$\|\rho_{4t}\|_{L^\infty(L^2)}^2 \leq Ch^2 \|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)}^2. \quad (3.24)$$

Поскольку $\rho_4 = \int_0^t \rho_{4t}(s) ds$, имеем

$$\|\rho_4\|^2 \leq C \int_0^t \|\rho_{4t}(s)\|^2 ds. \quad (3.25)$$

Из (3.24), (3.25) следует, что

$$\|\rho_4\|_{L^\infty(L^2)} + \|\rho_{4t}\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch \|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)}. \quad (3.26)$$

Взяв $w_h = -\rho_{8t}$ из (3.17) и используя неравенство Коши, имеем

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho_{8t}\|^2 \leq C \|\rho_4\|^2 + C \|\rho_{8t}\|^2. \quad (3.27)$$

Интегрируя (3.27) от t до T и используя $\rho_8(T) = \rho_{8t}(T) = 0$, $\rho_8 = -\int_t^T \rho_{8t}(s) ds$, лемму Гронуолла и (3.26), получим

$$\|\rho_8\|_{L^\infty(L^2)} + \|\rho_{8t}\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch \|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)}. \quad (3.28)$$

Взяв $\mathbf{v}_h = -\rho_{5t}$ из (3.18) и используя неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\rho_{5t}\|^2 + \|\operatorname{div} \rho_{5t}\|^2) + \|\operatorname{div} \rho_{5t}\|^2 \\ & \leq C(\|\rho_{6tt}\|^2 + \|\rho_{5t}\|^2 + \|\rho_{8t}\|^2 + \|\rho_8\|^2 + \|\rho_1\|^2 + \|\rho_2\|^2) + C \int_t^T (\|\operatorname{div} \rho_{5t}(s)\|^2 + \|\rho_{8t}(s)\|^2) ds. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Интегрируя (3.29) от t до T и используя $\rho_5(T) = \rho_{5t}(T) = 0$, $\rho_5 = -\int_t^T \rho_{5t}(s) ds$, лемму Гронуолла, (3.22), (3.28) и (2.31), получим

$$\|\rho_5\|_{L^\infty(L^2)} + \|\rho_{5t}\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div} \rho_{5t}\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch(\|\mathbf{p}_{tt}\|_{L^2(H^1)} + \|\mathbf{q}_{tt}\|_{L^2(H^1)} + \|\mathbf{p}\|_{L^2(H^1)}). \quad (3.30)$$

Объединив (3.22), (3.26), (3.28), (3.30), (2.29), (2.31), (2.32) и неравенство треугольника, мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Положим $\beta_1 = \mathbf{p}_h(u) - \mathbf{p}_h$, $\beta_2 = y_h(u) - y_h$, $\beta_3 = \mathbf{q}_h(u) - \mathbf{q}_h$, $\beta_4 = z_h(u) - z_h$. Из (3.1)–(3.12) и (2.40)–(2.51) для любого $w_h \in W_h$ и $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ получим

$$(\beta_{1tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \beta_1, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \beta_{1t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} \beta_1(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds = -(u - u_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h), \quad (3.31)$$

$$(\beta_{2tt}, w_h) - (\operatorname{div} \beta_1, w_h) - (\operatorname{div} \beta_{1t}, w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} \beta_1(s), w_h) ds = (u - u_h, w_h), \quad (3.32)$$

$$(\beta_{4tt}, w_h) = (\beta_2, w_h), \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & (\beta_{3tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} \beta_3, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (\operatorname{div} \beta_{3t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\operatorname{div} \beta_{3t}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ & = (\beta_4, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\beta_4(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds - (\beta_{4t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\beta_1, \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используя анализ устойчивости леммы 3.1, получим

Лемма 3.2. Пусть $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h)$ и $(\mathbf{p}_h(u), y_h(u), \mathbf{q}_h(u), z_h(u))$ — дискретные решения (3.1)–(3.12) при $\tilde{u} = u_h$ и $\tilde{u} = u$ соответственно. Тогда мы имеем

$$\|y_h - y_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} \leq C\|u - u_h\|_{L^2(L^2)}, \quad (3.35)$$

$$\|z_h - z_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{q}_h - \mathbf{q}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} \leq C\|u - u_h\|_{L^2(L^2)}, \quad (3.36)$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{q}_h - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} \leq C\|u - u_h\|_{L^2(L^2)}. \quad (3.37)$$

Лемма 3.3. Пусть u — решение (2.12)–(2.24), а u_h — решение (2.40)–(2.52). Тогда

$$\int_0^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(u) - \operatorname{div} \mathbf{q}_h - (z_h(u) - z_h), u - u_h) dt \leq 0. \quad (3.38)$$

Доказательство. Возьмем $\mathbf{v}_h = \beta_3$ из (3.31), $w_h = \beta_4$ из (3.32), $\mathbf{v}_h = -\beta_1$ из (3.34) и $w_h = -\beta_2$ из (3.33). Тогда при интегрировании четырех полученных в результате уравнений от 0 до T заметим, что

$$\beta_1(0) = \beta_{1t}(0) = \beta_3(T) = \beta_{3t}(T) = 0,$$

$$\beta_2(0) = \beta_{2t}(0) = \beta_4(T) = \beta_{4t}(T) = 0,$$

$$\int_0^T \int_0^t (\operatorname{div} \beta_1(s), \operatorname{div} \beta_3) ds dt = \int_0^T \int_t^T (\operatorname{div} \beta_3(s), \operatorname{div} \beta_1) ds dt$$

и

$$\int_0^T \int_0^t (\operatorname{div} \beta_1(s), \beta_4) ds dt = \int_0^T \int_t^T (\beta_4(s), \operatorname{div} \beta_1) ds dt.$$

Найдем

$$\int_0^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(u) - \operatorname{div} \mathbf{q}_h - (z_h(u) - z_h), u - u_h) dt = -\|\beta_1\|_{L^2(L^2)}^2 - \|\beta_2\|_{L^2(L^2)}^2, \quad (3.39)$$

что дает (3.38). $\square$

Лемма 3.4. Пусть u — решение (2.12)–(2.24), а u_h — решение (2.40)–(2.52). Тогда

$$\|u - u_h\|_{L^2(L^2)} \leq Ch. \quad (3.40)$$

Доказательство. Из (2.24), (2.28) и (2.52) следует, что

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(L^2)}^2 &= \int_0^T (u - u_h, u - u_h) dt \\ &= \int_0^T (u - \operatorname{div} \mathbf{q} + z, u - u_h) dt + \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)) + z_h(u) - z, u - u_h) dt + \\ &\quad \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(u) - \mathbf{q}_h) - (z_h(u) - z_h), u - u_h) dt - \\ &\quad \int_0^T (u_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + z_h, u - P_h u) dt - \int_0^T (u_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + z_h, P_h u - u_h) dt \\ &\leq \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)) + z_h(u) - z, u - u_h) dt + \\ &\quad \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(u) - \mathbf{q}_h) - (z_h(u) - z_h), u - u_h) dt. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Используя неравенство Коши, мы видим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)) + z_h(u) - z, u - u_h) dt \\ & \leq \|\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^2(L^2)}^2 + \|z_h(u) - z\|_{L^2(L^2)}^2 + \frac{1}{2}\|u - u_h\|_{L^2(L^2)}^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда (3.40) может быть доказано с использованием (3.41), (3.42) и лемм 3.1 и 3.3. $\square$

Используя леммы 3.1, 3.2, 3.4 и неравенство треугольника, получим следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z, u)$ и $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h, u_h)$ — решения (2.12)–(2.24) и (2.40)–(2.52) соответственно. Предположим, что $y, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ и z обладают достаточной регулярностью для нашей цели. Тогда имеем

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h)\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch, \quad (3.43)$$

$$\|z - z_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h)\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch. \quad (3.44)$$

4. Сверхсходимост

В этом пункте получим результат по сверхсходимости для переменной управления.

Лемма 4.1. Пусть $(\mathbf{p}_h(P_h u), y_h(P_h u), \mathbf{q}_h(P_h u), z_h(P_h u))$ и $(\mathbf{p}_h(u), y_h(u), \mathbf{q}_h(u), z_h(u))$ — дискретное решение (3.1)–(3.12) при $\tilde{u} = P_h u$ и $\tilde{u} = u$ соответственно. Тогда имеем:

$$\|y_h(P_h u) - y_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} = 0, \quad (4.1)$$

$$\|z_h(P_h u) - z_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} = 0, \quad (4.2)$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^\infty(L^2)} = 0. \quad (4.3)$$

Доказательство. Положим $e_1 = \mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h(u)$, $e_2 = y_h(P_h u) - y_h(u)$, $e_3 = \mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h(u)$, $e_4 = z_h(P_h u) - z_h(u)$. Из (3.1)–(3.12) для любых $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ и $w_h \in W_h$ получим:

$$(e_{1tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} e_1, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} e_{1t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_0^t (\operatorname{div} e_1(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds = -(P_h u - u, \operatorname{div} \mathbf{v}_h), \quad (4.4)$$

$$(e_{2tt}, w_h) - (\operatorname{div} e_1, w_h) - (\operatorname{div} e_{1t}, w_h) + \int_0^t (\operatorname{div} e_1(s), w_h) ds = (P_h u - u, w_h), \quad (4.5)$$

$$(e_{4tt}, w_h) = (e_2, w_h), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & (e_{3tt}, \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div} e_3, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (\operatorname{div} e_{3t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (\operatorname{div} e_{3t}(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds \\ & = (e_4, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \int_t^T (e_4(s), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) ds - (e_{4t}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + (e_1, \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Заметим, что $(P_h u - u, w_h) = 0$ и $(P_h u - u, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0$. Тогда, используя анализ устойчивости леммы 3.1, мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z)$ — решение (2.12)–(2.23), а $(\mathbf{p}_h(u), y_h(u), \mathbf{q}_h(u), z_h(u))$ — решение (3.1)–(3.12) при $\tilde{u} = u$. Предположим, что $y, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ и z обладают достаточной регулярностью для нашей цели. Тогда

$$\|P_h y - y_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch^2, \quad (4.8)$$

$$\|P_h z - z_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch^2, \quad (4.9)$$

$$\|\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h(u))\|_{L^2(L^2)} + \|\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^2(L^2)} \leq Ch^2. \quad (4.10)$$

Доказательство. Мы знаем из [8], что для любых $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ и $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$(\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}, \mathbf{v}_h) \leq Ch^2(\|\mathbf{p}\|_2 \|\mathbf{v}_h\| + \|\mathbf{p}\|_1 \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|). \quad (4.11)$$

Используя такие же оценки, что и в лемме 3.1, мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.3. Пусть u — решение (2.12)–(2.24), а u_h — решение (2.40)–(2.52). Тогда

$$\int_0^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(P_h u) - \operatorname{div} \mathbf{q}_h - (z_h(P_h u) - z_h), P_h u - u_h) dt \leq 0. \quad (4.12)$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 = \mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h, \quad \alpha_2 = y_h(P_h u) - y_h, \quad \alpha_3 = \mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h, \quad \alpha_4 = z_h(P_h u) - z_h.$$

Как и в лемме 3.3 находим, что

$$\int_0^T (\operatorname{div} \mathbf{q}_h(P_h u) - \operatorname{div} \mathbf{q}_h - (z_h(P_h u) - z_h), P_h u - u_h) dt = -\|\alpha_1\|_{L^2(L^2)}^2 - \|\alpha_2\|_{L^2(L^2)}^2, \quad (4.13)$$

откуда получаем (4.12). $\square$

Лемма 4.4. Пусть u — решение (2.12)–(2.24), а u_h — решение (2.40)–(2.52). Предположим, что все условия лемм 4.1–4.3 выполнены. Тогда мы имеем

$$\|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)} \leq Ch^2. \quad (4.14)$$

Доказательство. Взяв $\tilde{u} = u_h$ в (2.24) и $\tilde{u}_h = P_h u$ в (2.52), получим

$$\int_0^T (u_h - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + z_h - u + \operatorname{div} \mathbf{q} - z, P_h u - u_h) dt + \int_0^T (u - \operatorname{div} \mathbf{q} + z, P_h u - u) dt \geq 0. \quad (4.15)$$

Согласно (4.15), (2.28) и (2.30), имеем

$$\begin{aligned} \|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)}^2 &= \int_0^T (P_h u - u_h, P_h u - u_h) dt \\ &= \int_0^T (P_h u - u, P_h u - u_h) dt + \int_0^T (z_h - z - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + \operatorname{div} \mathbf{q}, P_h u - u_h) dt + \\ &\quad \int_0^T (-\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{q}_h + u + z - u_h - z_h, P_h u - u_h) dt \\ &\leq \int_0^T (P_h u - u, P_h u - u_h) dt + \int_0^T (z_h - z - \operatorname{div} \mathbf{q}_h + \operatorname{div} \mathbf{q}, P_h u - u_h) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (u - \operatorname{div} \mathbf{q} + z, P_h u - u) dt \\
&= \int_0^T (\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u)) - (P_h z - z_h(u)), P_h u - u_h) dt + \\
& \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(u) - \mathbf{q}_h(P_h u)) - (z_h(u) - z_h(P_h u)), P_h u - u_h) dt + \\
& \int_0^T (\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h) - (z_h(P_h u) - z_h), P_h u - u_h) dt + \\
& \int_0^T (u - \operatorname{div} \mathbf{q} + z, P_h u - u) dt \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Используя неравенство Коши и леммы 4.1 и 4.2, имеем

$$I_1 \leq C \left(\|\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h(u))\|_{L^2(L^2)}^2 + \|P_h z - z_h(u)\|_{L^2(L^2)}^2 \right) + \frac{1}{3} \|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)}^2 \tag{4.17}$$

и

$$I_2 = 0. \tag{4.18}$$

Используя (2.25), найдем

$$I_4 = \max\{0, \overline{z - \operatorname{div} \mathbf{q}}\} \int_0^T \int_{\Omega} (P_h u - u) dx dt = 0. \tag{4.19}$$

Объединив (4.16)–(4.19) с (4.12), мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Подобно лемме 3.2 справедлива

Лемма 4.5. Пусть $(\mathbf{p}_h(P_h u), y_h(P_h u), \mathbf{q}_h(P_h u), z_h(P_h u))$ и $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h)$ — решения (3.1)–(3.12) при $\tilde{u} = P_h u$ и $\tilde{u} = u_h$ соответственно. Тогда

$$\|y_h(P_h u) - y_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)}, \tag{4.20}$$

$$\|z_h(P_h u) - z_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)}, \tag{4.21}$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{p}_h(P_h u) - \mathbf{p}_h)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{q}_h(P_h u) - \mathbf{q}_h)\|_{L^\infty(L^2)} \leq \|P_h u - u_h\|_{L^2(L^2)}. \tag{4.22}$$

Объединив леммы 4.1–4.5 и неравенство треугольника, мы получим следующую лемму.

Лемма 4.6. Пусть $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z)$ — решение (2.12)–(2.24), а $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h)$ — решение (2.40)–(2.52). Предположим, что все условия лемм 4.1–4.5 выполняются. Тогда

$$\|P_h y - y_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch^2, \tag{4.23}$$

$$\|P_h z - z_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch^2, \tag{4.24}$$

$$\|\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{p} - \mathbf{p}_h)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}_h)\|_{L^\infty(L^2)} \leq Ch^2. \tag{4.25}$$

Для увеличения точности аппроксимации в глобальном масштабе построим сначала оператор восстановления G_h . Пусть $G_h \nu$ — непрерывная кусочно линейная функция (без нулевого граничного условия). Значения $G_h \nu$ в узлах определяются посредством наименьших квадратов на элементных патчах, окружающих узлы. Для получения подробной информации см. определение R_h в [12].

Теперь мы можем получить следующий результат сверхсходимости для переменной управления.

Теорема 4.1. Пусть u и u_h — решения (2.12)–(2.24) и (2.40)–(2.52) соответственно. Предположим, что все условия лемм 4.1–4.5 выполняются. Тогда

$$\|u - G_h u_h\|_{L^2(L^2)} \leq Ch^2. \quad (4.26)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|u - G_h u_h\| \leq \|u - G_h u\| + \|G_h u - G_h P_h u\| + \|G_h P_h u - G_h u_h\|. \quad (4.27)$$

Согласно [12, лемма 4.2], имеем

$$\|u - G_h u\| \leq Ch^2. \quad (4.28)$$

Используя определение G_h , получим

$$G_h u = G_h P_h u, \quad (4.29)$$

$$\|G_h P_h u - G_h u_h\| \leq \|P_h u - u_h\|. \quad (4.30)$$

Объединив (4.27)–(4.30) с леммой 4.4, мы завершаем доказательство теоремы. $\square$

5. Выводы

В данной статье мы изучали априорные оценки ошибки и сверхсходимость положительно определенных смешанных методов расщепления конечных элементов для задач оптимального управления (1.1)–(1.6). Наши теоретические результаты по полудискретной положительно определенной смешанной конечно-элементной аппроксимации расщепления для псевдогиперболических интегро-дифференциальных задач управления представляются новыми.

В нашей следующей работе мы будем обсуждать апостериорные оценки ошибки. Кроме того, будут рассматриваться полностью дискретные положительно определенные смешанные методы конечных элементов для параболических и гиперболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления.

Литература

1. **Brezzi F., and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
2. **Brunner H., and Yan N.** Finite element methods for optimal control problems governed by integral equations and integro-differential equations // Numer. Math. — 2005. — Vol. 101. — P. 1–27.
3. **Chen Y.** Superconvergence of quadratic optimal control problems by triangular mixed finite element elements // Inter. J. Numer. Meths. Eng. — 2008. — Vol. 75, № 8. — P. 881–898.
4. **Chen Y.** Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems // Math. Comp. — 2008. — Vol. 77. — P. 1269–1291.
5. **Chen Y., and Dai Y.** Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations // J. Sci. Comput. — 2009. — Vol. 39. — P. 206–221.

6. **Chen Y., Huang Y., Liu W.B., and Yan N.** Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems // J. Sci. Comput. — 2010. — Vol. 42, № 3. — P. 382–403.
7. **Douglas J., and Roberts J.E.** Global estimates for mixed methods for second order elliptic equations // Math. Comp. — 1985. — Vol. 44. — P. 39–52.
8. **Ewing R.E., Liu M.M., and Wang J.** Superconvergence of mixed finite element approximations over quadrilaterals // SIAM J. Numer. Anal. — 1999. — Vol. 36. — P. 772–787.
9. **Guo H., Fu H., and Zhang J.** A splitting positive definite mixed finite element method for elliptic optimal control problem // Appl. Math. Comput. — 2013. — Vol. 219. — P. 11178–11190.
10. **Hou T., Zhang J., Li Y., and Yang Y.** New elliptic projections and a priori error estimates of H^1 -Galerkin mixed finite element methods for optimal control problems governed by parabolic integro-differential equations // Appl. Math. Comput. — 2017. — Vol. 311. — P. 29–46.
11. **Hou T.** Error estimates of expanded mixed methods for optimal control problems governed by hyperbolic integro-differential equations // Numer. Meth. Part. Differ. Equ. — 2013. — Vol. 29. — P. 1675–1693.
12. **Li R., Liu W.B., and Yan N.** A posteriori error estimates of recovery type for distributed convex optimal control problems // J. Sci. Comput. — 2002. — Vol. 41. — P. 1321–1349.
13. **Lions J.L.** Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
14. **Liu Y., Li H., and Wang J.** Splitting positive definite mixed element method for pseudo-hyperbolic equations // Numer. Meth. Part. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 28. — P. 670–688.
15. **Meyer C., and Rösch A.** Superconvergence properties of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2004. — Vol. 43. — P. 970–985.
16. **Meidner D., and Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems part I: problems without control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47. — P. 1150–1177.
17. **Meidner D., and Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems part II: Problems with control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47. — P. 1301–1329.
18. **Raviart P.A., and Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // Mathematical Aspects of the Finite Element Method. — Berlin: Springer, 1977. — P. 292–315. — (Lect. Notes in Math.; 606).
19. **Shen W., Ge L., Yang D., and Liu W.** Sharp a posteriori error estimates for optimal control governed by parabolic integro-differential equations // J. Sci. Comput. — 2015. — Vol. 65. — P. 1–33.
20. **Wang F., Chen Y., and Tang Y.** Superconvergence of fully discrete splitting positive definite mixed FEM for hyperbolic equations // Numer. Meth. Part. Differ. Equ. — 2014. — Vol. 30. — P. 175–186.
21. **Xing X., and Chen Y.** Superconvergence of mixed methods for optimal control problems governed by parabolic equations // Adv. Appl. Math. Mech. — 2011. — Vol. 3. — P. 401–419.
22. **Yang D., Chang Y., and Liu W.B.** A priori error estimate and superconvergence analysis for an optimal control problem of bilinear type // J. Comput. Math. — 2008. — Vol. 4. — P. 471–487.
23. **Yang D.** A splitting positive definite mixed element method for miscible displacement of compressible flow in porous media // Numer. Meth. Part. Differ. Equ. — 2011. — Vol. 17. — P. 229–249.
24. **Zhang J., and Yang D.** A splitting positive definite mixed element method for second-order hyperbolic equations // Numer. Meth. Part. Differ. Equ. — 2009. — Vol. 25. — P. 622–636.

Поступила в редакцию 11 июля 2018 г.

После исправления 8 октября 2018 г.

Принята к печати 15 октября 2019 г.

