Проблемы логики и методологии науки

ОБ ОНТОЛОГИИ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАНЫХ ЯЗЫКОВ И ТЕОРИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*[1]

Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов

Главные онтологические баталии в современной научной литературе ведутся вокруг вопроса, при каких условиях и как можно говорить о существовании чего бы то ни было (и в каком бы то ни было смысле) *точным* образом. Пока и поскольку этот вопрос не выяснен, все остальные онтологические разговоры напоминают часы со снятым маятником: часы идут в ускоренном темпе, но не показывают время.

Цель работы – выяснить указанный вопрос применительно к языкам и теориям первого порядка, ориентированным на постановку и решение проблем некоторого достаточно общего типа.

Ключевые слова: онтология, язык, теория, логика

§ 1. Тип проблем

Прежде чем говорить о языках и теориях, ориентированных на постановку и решение математических проблем, следует пристальнее (или, если угодно, глубже), чем это обычно делается, всмотреться в, казалось бы, всем хорошо знакомое понятие математической задачи.

1.1. Допустим, вы осознали определенную математическую задачу. Спрашивается, что именно вы осознали? Вероятно, вы всегда можете ответить словами: «Я осознал, что я хочу узнать то-то и то-то». А что значит «я хочу чего-то»? Например, «я хочу пить» – что это значит?

* Исследования, результаты которых отражены в данной статье, поддержаны Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 3 (2012–2014 гг.) «Принципы построения онтологии на основе концептуализации средствами логических дескриптивных языков».

Нет, конечно, никакой ошибки в том, чтобы полагать, что ваши слова «я хочу пить» означают просто вот *это*, где *это* – определенное состояние сознания, которое вы переживаете сейчас как *беспокойство* и которое вы именуете жаждой. Но тогда возникает новый вопрос: как чувство жажды (хотение) связано с фактическим питьем (удовлетворением хотения)? Откуда вы знаете, что удовлетворить жажду можно питьем? Содержится ли в самом переживании жажды осознание того, *чем* эту жажду можно удовлетворить?

Вполне вероятно, что ощущение жажды как-то включает в себя воображаемую картину питья. Но тогда каким образом воображаемое питье содержит информацию о фактическом питье? Ведь как бы сильно ни походила воображаемая картина на факты, все равно в фактическом питье *что-то* должно быть такое, чего недоставало в питье воображаемом. И это отсутствующее в воображении *что-то* и есть в данном случае самое существенное. Иначе мы могли бы утолить жажду сразу – одним воображением.

1.2. Эти вопросы наводят на мысль, что слова «я *хочу* пить» принципиально недоуказывают как раз на то, чем именно и удовлетворяется имеющееся желание. Возникает убеждение, что и вообще удовлетворение любого желания – новость. Причем в чем-то самом существенном – абсолютная новость, эмпирический постфактум, который ни в коем случае не был дан заранее.

А, вместе с тем, столь же несомненно, что когда вы хотите *пить*, вы хотите не просто «новенького вообще», а хотите чего-то определенного; что, следовательно, это «чего-то» каким-то образом предопределяется характером ощущения желания, не будучи данным вам до тех пор, пока вы только хотите и еще не удовлетворили свое хотение.

1.3. Читатель уже догадывается, к чему клонится речь. К тому, что понимать желание вовсе не означает знать *желаемое*, а означает знать *способность* узнать желаемое, как только для этого представится случай.

Иными словами, вы *понимаете* какое-либо беспокоящее вас *желание* (а не просто «томитесь» им) тогда и только тогда, когда вы *уверены* в том, что *любую* вещь, *будь она предъявлена вашему вниманию*, вы в состоянии *убедительным* для вас образом и *безошибочно* распознать как снятие (удовлетворение) или как не-снятие (не-удовлетворение) исходного беспокойства (желания).

В частности, когда вы понимаете, что вы хотите пить, вы находитесь в состоянии уверенности, что все, что ни окажется в поле вашего внимания, вы сумеете убедительным для вас образом и безошибочно распознать как то, что утоляет вашу жажду, или как то, что ее не утоляет. Хотя (следует еще раз подчеркнуть) при этом вы не обязательно заранее знаете, чем именно будет, если будет, достигнуто утоление жажды. По прошлому опыту вы ожидаете, что поглощением воды, но, быть может, поглощение какой-нибудь таблетки тоже утолит вашу жажду.

Желание «я хочу пить» и желание «я хочу пить именно воду» – различные желания. Второе – частный случай первого.

1.4. Добавим несколько пояснений. С одной стороны, нелепо, например, говорить, что некто *понял* свое желание, *удовлетворил* его, но *не* знает (*продолжает* беспокоиться), удовлетворил ли он его. Это так же нелепо, как всерьез (не риторически) спрашивать себя: беспокоюсь ли я, когда я не беспокоюсь?

С другой стороны, столь же нелепо говорить, что некто *понял* свое желание, но на некотором этапе, *пока он его не удовлетворил*, он *не* знает о (*не* уверен в) том, что он его не удовлетворил. Это так же нелепо, как всерьез (не риторически) спрашивать себя: не беспокоюсь ли я, когда я беспокоюсь?

Отсюда вывод: *понятное* человеку желание не может иметь *неубедительного* для него (человека) удовлетворения этого желания. *Неубедительное* удовлетворение (*сомнение* в том, удовлетворение ли это или нет) – вообще не удовлетворение. Более того, оно убедительное *неудовлетворение*.

Из этого, между прочим, следует: попытки говорить о *частичном* понимании желаний не ведут к подлинному обобщению понятия *понимания желания*. Всякое желание *тотально* в том, что оно *всегда* (*при любых обстоятельствах*) может быть только несомненно удовлетворено, или только несомненно не удовлетворено. Всякое (в каких-либо обстоятельствах) сомнение здесь автоматически оборачивается несомненным неудовлетворением.

1.5. Разумеется, нигде не предполагается, что любое понятное человеку желание обязательно *имеет* удовлетворение (*может* быть удовлетворено). Напротив, допустимо считать, что некоторое желание понятно человеку, но всякая вещь, предъявляемая его вниманию, оказывается неудовлетворением этого желания – не везет, и не везет, и не везет…

1.6. Условимся любое понятное желание называть *теоретическим*, если мы, осознавая это желание, дополнительно уверены в том, что всякая вещь в поле нашего внимания только тогда может оказаться его удовлетворением, когда она будет некоторым *текстом* (конечной последовательностью символов) на предварительно выбранном нами языке (с конечным или счетным алфавитом). Типичный пример – мучительное желание вспомнить полузабытые слова, когда-то сказанные дорогим вам человеком.

В случае любого другого понятного, но не теоретического желания предлагается говорить: мы имеем дело с понятным *практическим* желанием.

Удовлетворить понятное теоретическое желание, если оно вообще имеет удовлетворение, – это обнаружить и опознать как снятие исходного беспокойства некоторый подходящий текст. А удовлетворить практическое желание, если оно вообще имеет удовлетворение, – это обнаружить и опознать как снятие исходного беспокойства нечто, вообще говоря, *отличное* от текста (скажем, текст *плюс* эксперимент или, как в приведенном выше примере, поглощение воды).

1.7. Поскольку все мыслимые тексты выбранного языка можно эффективно перечислить, постольку удовлетворение любого понятного теоретического желания, *если оно вообще имеет удовлетворение*, может быть найдено на одном из шагов следующей тривиальной процедуры.

Поочередно, в каком-либо заданном порядке (например, лексикографическом) человек выписывает и пытается опознать как подходящие в качестве удовлетворения всевозможные тексты на принятом языке. Коль скоро единственная важная при этом опознании характеристика текста есть его способность вызывать или не вызывать чувство снятия исходного беспокойства, то в указанном механическом перечне рано или поздно появится текст, если он вообще есть, безошибочно опознаваемый как удовлетворение желания.

Если же теоретическое желание не имеет удовлетворения, то данная процедура не имеет конца.

Желая подчеркнуть эти две возможности, мы говорим, что всякое *понятное теоретическое* желание *полуразрешимо*.

1.8. Вернемся к понятию «задача». Вспомним, что любую задачу можно мыслить себе в терминах «я *хочу* знать...». Поэтому понятная задача – *частный* случай понятного теоретического желания, а ее возможные *решения* и *не-решения* – удовлетворения и неудовлетворения этого желания.

Следовательно, все, что сказано выше о теоретическом желании, относится также и к задаче. А именно, мы *понимаем* задачу тогда и только тогда, когда ей сопоставили чувство уверенности в том, что всякий текст в выбранном нами языке мы сумеем безошибочно распознать как решение или как не-решение задачи.

1.9. Что же касается специфики теоретического желания, делающей его именно *задачей*, то она заключается в следующем. Когда речь идет о задаче, то чувством уверенности и убедительностью снабжают нас некоторые *рассуждения* (а скажем, не воспоминания), и нужный для этого запас таких рассуждений поддается формализации в виде множества всех доказательств в некоторой математической теории.

Чтобы не усложнять изложение, можно считать эту теорию *первопорядковой* аксиоматической системой.

1.10. К слову, Платон вообще отрицал специфику задач по сравнению с теоретическими желаниями, и поэтому он считал, что математическое познание является припоминанием чего-то известного душе ранее, пока она не воплотилась в тело, но забытого ею при воплощении [2]. Между тем эта специфика позволяет говорить о «понятной нам задаче», или «задаче, доступной нашему пониманию», или «осмысленной для нас задаче», как о «задаче *внутри* принятой теории» или как о «формально осмысленной задаче».

Один из приемлемых точных смыслов последнего понятия обеспечивается следующими определениями.

1.11. Пусть фиксирована нумерация упомянутых выше текстов, и пусть, кроме того, фиксирована геделевская нумерация выражений некоторого языка L первого порядка, объемлющего язык арифметики. Пусть также S – произвольная формальная теория в языке L. Пусть, далее, $\mathrm{s}(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ – терм в L, такой, что арифметическое значение $\mathrm{s}(\ulcorner\varphi\urcorner, \mathbf{n})$ есть геделевский номер высказывания, полученного из формулы $\varphi(x)$ подстановкой цифры $\mathbf{n}$ вместо x. И пусть, наконец, Pr_S – любой стандартный предикат доказуемости для S.

Определение 1. Упорядоченная пара $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$, где φ – произвольная формула в L, содержащая точно одну свободную переменную, называется *формально осмысленной задачей* (*в языке* L), если и только если S и φ удовлетворяют следующим условиям («условиям осмысленности»):

1) S непротиворечива;
2) $S \vdash \forall x(\mathrm{Pr}_S(\mathrm{s}(\ulcorner\varphi\urcorner, x)) \vee \mathrm{Pr}_S(\mathrm{s}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x)))$;
3) $S \vdash \forall x(\mathrm{Pr}_S(\mathrm{s}(\ulcorner\varphi\urcorner, x)) \to \varphi(x))$;
4) $S \vdash \forall x(\mathrm{Pr}_S(\mathrm{s}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x)) \to \neg\varphi(x))$.

Как обычно, мы считаем, что произвольные теории S_1 и S_2 равны (пишем $S_1 = S_2$), если они равны как множества теорем, а произвольные формулы φ и ψ равны (пишем $\varphi = \psi$), если φ и ψ графически совпадают. Поэтому из определения 1 вытекает замечание: если $\boldsymbol{\varphi}$ – формально осмысленная задача, причем $\boldsymbol{\varphi} = (S_1, \varphi)$, и $\boldsymbol{\psi}$ – формально осмысленная задача, причем $\boldsymbol{\psi} = (S_2, \psi)$, то $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ тогда и только тогда, когда $S_1 = S_2$ и $\varphi = \psi$.

Определение 2. Если $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$ – формально осмысленная задача, то S называется $\boldsymbol{\varphi}$-*проблемной системой*, φ – *формулировкой для* $\boldsymbol{\varphi}$.

Определение 3. Если $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$ – формально осмысленная задача, то натуральное число n называется *решением* (или *не-решением*) (*для*) $\boldsymbol{\varphi}$ тогда и только тогда, когда имеет место $\varphi(\mathbf{n})$ (или $\neg\varphi(\mathbf{n})$).

1.12. Мотивировать эти определения можно, например, так. Мы уже сказали, касаясь специфики теоретического желания, делающей его задачей, что нужный для осмысления задачи запас убедительных для нас рассуждений поддается формализации в виде множества всех доказательств в некоторой элементарной теории. Подразумеваемая роль $\boldsymbol{\varphi}$-проблемной системы S – быть именно такой теорией.

В этом случае определение 3 и условия 1), 2) определения 1 совместно говорят: мы уверены ($S \vdash \ldots$), что всякий текст ($\forall x \ldots$) мы можем уверенно распознать ($\mathrm{Pr}_S (\ldots)$) как решение задачи $\boldsymbol{\varphi}$ ($\mathrm{Pr}_S (\mathrm{s}(\ulcorner \varphi \urcorner x))$), или уверенно распознать ($\mathrm{Pr}_S (\ldots)$) как не-решение этой задачи ($\mathrm{Pr}_S (\mathrm{s}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner, x))$).

Определение 3 и условия 1) и 3) определения 1 совместно говорят: мы уверены, что всякий текст, если он будет уверенно распознан как решение задачи $\boldsymbol{\varphi}$, будет распознан таковым безошибочно.

Аналогично, определение 3 и условия 1) и 4) определения 1 совместно говорят: мы уверены, что всякий текст, если он будет уверенно распознан как не-решение задачи $\boldsymbol{\varphi}$, будет распознан таковым безошибочно.

1.13. Следует подчеркнуть, однако, что указанным определениям предшествует та или иная нумерация текстов, а также та или иная геделевская нумерация выражений языка L. Поэтому важно отметить, что содержательный смысл одной и той же формально осмысленной задачи будет, вообще говоря, разным при разных независимых выборах двух отмеченных нумераций. Следовательно, понятие формально осмысленной задачи отражает всего лишь формальные ограничения на возможные постановки задач. Эти ограничения необходимо должны быть выполнены, чтобы задачи вообще могли иметь смысл для нас, вооруженных уверенными знаниями в виде рассуждений, закодированных в некоторых формальных системах.

Каждая формально осмысленная задача, таким образом, представляет некий класс содержательно понимаемых задач. Тип проблем, которые имеются в виду в данной статье, – это проблемы, представляемые формально осмысленными задачами.

§ 2. Свойства проблем

2.1. Введем два определения.

Определение 4. Пусть S – произвольная формальная теория в языке L, объемлющем язык арифметики. Тогда *S-множеством* называется множество P_S упорядоченных пар (S, ψ), определяемое условием: $P_S = \{(S, \psi) \mid \psi$ – формула языка L с точно одной свободной переменной, (S, ψ) – формально осмысленная задача $\boldsymbol{\psi}\}$.

Определение 5. Всякое S-множество P_S называется *S-множеством осмысленных* задач, если и только если оно не пусто.

2.2. Наша ближайшая цель – охарактеризовать S, ответив на вопрос: какова S, если S-множество P_S не пусто (является S-множеством осмысленных задач)?

Определение 6. Формальная теория S в языке L, объемлющем язык арифметики, называется *слабой*, если для нее не выполнено хотя бы одно из следующих трех условий Гильберта – Бернайса:

(G1) для всякого высказывания σ из L, если $S \vdash \sigma$, то $S \vdash \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma \urcorner)$;

(G2) для всякого высказывания σ из L

$S \vdash \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma \urcorner) \to \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma \urcorner) \urcorner)$;

(G3) для всяких двух высказываний σ_1, σ_2 из L

$S \vdash \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma_1 \urcorner) \,\&\, \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma_1 \to \sigma_2 \urcorner) \to \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \sigma_2 \urcorner)$.

Термин «слабая» здесь *уместен*. Ибо известно, что рекурсивная арифметика и все ее *надсистемы* удовлетворяют условиям (G1)–(G3), но этого нельзя ожидать от всех *подсистем* рекурсивной арифметики.

Иными словами, справедливо

Утверждение 1. Если формальная теория S содержит рекурсивную арифметику, то S не является слабой.

При этом стоит подчеркнуть, что для слабых систем не проходит обычное доказательство второй теоремы Геделя о неполноте, так как это доказательство апеллирует ко всем трем условиям Гильберта – Бернайса. Более того, Ерослоу предъявил слабую систему, для которой вторая теорема Геделя даже просто неверна [3].

Легко доказать следующее

Утверждение 2. Для любой формальной теории S в языке, объемлющем язык арифметики, если S-множество P_S не пусто, то S – слабая теория.

2.3. Таким образом, отнюдь не всякая непротиворечивая формальная теория S (в языке, объемлющем язык арифметики) годится на роль $\boldsymbol{\varphi}$-проблемной системы для какой-нибудь формально осмысленной задачи $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$. На эту роль годится только такая система, которая является *слабой* в смысле определения 6 и для которой, следовательно, не проходит доказательство второй теоремы Геделя о неполноте. Более того, легко указать такую формальную теорию S, что никакая пара вида (S, φ) не является формально осмысленной задачей. Таковы как раз *обычные* в научной практике системы рассуждений. Например, теория множеств, арифметика Пеано, рекурсивная арифметика и т.д. – следствие утверждений 1 и 2.

2.4. В соответствии с определением 3 слова «*решить* данную формально осмысленную задачу $\boldsymbol{\varphi}$» означают указать такое натуральное число n, чтобы n оказалось решением для $\boldsymbol{\varphi}$. С другой стороны, если $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$ – формально осмысленная задача, то для любого натурального числа n либо $S \vdash \varphi(\mathbf{n})$, либо $S \vdash \neg\varphi(\mathbf{n})$. Однако утверждение «для любого числа n либо $S \vdash \varphi(\mathbf{n})$, либо $S \vdash \neg\varphi(\mathbf{n})$» не означает заведомой разрешимости в S формально осмысленной задачи $\boldsymbol{\varphi}$. Здесь следует помнить, что n кодирует не «ответ», а «обоснование ответа» («решение») формально осмысленной задачи $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому формально осмысленная задача $\boldsymbol{\varphi}$ *разрешима в S* тогда и только тогда, когда либо $S \vdash \varphi(\mathbf{n})$ для некоторого n, либо $S \vdash \forall x \neg\varphi(x)$.

Очевидно также, что *всякая формально осмысленная задача* $\boldsymbol{\varphi} = (S, \varphi)$ *имеет решение в теории S, если вообще имеет решение*.

§ 3. Проблемно-ориентированные языки первого порядка и их свойства

3.1. Пусть L – язык первого порядка (конечной, или счетной, сигнатуры), объемлющий язык арифметики. Всех формальных теорий в этом языке не более чем счетное число. Следовательно, множество ***L*** всех формально осмысленных задач в этом языке тоже не более чем счетное число. Кроме того, мы полагаем L таким, что множество ***L*** не пусто.

Определение *7***.** Всякая пара (L, $\boldsymbol{\Phi}$) называется *проблемно-ориентированным языком* (*первого порядка*), если L – язык, упомянутого вида, I – некоторое непустое множество натуральных чисел, а $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ – некоторое непустое индексированное подмножество множества ***L***.

3.2. Пусть задан проблемно-ориентированный язык (L, $\boldsymbol{\Phi}$). Множеству $\boldsymbol{\Phi}$ однозначно соответствует семейство $\Sigma(\boldsymbol{\Phi})$ φ_i-проблемных систем S_i (*своя* S_i для каждой формально осмысленной задачи φ_i из $\boldsymbol{\Phi}$): $\Sigma(\boldsymbol{\Phi}) = \{S_i\}_{i \in I}$. В свою очередь, семейству $\Sigma(\boldsymbol{\Phi})$ отвечает множество предложений $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$, определяемое соотношением

$$\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi}) = \bigcup_{i \in I} S_i, \tag{1}$$

и множество предложений $\Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$, определяемое соотношением

$$\Sigma_*(\boldsymbol{\Phi}) = \bigcap_{i \in I} S_i\,. \tag{2}$$

Очевидно, что (1) и (2) влекут

$$\Sigma_*(\boldsymbol{\Phi}) \subseteq \Sigma^*(\boldsymbol{\Phi}). \tag{3}$$

Обозначим через *L* множество всех предложений языка L. Заметим, что *L* содержит два взаимно непересекающихся подмножества $True_L$ и $Fals_L$, первое из которых – множество всех тавтологий языка L, второе – множество их отрицаний. Ясно, что

$$True_L \subseteq \Sigma_*(\boldsymbol{\Phi}), \tag{4}$$

поэтому $\Sigma_*(\boldsymbol{\Phi}) \neq \varnothing$. В силу (2) ясно также, что множество $\Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$ является непротиворечивым и дедуктивно замкнутым, т.е. является непротиворечивой формальной теорией в языке L. Очевидно, что этого нельзя заранее утверждать относительно множеств $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$ и $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})\setminus \Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$.

С другой стороны,

$$Fals_L \subseteq L\setminus\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi}), \qquad (5)$$

поэтому $L\setminus\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi}) \neq \varnothing$. Более того, множество $L\setminus\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$ противоречиво, чего опять нельзя заранее утверждать относительно множеств $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$ и $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})\setminus \Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$.

Определение 8. Формальное предложение σ языка L называется

– *априорным* (*априорно истинным*) *относительно* ***Ф***, или ***Ф****-априорным*, если и только если $\sigma \in \Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$;

– *аналитическим* (*аналитически истинным*) *относительно* ***Ф***, или ***Ф****-аналитическим*, если и только если $\sigma \in \Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$ [4].

Из (3) и (4) следует, что множество $An(\boldsymbol{\Phi})$ всех аналитических и множество $A(\boldsymbol{\Phi})$ всех априорных предложений (относительно ***Ф***) заведомо не пусты. Первое из них – формальная теория в языке L, второе – вообще говоря, нет. Кроме того, ясно, что множество $An(\boldsymbol{\Phi})$ заведомо непротиворечиво, а гарантировать непротиворечивость или, наоборот, противоречивость множества $A(\boldsymbol{\Phi})$ в общем случае нельзя.

3.3. Важно подчеркнуть, что для любого предложения σ языка L и любого множества задач ***Ф*** имеют место следующие эквивалентности:

1) σ необходимо для постановки и решения хотя бы одной задачи из $\boldsymbol{\Phi} \Leftrightarrow \sigma \in A(\boldsymbol{\Phi})$ (σ является априорным относительно ***Ф***);
2) σ необходимо для постановки и решения каждой задачи из $\boldsymbol{\Phi} \Leftrightarrow \sigma \in An(\boldsymbol{\Phi})$ (σ является аналитическим относительно ***Ф***).

3.4. Иными словами, сомневаться в любом ***Ф***-априорном или ***Ф***-аналитическом высказывании значит искажать соответственно хотя бы одну задачу из ***Ф*** или сразу все задачи из ***Ф***.

3.5. Следовательно, *если уж мы решили* (подчеркнем: *если уж*) иметь дело с *определенным* классом ***Ф*** задач, то ***Ф***-априорные и ***Ф***-аналитические высказывания *не подлежат сомнению*. Сомнение здесь автоматически оборачивается искажением уже принятого решения.

3.6. Между прочим, интересно было бы доказать или опровергнуть следующую математическую гипотезу: для всякого языка L рассматриваемого здесь вида множество *абсолютных* аналитических предложений в L, т.е. множество $An(\boldsymbol{L})$, совпадает с множеством $True_{\mathrm{L}}$ тавтологий в L, т.е. $An(\boldsymbol{L}) = True_{\mathrm{L}}$.

§4. Проблемно-ориентированные теории первого порядка и их свойства

4.1. Рассмотрим общий сценарий того типа, когда работа математика начинается с выбора тройки $E = (\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi}, U)$, где $(\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi})$ – некоторый проблемно-ориентированный язык; U – некоторая формальная теория в языке L. Причем предполагается, что выбор проблемно-ориентированного языка $(\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi})$ и выбор U осуществлены без всякой связи друг с другом. При таком сценарии математика интересует вопрос: годится ли (является ли достаточной) теория U для постановки (и, следовательно, для нахождения решения, если оно есть) каждой или хотя бы только одной задачи из множества $\boldsymbol{\Phi}$?

Если U годится для постановки и решения каждой задачи из $\boldsymbol{\Phi}$, то U будем называть ***Ф****-адекватной.*

Если U годится для постановки и решения хотя бы только одной задачи из множества $\boldsymbol{\Phi}$, то U будем называть ***Ф****-полезной*.

Очевидно, всякая $\boldsymbol{\Phi}$-адекватная теория является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной. А если множество $\boldsymbol{\Phi}$ одноэлементное, то и наоборот, всякая $\boldsymbol{\Phi}$-полезная теория является $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной.

Если теория U не $\boldsymbol{\Phi}$-полезна, то U будем называть ***Ф****-бесполезной.*

4.2. Итак, рассмотрим упомянутую тройку $E = (\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi}, U)$. Определим

$$UA(\boldsymbol{\Phi}) = U \cap A(\boldsymbol{\Phi})\ ;\ UAn(\boldsymbol{\Phi}) = U \cap An(\boldsymbol{\Phi}).$$

По очевидным причинам эти множества естественно называть (в том порядке, в каком они приведены) ***Ф****-априорной*, ***Ф****-аналитической компонентами теории U*. Заметим, что $UAn(\boldsymbol{\Phi})$ – непротиворечивая подтеория теории U; множество $UA(\boldsymbol{\Phi})$ не является, вообще говоря, подтеорией теории U.

Утверждение 3. Для любой тройки $E = (\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi}, U)$ теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной, если и только если для каждого i-го – $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ – элемента S_{i} семейства $\Sigma^{*}(\boldsymbol{\Phi})$ выполняется условие: априорная компонента теория U объемлет S_{i}, т.е. если и только если

$\forall i \in I\,(UA(\boldsymbol{\Phi}) \supseteq S_i)$.

Утверждение 4. Для любой тройки $E = (\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi}, U)$ теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной**,** если и только если для некоторого i-го – $i \in I$ – элемента S_i семейства $\Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$ выполняется условие: априорная компонента теории U объемлет S_i, т.е. если и только если

$\exists i \in I\,(UA(\boldsymbol{\Phi}) \supseteq S_i)$.

Определение 9. Всякая тройка $E = (\mathrm{L}, \boldsymbol{\Phi}, U)$, рассматриваемого в данном параграфе вида, называется *проблемно-ориентированной теорией в языке* L, если U – $\boldsymbol{\Phi}$-полезная теория.

§ 5. Тип предлагаемой онтологии

5.1. В настоящее время многие философы математики (и математики) привыкли считать, что в рамках языков первого порядка смысл глагола «существовать» должен выражаться не предикатными символами этих языков, а исключительно логическим квантором $\exists$. Между тем эта привычка неудовлетворительна с интуитивной точки зрения, так как ведет к последствиям, которые, в общем, затемняют понимание онтологических суждений.

Два из таких последствий стоит указать явно, а именно: 1) запрет на то, чтобы в зависимости от разных контекстов слово «существовать» употреблять в разных смыслах; 2) запрет на то, чтобы отрицать существование какого-либо индивидуального объекта. Первое последствие означает, что рассматриваемая привычка современных философов несовместима с общепринятой и общепонятной практикой употребления различных наречий (или оборотов, играющих роль наречий) при глаголе «существовать». Второе последствие означает, что эта привычка вынуждает считать заведомо неприемлемым такое, например, утверждение, как «Пегас не существует».

5.2. Следует заметить, однако, что указанная привычка возникла отнюдь не по какой-либо философской или логической необходимости, а как исторический казус. Случилось так, что Кант в том месте «Критики чистого разума», где он ведет речь о несостоятельности онтологического доказательства существования Бога, заявил, что «бытие не есть *реальный* (курсив наш. – *Авт.*) предикат» [5]. Это заявление было в последующем искаженно истолковано как утверждение, что существование – *вообще* не предикат. И в этом искаженном виде оно оказалось воспринято некоторыми (фактически многими) учеными как модная догма: существование не является свойством первого порядка. Так возникла иллюзия, что в рассматриваемой привычке есть некий резон, ради которого можно поступиться здравым смыслом.

5.3. Между тем на протяжении более чем 20 веков до этого казуса философы – в нарушение только что изложенной догмы – развивали онтологию, неизменно рассматривая существования в различных смыслах как своего рода свойства индивидуальных объектов и пытаясь научиться эти свойства как можно более точно описывать. Дело постепенно шло к тому, чтобы онтологию превратить в конечном итоге в аксиоматическое исследование специальных одноместных предикатов первого порядка, выражающих те или иные смыслы существования.

5.4. Предлагаемый ниже подход к онтологии следует рассматривать как возвращение к этой многовековой традиции применительно к проблемно-ориентированным языкам и теориям первого порядка. Приложения 2.1 и 2.2 к работе Ю.Л. Ершова и К.Ф. Самохвалова «Современная философия математики: недомогания и лечение» [6] свидетельствуют о том, что этот тип онтологии не просто интуитивно приемлем, но и удобен. А применительно к проблемно-ориентированным языкам и теориям первого порядка он к тому же поддается, как ниже показывается, точному описанию.

§ 6. Формальные смыслы исходных терминов проблемно-ориентированных языков

6.1. Читатель согласится, конечно, с тем, что, рассуждая на разные темы в любом *фиксированном* языке, мы, вообще говоря, позволяем себе сомневаться то в одном, то в другом *высказывании* в зависимости от текущей темы. Единственное, в чем все-таки непозволительно сомневаться при любом ходе разговоров в фиксированном языке, так это в смыслах, которые мы изначально придали исходным символам выбранного языка. Если такого рода сомнение имеет место, то наши рассуждения не являются рассуждениями в строго *фиксированном* языке, а значит, заведомо не являются строгими.

Отсюда следует, что строгие смыслы всех употребляемых символов какого-то языка выражаются в этом языке всеми теми и только теми предложениями этого языка, которые мы считаем несомненными вне зависимости от темы разговора на нем. Иными словами, смыслы всех терминов рассматриваемого языка задаются его аналитической составляющей.

6.2. Если только что сказанное выразить точно, причем применительно к проблемно-ориентированному языку первого порядка, то мы получим следующие два определения. Пусть (L,***Φ***) – фиксированный проблемно-ориентированный язык, *An*(***Φ***) – множество всех аналитически истинных предложений языка L относительно ***Φ***. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L; *M* – произвольная формальная теория в языке L.

Определение 10. Мы говорим, что пара μ = (q, *M*) *репрезентирует в* (*языке*) L (*формальный*) *смысл для* (*данного*) q *относительно* ***Φ***, а каждая теорема *M* *является постулатом значения в* (*языке*) L *для* (*данного*) q *относительно* ***Φ***, если и только если *M* = *An*(***Φ***).

Определение 11. Мы говорим, что символ q *имеет в* L (*формальный*) *смысл* μ = (q, *M*) *относительно* ***Φ***, если и только если пара (q, *M*) репрезентирует в L смысл для q относительно ***Φ***.

Так как для любого множества ***Φ*** множество *An*(***Φ***) не пусто и является формальной теорией в языке L, то имеют место следующие тривиальные утверждения.

Утверждение 5. Для любых ***Φ*** и q если q – сигнатурный символ языка L, то q имеет в L один и только один смысл μ_q относительно ***Φ***.

Утверждение 6. Для любых ***Φ***, q и p если q и p – различные сигнатурные символы языка L, то q и p имеет в L различные смыслы μ_q и μ_p ($\mu_q \neq \mu_p$) относительно ***Φ***.

Однако читатель твердо должен усвоить, что хотя для любых двух различных сигнатурных символов p и q языка L их смыслы μ_p и μ_q в L относительно ***Φ*** различны, постулаты значения в L для этих символов относительно ***Φ*** одни и те же (составляют одно и то же множество *An*(***Φ***)). Поэтому можно говорить просто о *постулатах значения в* L *относительно* ***Φ***, не указывая конкретного сигнатурного символа языка. Образно говоря, совокупность постулатов значения – это «пьеса», в которой отдельные «персонажи» (сигнатурные символы) играют разные «роли», называемые нами смыслами этих символов [7].

§ 7. Относительные предикаты существования в языках первого порядка

7.1. Напомним, что $An(\boldsymbol{\Phi}) \subseteq A(\boldsymbol{\Phi})$. Напомним также, что $A(\boldsymbol{\Phi})$ может не быть теорией. Кроме того, $A(\boldsymbol{\Phi})$ может быть даже противоречивым множеством предложений. Добавим к этим замечаниям, следующее очевидное

Утверждение 7. Для любого множества $\boldsymbol{\Phi}$ в языке L множество $A(\boldsymbol{\Phi})$ не содержит ни одного предложения L, противоречащего какому-либо постулату значения в L относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Отсюда, между прочим, вытекает, что если $A(\boldsymbol{\Phi})$ – противоречивое множество предложений, то в таком случае оно заведомо не будет теорией (пусть даже и противоречивой).

7.2. Теперь все готово к тому, чтобы приступить к точному описанию, что следует дальше подразумевать под «предикатами существования».

Определение 12. Мы говорим, что сигнатурный символ q языка L является *предикатом существования в* L *в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если: 1) q – одноместный предикатный символ в L; 2) пара μ = (q, M) репрезентирует в L формальный смысл для q относительно $\boldsymbol{\Phi}$; 3) или предложение $\exists x\ \mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение $\exists x\ \neg\mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение $\mathrm{q}(\mathbf{r})$ (где $\mathbf{r}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение $\neg\mathrm{q}(\mathbf{t})$ (где $\mathbf{t}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$.

В соответствии с этим определением имеет место следующее простое

Утверждение 8. Для всякого индексированного множества $\boldsymbol{\Phi}$ формально осмысленных задач в языке L, всякого предиката существования q в L в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ и всякого замкнутого терма $\mathbf{r}$ языка L если $An(\boldsymbol{\Phi}) = A(\boldsymbol{\Phi})$, то $\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{\Phi}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{q}(\mathbf{r}) \notin A(\boldsymbol{\Phi})$.

Справедливость утверждения 8 прямо вытекает из того факта, что по условию теоремы $An(\boldsymbol{\Phi}) = A(\boldsymbol{\Phi})$, а $An(\boldsymbol{\Phi})$ всегда является непротиворечивой формальной теорией в L.

С другой стороны, если $An(\boldsymbol{\Phi}) \neq A(\boldsymbol{\Phi})$, то, как мы знаем, нельзя гарантировать, что $A(\boldsymbol{\Phi})$ является непротиворечивым множеством предложений. Поэтому не исключено, что для некоторого языка L, некоторого индексированного множества $\boldsymbol{\Phi}$ формально осмысленных задач в L, некоторого предиката существования q в L в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ и некоторого замкнутого терма **r** в L: $An(\boldsymbol{\Phi}) \neq A(\boldsymbol{\Phi})$, $\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{\Phi})$ и $\neg\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{\Phi})$.

7.3. В соответствии с определением 12 для всякого предиката существования q в L в смысле (q, M) относительно **Φ** мы говорим, что

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке* L, *существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\ \mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$;

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке* L, *не существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\ \neg\mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в языке* L *под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\mathrm{q}(\mathbf{r})$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в языке* L *под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\neg\mathrm{q}(\mathbf{t})$ принадлежит $A(\boldsymbol{\Phi})$.

7.4. Пусть q – предикат существования в L в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Определение 13. Мы говорим, что q *принадлежит категории предикатов чистого существования в* L *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке L, существуют в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ или некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке L, не существуют в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Определение 14. Мы говорим, что q *принадлежит категории предикатов конструктивного существования в* L *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если какой-либо конкретный объект, подлежащий обсуждению в языке L под именем **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), существует в смысле (q, *M*) относительно ***Φ*** или не существует в смысле (q, *M*) относительно ***Φ***.

Является очевидным следующее

Утверждение 9. Или q принадлежит только категории предикатов чистого существования в L относительно ***Φ***, или q одновременно принадлежит категории предикатов чистого существования в L относительно ***Φ*** и категории предикатов конструктивного существования в L относительно ***Φ***.

§ 8. Абсолютные предикаты существования в языках первого порядка

8.1. Ранее мы договорились для каждого языка L первого порядка, объемлющего язык элементарной арифметики, обозначать через ***L*** множество *всех* формально осмысленных задач в языке L. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L, *M* – произвольная формальная теория в языке L.

Определение 15. Мы говорим, что пара μ = (q, *M*) *репрезентирует в* (*языке*) L (*формальный*) *абсолютный смысл для* (*данного*) q, а каждая теорема *M является абсолютным постулатом значения в* (*языке*) L *для* (*данного*) q, если и только если *M* = *An*(***L***).

Определение 16. Мы говорим, что символ q *имеет в* L (*формальный*) *абсолютный смысл* μ = (q, *M*), если и только если пара (q, *M*) репрезентирует в L абсолютный смысл для q.

Очевидно, имеют место следующие аналоги утверждений 5 и 6:

Утверждение 10. Для любого q если q – сигнатурный символ языка L, то q имеет в L один и только один абсолютный смысл μ_q.

Утверждение 11. Для любых q и p если q и p – различные сигнатурные символы языка L, то q и p имеют в L различные абсолютные смыслы μ_q и μ_p ($\mu_q \neq \mu_p$).

Снова стоит заметить, что хотя для любых двух различных сигнатурных символов p и q языка L их абсолютные смыслы μ_p и μ_q в L различны, абсолютные постулаты значения в L для этих символов одни и те же (составляют одно и то же множество $An(\boldsymbol{L})$). Поэтому можно говорить просто об *абсолютных постулатах значения в* L, не указывая конкретного сигнатурного символа языка.

8.2. Подчеркнем, что $An(\boldsymbol{L}) \subseteq A(\boldsymbol{L})$, где, напомним, $A(\boldsymbol{L})$ – множество всех априорно истинных предложений относительно $\boldsymbol{L}$. Напомним также, что $A(\boldsymbol{L})$ может не быть теорией, зато может быть даже противоречивым множеством предложений. Кроме того, имеет место следующий аналог утверждения 7:

Утверждение 12. Для любого рассматриваемого языка L множество $A(\boldsymbol{L})$ не содержит ни одного предложения этого языка, противоречащего какому-либо абсолютному постулату значения в нем.

Приступим к точному описанию, что следует дальше подразумевать под «абсолютными предикатами существования».

Определение 17. Мы говорим, что сигнатурный символ q языка L является *абсолютным предикатом существования в* L *в смысле* (q, M), если и только если: 1) q – одноместный предикатный символ в L; 2) пара μ = (q, M) репрезентирует в L формальный абсолютный смысл для q; 3) или предложение $\exists x\ \mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{L})$, или предложение $\exists x\ \neg\mathrm{q}(x)$ принадлежит $A(\boldsymbol{L})$, или предложение $\mathrm{q}(\mathbf{r})$ (где $\mathbf{r}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$, или предложение $\neg\mathrm{q}(\mathbf{t})$ (где $\mathbf{t}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$.

Имеет место

Утверждение 13. Для всякого данного L рассматриваемого вида, всякого абсолютного предиката существования q в L в смысле (q, M) и всякого замкнутого терма $\mathbf{r}$ языка L если $An(\boldsymbol{L}) = A(\boldsymbol{L})$, то $\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{L}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{q}(\mathbf{r}) \notin A(\boldsymbol{L})$.

Справедливость утверждения 13 обосновывается точно так же, как и справедливость утверждения 8. С другой стороны, не исключено, что для некоторого языка L, некоторого абсолютного предиката существования q в L в смысле (q, $An(\boldsymbol{L})$) и некоторого замкнутого терма $\mathbf{r}$ в L: $A(\boldsymbol{L}) \neq An(\boldsymbol{L})$, $\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{L})$ и $\neg\mathrm{q}(\mathbf{r}) \in A(\boldsymbol{L})$.

В соответствии с определением 17 для всякого абсолютного предиката существования q в L в смысле (q, M) мы говорим, что

– *некоторые объекты*, *подлежащие обсуждению в языке* L, *существуют в абсолютном смысле* (q, M), если и только если предложение $\exists x$ q(x) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$;

– *некоторые объекты*, *подлежащие обсуждению в языке* L, *не существуют в абсолютном смысле* (q, M), если и только если предложение $\exists x \neg$q(x) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект*, *подлежащий обсуждению в языке* L *под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует в абсолютном смысле* (q, M), если и только если предложение q(**r**) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект*, *подлежащий обсуждению в языке* L *под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в абсолютном смысле* (q, M), если и только если предложение ¬q(**t**) принадлежит $A(\boldsymbol{L})$.

8.3. Пусть q – абсолютный предикат существования в L в смысле (q, M).

Определение 18. Мы говорим, что q *принадлежит категории абсолютных предикатов чистого существования в* L, если некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке L, существуют в абсолютном смысле (q, M) или некоторые объекты, подлежащие обсуждению в языке L, не существуют в абсолютном смысле (q, M).

Определение 19. Мы говорим, что q *принадлежит категории абсолютных предикатов конструктивного существования в* L, если какой-либо конкретный объект, подлежащий обсуждению в языке L под именем **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), существует в абсолютном смысле (q, M) или не существует в абсолютном смысле (q, M).

Является очевидным следующее

Утверждение 14. Или q принадлежит только категории абсолютных предикатов чистого существования в L, или q одновременно принадлежит категории абсолютных предикатов чистого существования в L и категории абсолютных предикатов конструктивного существования в L.

§ 9. Формальные смыслы исходных терминов проблемно-ориентированных теорий

9.1. Пусть фиксированная тройка E = (L,$\boldsymbol{\Phi}$, U) такая, что: L – язык первого порядка, объемлющий язык арифметики; $\boldsymbol{\Phi}$ – индексированное множество формально осмысленных задач в L; U – произвольная формальная система в языке L. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L, M – произвольная формальная теория в языке L.

Определение 20. Мы говорим, что пара μ = (q, M) *репрезентирует в теории U* (*формальный*) *смысл для* (*данного*) q *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, а каждая теорема из M *является постулатом значения в теории U для* (*данного*) q *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если $M = UAn(\boldsymbol{\Phi})$.

Определение 21. Мы говорим, что символ q *имеет в теории U* (*формальный*) *смысл* μ = (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если пара (q, M) репрезентирует в U (формальный) смысл для q относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Рассуждая подобно тому, как это делалось ранее, мы получаем следующие два утверждения:

Утверждение 15. Для любых L, $\boldsymbol{\Phi}$, U и q если q – сигнатурный символ языка L, то q имеет в U один и только один смысл μ_q относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Утверждение 16. Для любых L,$\boldsymbol{\Phi}$, U, q и p если q и p – различные сигнатурные символы языка L, то q и p имеют в U различные смыслы μ_q и μ_p ($\mu_q \neq \mu_p$) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

9.2. Важно подчеркнуть: поскольку отнюдь не для всяких L,$\boldsymbol{\Phi}$, U множество $An(\boldsymbol{\Phi})$ аналитически истинных предложений языка L относительно $\boldsymbol{\Phi}$ совпадает с $\boldsymbol{\Phi}$-аналитической компонентой $UAn(\boldsymbol{\Phi})$ теории U, постольку, вообще говоря, смысл каждого сигнатурного символа q языка L относительно $\boldsymbol{\Phi}$ *в теории U* не совпадает со смыслом этого же символа относительно $\boldsymbol{\Phi}$ *в языке* L. Иными словами, смыслы (относительно $\boldsymbol{\Phi}$) каждого термина языка L в самом языке L и в теории U можно не различать в тех и только тех случаях, когда выполняется условие $UAn(\boldsymbol{\Phi}) = An(\boldsymbol{\Phi})$. В этих случаях мы говорим, что *U семантически* $\boldsymbol{\Phi}$*-адекватна* (*языку* L).

Имеет место следующее

Утверждение 17. Для любых L, $\boldsymbol{\Phi}$, U теория U является семантически $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной тогда, когда U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной теорией**.**

В самом деле, $UAn(\boldsymbol{\Phi}) \subseteq An(\boldsymbol{\Phi})$, но если U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной теорией, то, согласно утверждению 4, $\exists i \in$ I ($UA(\boldsymbol{\Phi}) \supseteq S_i$). С другой стороны, какова бы ни была система S_i, имеет место соотношение $S_i \supseteq An(\boldsymbol{\Phi})$. Значит, если U – $\boldsymbol{\Phi}$-полезная теория, то $UA(\boldsymbol{\Phi}) \supseteq An(\boldsymbol{\Phi})$. Допустим, что U не является семантически $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной: $UAn(\boldsymbol{\Phi}) \neq An(\boldsymbol{\Phi})$. Тогда для некоторого предложения σ языка L имеют место соотношения $\sigma \in An(\boldsymbol{\Phi})$ и $\sigma \notin U$. Но если $\sigma \notin U$, то $\sigma \notin UA(\boldsymbol{\Phi})$. Отсюда $\sigma \in An(\boldsymbol{\Phi})$ и $\sigma \notin UA(\boldsymbol{\Phi})$. Противоречие с ранее установленным соотношением $UA(\boldsymbol{\Phi}) \supseteq An(\boldsymbol{\Phi})$. Стало быть, U– семантически $\boldsymbol{\Phi}$-адекватна, если U – $\boldsymbol{\Phi}$-полезна.

9.3. По определению 9, если тройка (L, $\boldsymbol{\Phi}$, U) – проблемно-ориентированная теория, то теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной. Стало быть, согласно утверждению 17, *в пределах настоящей статьи, все рассматриваемые теории U заведомо являются семантически адекватными.*

§ 10. Предикаты существования в теориях первого порядка

10.1. Пусть L **–** некоторый язык первого порядка, объемлющий язык элементарной арифметики; $\boldsymbol{\Phi}$ – некоторое индексированное множество формально осмысленных задач в языке L; U – произвольная теория первого порядка; $UAn(\boldsymbol{\Phi})$ **–** $\boldsymbol{\Phi}$-аналитическая компонента теории U; $UA(\boldsymbol{\Phi})$ **–** $\boldsymbol{\Phi}$-априорная компонента теории U. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L; M – произвольная элементарная теория в языке L.

Определение 22. Мы говорим, что сигнатурный символ q языка L является *предикатом существования в теории U в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если: 1) q – одноместный предикатный символ в L; 2) пара μ = (q, M) репрезентирует в теории U формальный смысл для q относительно $\boldsymbol{\Phi}$; 3) или предложение $\exists x$ q(x) принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение $\exists x\ \neg$q(x) принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение q($\mathbf{r}$) (где $\mathbf{r}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$, или предложение $\neg$q($\mathbf{t}$) (где $\mathbf{t}$ – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$.

10.2. В соответствии с определением 22 имеет место следующее простое

Утверждение 18. Для всякого множества $\boldsymbol{\Phi}$ в языке L, всякого предиката существования q в U в смысле (q, M) относительно $\mathbf{\Phi}$ и всякого замкнутого терма $\mathbf{r}$ языка L если $UAn(\boldsymbol{\Phi}) = UA(\boldsymbol{\Phi})$, то $q(\mathbf{r}) \in UA(\boldsymbol{\Phi}) \Leftrightarrow \neg q(\mathbf{r}) \notin UA(\boldsymbol{\Phi})$.

С другой стороны, не исключено, что для некоторого языка L, некоторого индексированного множества $\boldsymbol{\Phi}$ формально осмысленных задач в L, некоторой теории U первого порядка, некоторого предиката существования q в U в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ и некоторого замкнутого терма $\mathbf{r}$ в L: $UA(\boldsymbol{\Phi}) \neq UAn(\boldsymbol{\Phi})$, $q(\mathbf{r}) \in UA(\boldsymbol{\Phi})$ и $\neg q(\mathbf{r}) \in UA(\boldsymbol{\Phi})$.

10.3. Пусть некоторый сигнатурный символ q языка L является предикатом существования в теории U в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$. Тогда q, очевидно, является предикатом существования и в языке L относительно $\boldsymbol{\Phi}$, но, вообще говоря, уже в другом смысле. Только в том случае, если теория U является семантически $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной языку L, эти два смысла совпадают. Стало быть, учитывая утверждение 17, мы имеем

Утверждение 19. Пусть некоторый сигнатурный символ q языка L является предикатом существования в теории U в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$. Тогда он является предикатом существования в том же смысле и в языке L относительно $\boldsymbol{\Phi}$, если теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной**.**

10.4. С другой стороны, следует учитывать, что не для всяких L,$\boldsymbol{\Phi}$, U множество $A(\boldsymbol{\Phi})$ априорно истинных предложений языка L относительно $\boldsymbol{\Phi}$ совпадает с $\boldsymbol{\Phi}$-априорной компонентой $UA(\boldsymbol{\Phi})$ теории U. Поэтому не всякий сигнатурный символ q языка L, являющийся предикатом существования в L в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$, всегда является предикатом существования также и в теории U относительно $\boldsymbol{\Phi}$. Но если для данных L и $\boldsymbol{\Phi}$ теория U такова, что всякий сигнатурный символ q языка $\boldsymbol{\Phi}$, являющийся предикатом существования в L в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$, является предикатом существования также и в U в смысле (q, M) относительно $\boldsymbol{\Phi}$, то такую теорию будем называть *онтологически* $\boldsymbol{\Phi}$*-адекватной* (*языку* L).

Опираясь на утверждение 3, легко установить

Утверждение 20. Для любых L, $\boldsymbol{\Phi}$, U теория U является онтологически $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной тогда, когда U является $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной теорией.

10.5. Пусть для данных L и $\boldsymbol{\Phi}$ теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-полезной теорией. Тогда, учитывая определение 22 и утверждение 19, мы говорим для всякого предиката существования q в U в смысле (q, M) относительно $\mathbf{\Phi}$, что

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории* U, *существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\ \mathrm{q}(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$;

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории* U, *не существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\ \neg\mathrm{q}(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории* U *под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\mathrm{q}(\mathbf{r})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории* U *под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\neg\mathrm{q}(\mathbf{t})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$.

10.6. Пусть для данных L и $\boldsymbol{\Phi}$ теория U является $\boldsymbol{\Phi}$-адекватной теорией. Тогда, учитывая определение 22 и утверждение 20, мы говорим для всякого предиката существования q в L в смысле (q, M) относительно $\mathbf{\Phi}$, что

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории* U, *существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\ \mathrm{q}(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$;

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории* U, *не существуют в смысле* (q, M) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение $\exists x\neg\mathrm{q}(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{\Phi})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории* U *под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует* *в смысле* (q, *M*) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение q(**r**) принадлежит *UA*($\boldsymbol{\Phi}$);

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории U под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в смысле* (q, *M*) *относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если предложение ¬q(**t**) принадлежит *UA*($\boldsymbol{\Phi}$).

10.7. Пусть *U* – $\boldsymbol{\Phi}$-адекватная теория в языке L и q – предикат существования в теории *U* смысле (q, *M*) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Определение 23. Мы говорим, что q *принадлежит категории предикатов чистого существования в теории U относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если некоторые объекты, подлежащие обсуждению в *U*, существуют в смысле (q, *M*) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ или некоторые объекты, подлежащие обсуждению в этой теории, не существуют в смысле (q, *M*) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Определение 24. Мы говорим, что q *принадлежит категории предикатов конструктивного существования в теории U относительно* $\boldsymbol{\Phi}$, если и только если какой-либо конкретный объект, подлежащий обсуждению в *U* под именем **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), существует в смысле (q, *M*) относительно $\boldsymbol{\Phi}$ или не существует в смысле (q, *M*) относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

Является очевидным следующее

Утверждение 21. Или q принадлежит только категории предикатов чистого существования в *U* относительно $\boldsymbol{\Phi}$, или q одновременно принадлежит категории предикатов чистого существования в *U* относительно $\boldsymbol{\Phi}$ и категории предикатов конструктивного существования в *U* относительно $\boldsymbol{\Phi}$.

§ 11. Абсолютные предикаты существования в теориях первого порядка

«Абсолютные» версии определений и утверждений параграфов 9 и 10 – содержание настоящего параграфа.

11.1. Пусть L – язык первого порядка, объемлющий язык элементарной арифметики; ***L*** **–** индексированное множество всех формально осмысленных задач в языке L; *U* – формальная теория в языке L; *UAn*(***L***) – ***L***-аналитическая компонента теории *U*; *UA*(***L***) – ***L***-априорная компонента теории *U*. Условимся называть *UAn*(***L***) и *UA*(***L***) *абсолютной в* L *аналитической компонентой теории U* и *абсолютной в* L *априорной компонентой теории U* соответственно. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L; *M* – произвольная формальная теория в языке L.

Определение 25. Мы говорим, что пара μ = (q, *M*) *репрезентирует в теории U* (*формальный*) *абсолютный в* L *смысл для данного* q, а каждая теорема *M является абсолютным в* L *постулатом значения в теории U для* q, если и только если *M* = *UAn*(***L***).

Определение 26. Мы говорим, что символ q *имеет в теории U* (*формальный*) *абсолютный в* L *смысл* μ = (q, *M*), если и только если пара (q, *M*) репрезентирует в *U* абсолютный в L смысл для q .

Утверждение 22. Для любых L, *U* и q если q – сигнатурный символ языка L, то q имеет в *U* один и только один абсолютный в L смысл μ_q.

Утверждение 23. Для любых L, *U*, q и p если q и p – различные сигнатурные символы языка L, то q и p имеют в *U* различные абсолютные в L смыслы μ_q и μ_p ($\mu_q \neq \mu_p$).

11.2. Напомним, что *UAn*(***L***) – абсолютная в L аналитическая компонента теории *U*. Мы говорим, что *U семантически абсолютно адекватна* (*языку* L), если выполняется условие *UAn*(***L***) = *An*(***L***).

Утверждение 24. Для любых L, *U* теория *U* является семантически абсолютно адекватной языку L тогда, когда *U* является ***L***-полезной теорией.

11.3. Пусть по-прежнему L **–** некоторый язык первого порядка, объемлющий язык элементарной арифметики; **L** – индексированное множество всех формально осмысленных задач в языке L; *U* – произвольная теория первого порядка в языке L; *UAn*(***L***) – абсолютная в L аналитическая компонента теории *U*; *UA*(***L***) – абсолютная в L априорная компонента теории *U*. Пусть, далее, q – произвольный сигнатурный символ языка L, *M* – произвольная элементарная теория в языке L.

Определение 27. Мы говорим, что сигнатурный символ q языка L является *абсолютным в* L *предикатом существования в теории* U *в смысле* (q, M), если и только если: 1) q – одноместный предикатный символ в L; 2) пара μ = (q, M) репрезентирует в теории U (формальный) абсолютный в L смысл для q; 3) или предложение $\exists x$ q(x) принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$, или предложение $\exists x$ $\neg$q(x) принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$, или предложение q(**r**) (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$, или предложение $\neg$q(**t**) (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L) принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$.

Утверждение 25. Для всякого языка L рассматриваемого вида, всякого абсолютного в L предиката существования q в U в смысле (q, M) и всякого замкнутого терма **r** языка L если = UA_{L}, то q(**r**) $\in UA_{\mathrm{L}} \Leftrightarrow \neg$q(**r**) $\notin UA_{\mathrm{L}}$.

С другой стороны, не исключено, что для некоторого языка L, некоторой теории U первого порядка, некоторого абсолютного в L предиката существования q в U и некоторого замкнутого терма **r** в L: $UA(\boldsymbol{L}) \neq UAn(\boldsymbol{L})$, q(**r**) $\in UA(\boldsymbol{L})$ и $\neg$q(**r**) $\in UA(\boldsymbol{L})$.

11.4. Далее, мы имеем

Утверждение 26. Пусть некоторый сигнатурный символ q языка L является абсолютным в L предикатом существования в теории U в смысле (q, M). Тогда он является абсолютным в L предикатом существования и в языке L в смысле (q, M), если теория U является ***L***-полезной.

11.5. Если для данного L теория U такова, что всякий сигнатурный символ q языка L, являющийся абсолютным предикатом существования в L в смысле (q, M), является абсолютным в L предикатом существования в смысле (q, M) также и в U, то такую теорию будем называть *онтологически абсолютно адекватной* (*языку* L).

Утверждение 27. Для любых L, U теория U является онтологически абсолютно адекватной языку L тогда, когда U является ***L***-адекватной теорией**.**

11.6. Пусть для языка L рассматриваемого вида теория U является ***L***-полезной теорией. Тогда мы говорим для всякого абсолютного в L предиката существования q в U в смысле (q, M), что

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории U, существуют в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\exists x\ q(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории U, не существуют в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\exists x\ \neg q(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории U под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $q(\mathbf{r})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории U под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\neg q(\mathbf{t})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$.

11.7. Пусть для языка L рассматриваемого вида теория *U* является $\boldsymbol{L}$-адекватной теорией. Тогда мы говорим для всякого абсолютного в L предиката существования q в L в смысле (q, *M*), что

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории U, существуют в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\exists x\ q(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *некоторые объекты, подлежащие обсуждению в теории U, не существуют в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\exists x\ \neg q(x)$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории U под именем* **r** (где **r** – некоторый замкнутый терм языка L), *существует в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $q(\mathbf{r})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$;

– *конкретный объект, подлежащий обсуждению в теории U под именем* **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), *не существует в абсолютном смысле* (q, *M*), если и только если предложение $\neg q(\mathbf{t})$ принадлежит $UA(\boldsymbol{L})$.

11.8. Пусть U – $\boldsymbol{L}$-адекватная теория в языке L и q – абсолютный в L предикат существования в теории U в смысле (q, M).

Определение 28. Мы говорим, что q *принадлежит категории абсолютных в* L *предикатов чистого существования в теории* U, если некоторые объекты, подлежащие обсуждению в U, существуют в абсолютном смысле (q, M) или некоторые объекты, подлежащие обсуждению в этой теории, не существуют в абсолютном смысле (q, M).

Определение 29. Мы говорим, что q *принадлежит категории абсолютных в* L *предикатов конструктивного существования в теории* U, если какой-либо конкретный объект, подлежащий обсуждению в U под именем **t** (где **t** – некоторый замкнутый терм языка L), существует в абсолютном смысле (q, M) или не существует в абсолютном смысле (q, M).

Утверждение 28. Или q принадлежит только категории абсолютных в L предикатов чистого существования в теории U, или q принадлежит только категории абсолютных в L предикатов конструктивного существования в теории U, или q одновременно принадлежит категории абсолютных в L предикатов чистого существования в теории U и категории абсолютных в L предикатов конструктивного существования в теории U.

§ 12. Заключительный философский комментарий

Авторы полагают, что цель, заявленная в преамбуле статьи, достигнута рассуждениями в параграфах 1–11. Однако читатель не должен думать, что в результате произошло всего лишь уточнение ведущихся ныне онтологических разговоров. Напротив, на самом деле возник, если так можно выразиться, *терапевтический эффект*: вместе с уточнением терминологии иные онтологические сюжеты обесценились, а иные стали выглядеть более здраво.

Приведем два конкретных примера известных онтологических сюжетов, подпадающих под указанную терапию.

Первый сюжет – это пресловутое карнаповское требование никогда не путать между собой «внешние» и «внутренние» вопросы о существовании [8]. В нашем подходе этот сюжет преобразуется в требование учитывать различие и попарно сравнивать параграфы 7 и 10 или параграфы

8 и 11. При этом, конечно, не может уже быть и речи о том, что внешние вопросы всегда «бессмысленны», а внутренние – всегда «тривиальны» и предполагают аналитические ответы. В каждом конкретном случае все зависит от исходного выбора тройки (L, ***Ф***, *U*) (ср. параграфы 7, 10) или пары (L, *U*) (ср. параграфы 8, 11).

Второй сюжет касается довольно распространенных разговоров об обязательном разграничении между «чистым» и «конструктивным» существованиями. Разделы 7.4 и 8.3, 10.7 и 11.8 свидетельствуют о том, что, во-первых, это разграничение не всегда является дихотомией и, во-вторых, оно опять-таки определяется исходным выбором задач, с которыми предполагается иметь дело.

Еще раз повторим, что анализ с точки зрения нашего подхода этих двух и других сюжетов (коих немало) из текущей литературы по философии математики или информатики требует куда более обширного (и более нудного) исследования, чем данная статья. Однако общая природа терапевтического воздействия задачного подхода довольно понятна. А именно: этот подход подчеркивает, что такие вещи, как существование или истина, не *открываются*, а, так сказать, «автоматически» *назначаются* нами в ходе осмысления круга задач (целей, желаний), почему-либо выбираемых нами для предстоящих попыток их решить (достичь, удовлетворить.). Если мы решительно ничего не хотим, то для нас нет разницы между существованием и несуществованием или между истиной и ложью – вряд ли в этом случае мы вообще мыслим.

Примечания

1. См.: *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* О новом подходе к философии математики // Структурный анализ символьных последовательностей. – Вып. 101: Вычислительные системы. – Новосибирск, 1984.– С. 141–148; *Они же*. О новом подходе к методологии математики: недомогания и лечение // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 85–106; *Они же*. Современная философия математики: недомогания и лечение. – Новосибирск: Параллель, 2007.

2. См.: *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики. – Прил. 1.1.

3. *Jeroslow R.G.* Consistency statements in formal theories // Fund. Math. – 1971. – V. 72, No. 1. – P. 17–40; *Feferman S.* Review of Jeroslow's «Consistency etc.» // Math. Rev. – V. 25, No. 4913.

4. Исходя из общих философско-терминологических соображений можно было бы добавить еще два определения. А именно, всякое предложение σ языка L называть: *априорно синтетическим* (*априорно синтетически истинным*) *относительно* ***Ф***, если и только если $\sigma \in \Sigma^*(\boldsymbol{\Phi}) \setminus \Sigma_*(\boldsymbol{\Phi})$; *неаприорным относительно* ***Ф***, если и только если $\sigma \notin \Sigma^*(\boldsymbol{\Phi})$. Однако в пределах настоящей статьи нужды в этих дополнительных определениях нет.

5. См.: *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики. – Прил. 2.1, 2.2.

6. Там же.

7. Мы оставляем в стороне проблему синонимии терминов, т.е. вопрос о том, в каких случаях и как упомянутые различные «роли» определяются в качестве «эквивалентных».

8. *Карнап Р.* Эмпиризм, семантика, онтология // Значение и необходимость. – М., 1959; *Quine W.V.* On Carnap′s views on ontology // Phil. Studies. – 1951. – No. 2. – P. 65–72.

Дата поступления 15.08.2013 г.

Институт математики
СО РАН, г. Новосибирск
ershov@math.nsc.ru
clement@math.nsc.ru

***Yershov, Yu.l. and K.F. Samokhvalov.* On the ontology of problem-oriented languages and first-order theories**

Main ontological battles in the modern scientific literature are fought in relation to the question under which circumstances and how one may tell about the existence of anything (and in any sense) exactly. While and since this question is not clarified, all other ontological talks resemble a clock with a pendulum taken off: it works, and works fast, but does not show time. The object of the paper is to clarify the mentioned question in respect to first-order languages and theories oriented to setting and solving some rather general problems.

Keywords: ontology; language; theory; logic