УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ СФЕРЫ В РАЗРЕЖЕННОМ МОЛЕКУЛЯРНОМ ГАЗЕ

А. П. Андреев, А. В. Латышев*, В. Н. Попов, А. А. Юшканов*

Поморский государственный университет, 163002 Архангельск
* Московский государственный областной университет, 107005 Москва
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

В изотермическом приближении решена задача о вращении сферы в разреженном молекулярном газе. С учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена получен профиль массовой скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающейся сферой. Показано, что для разреженного молекулярного газа, в отличие от одноатомного газа, учет вращательных степеней свободы молекул приводит к существенной зависимости массовой скорости газа от числа Прандтля.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, вращающаяся сфера, профиль массовой скорости.

Введение. Рассмотрим сферу радиусом L, взвешенную в неподвижном слаборазреженном газе: $0{,}01 < \mathrm{Kn} < 0{,}40$ ($\mathrm{Kn} = \lambda/L$ — число Кнудсена; λ — средняя длина свободного пробега молекул газа). Предположим, что в некоторый момент времени сфера начинает вращаться с постоянной угловой скоростью Ω_0 вокруг оси, проходящей через ее центр. Вследствие этого во вращательное движение вовлекается газ, окружающий сферу. При установившемся течении массовая скорость газа $\boldsymbol{u}$ направлена по касательным к окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси вращения сферы. Тогда в сферической системе координат (r, φ, θ), начало которой совпадает с центром сферы, массовая скорость газа имеет одну ненулевую компоненту u_φ.

Целью данной работы является построение профиля массовой скорости газа, увлекаемого вращающейся сферой. В настоящее время решение этой задачи получено только для случая одноатомного газа. В работе [1] с использованием численных методов решена задача о вращении сферы в разреженном газе (молекулы газа представляют собой жесткие сферы), движение которого описывается линеаризованным уравнением Больцмана. В [2, 3] методом Лиза с учетом различного числа моментов функции распределения и с использованием модели Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК) кинетического уравнения Больцмана найдены выражения для компоненты u_φ. В данной работе выражение для u_φ получено с использованием аналитических методов, разработанных в [4]. В качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана, учитывающее вращательные степени свободы молекул газа [5], а в качестве граничного условия для функции распределения молекул газа на поверхности сферы — модель диффузного отражения. Выбор модели граничного условия обусловлен тем, что для большинства технических (т. е. не обработанных специальным образом) поверхностей коэффициент диффузности близок к единице. При выводе основного уравнения полагалось, что колебательные степени свободы молекул газа "заморожены", а вращательные описываются на основе классической кинетической теории газов. Расчеты показывают, что такой подход к описанию молекулярных газов применим в достаточно широком диапазоне температур (от 10 до 1000 K). Учет вращательных степеней свободы молекул газа позволил установить зависимость u_φ от числа Прандтля $\Pr = c_p\eta/\varkappa$ (c_p, η, $\varkappa$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, динамическая вязкость и теплопроводность газа соответственно).

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений и их решение. Предположим, что безразмерная массовая скорость газа $U_\varphi = u_\varphi\sqrt{m/(2k_\mathrm{B}T)} \ll 1$. Тогда задача допускает линеаризацию, и функцию распределения частиц газа по координатам и скоростям можно записать в виде [5]

$$f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}, \omega) = f^0(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}, \omega)[1 + Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})]. \tag{1.1}$$

Здесь в изотермическом приближении для двухатомного газа

$$f^0(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}, \omega) = n\Big(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\Big)^{3/2}\frac{J}{k_\mathrm{B}T}\exp\Big(-\frac{m[\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')]^2}{2k_\mathrm{B}T} - \frac{J\omega^2}{2k_\mathrm{B}T}\Big),$$

для многоатомного (число атомов в молекуле $N \geqslant 3$)

$$f^0(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}, \omega) = n\Big(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\Big)^{3/2}\frac{(J_1J_2J_3)^{1/2}}{(2\pi k_\mathrm{B}T)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{m[\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')]^2}{2k_\mathrm{B}T} - \frac{1}{2k_\mathrm{B}T}\sum_{i=1}^{3}J_i\omega_i^2\Big),$$

$\boldsymbol{r}'$ — размерный радиус-вектор; $\boldsymbol{v}$, ω — поступательная и вращательная скорости молекул газа; T, n — температура и концентрация молекул газа; k_B — постоянная Больцмана; m, J_i ($i = 1, 2, 3$) — масса молекулы газа и ее главные моменты инерции; ω_i — проекции скорости вращательного движения молекулы на главные оси инерции; $J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$; $\boldsymbol{r} = 3\sqrt{\pi}\,\Pr/(4\lambda)\,\boldsymbol{r}'$; $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{v}\sqrt{m/(2k_\mathrm{B}T)}$.

В выбранной системе координат функция $Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})$ удовлетворяет уравнению [5]

$$\begin{aligned} C_r\frac{\partial Y}{\partial r} + Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) + k\Big(C_\theta\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial Y}{\partial C_r} + (C_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta)\frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - \\ - (C_\varphi C_\theta\operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi)\frac{\partial Y}{\partial C_\varphi}\Big) = \int K(\boldsymbol{C}, \nu; \boldsymbol{C}', \nu')\,Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}')\,d\Omega'. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $k = 4\,\mathrm{Kn}/(3\sqrt{\pi}\,\Pr)$; $\nu = \omega\sqrt{J/(2k_\mathrm{B}T)}$;

$$K(\boldsymbol{C}, \nu; \boldsymbol{C}', \nu') = 1 + 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' + \frac{1}{l+1/2}(C^2 + \nu^2 - l - 1/2)(C'^2 + \nu'^2 - l - 1/2),$$

$l = 2$, $d\Omega = 2\pi^{-3/2}\exp(-C^2 - \nu^2)\nu\,d\nu\,d^3C$ для двухатомного газа и $l = 5/2$, $d\Omega = \pi^{-3}\exp(-C^2 - \nu^2)\,d^3\nu\,d^3C$ для многоатомного газа.

В задачах обтекания газом твердой поверхности функция распределения пропорциональна величине проекции скорости молекул газа на касательное к обтекаемой поверхности направление C_τ [6] (в рассматриваемой задаче $C_\tau = C_\varphi$). С учетом сказанного выше решение (1.2) будем искать в виде

$$Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = C_\varphi Z(r, C_r) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(C_\theta, C_\varphi)\,\omega_j(r, C_r). \tag{1.3}$$

Здесь функции $g_j(C_\theta, C_\varphi)$ образуют с C_φ полную систему ортогональных в смысле скалярного произведения многочленов. Под ортогональностью в смысле скалярного произведения понимается равенство нулю интеграла

$$\int \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2 - \nu^2)C_\varphi\,g_j(C_\theta, C_\varphi)\,dw. \tag{1.4}$$

В случае двухатомного газа $dw = \nu\, d\nu\, dC_\theta dC_\varphi$, а интегрирование ведется по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$ и по ν от 0 до $+\infty$. В случае многоатомного газа $dw = d\nu\, dC_\theta dC_\varphi$, а интегрирование ведется по C_θ, C_φ, ν от $-\infty$ до $+\infty$. С учетом (1.4) для $Z(x,\mu)$ получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x,\tau) \exp(-\tau^2)\, d\tau + k\Big(\mu Z(x,\mu) - 2\,\frac{\partial Z}{\partial \mu}\Big), \tag{1.5}$$

где $x = r - R$; $R = 3\sqrt{\pi}\ \mathrm{Pr}\ L/(4\lambda)$; $\mu = C_r$.

Разложим $Z(x,\mu)$ в ряд по степеням k:

$$Z(x,\mu) = kZ_1(x,\mu) + k^2 Z_2(x,\mu) + \ldots. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, находим

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_1(x,\tau) \exp(-\tau^2)\, d\tau; \tag{1.7}$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_2(x,\tau) \exp(-\tau^2)\, d\tau + \mu Z_1(x,\mu) - 2\,\frac{\partial Z_1}{\partial \mu}. \tag{1.8}$$

Определим граничные условия для уравнений (1.7), (1.8). С учетом (1.1), (1.3), (1.6) находим граничные условия вдали от поверхности сферы

$$Z_1(\infty,\mu) = Z_2(\infty,\mu) = 0. \tag{1.9}$$

Для построения граничных условий на поверхности сферы запишем (1.1) в виде

$$f(\boldsymbol{r'},\boldsymbol{v},\omega) = f_0(v,\omega)[1 + \Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})]. \tag{1.10}$$

Здесь $f_0(v,\omega)$ — абсолютный максвеллиан. Для двухатомного газа

$$f_0(v,\omega) = n\Big(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\Big)^{3/2} \frac{J}{k_{\mathrm{B}}T} \exp\Big(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T} - \frac{J\omega^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\Big),$$

для многоатомного

$$f_0(v,\omega) = n\Big(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\Big)^{3/2} \frac{(J_1J_2J_3)^{1/2}}{(2\pi k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T} - \frac{1}{2k_{\mathrm{B}}T}\sum_{i=1}^{3} J_i\omega_i^2\Big).$$

Следуя [7], для построения функции $\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})$ введем новый масштаб в конфигурационном пространстве. Переопределим безразмерную координату, так чтобы выполнялось равенство $\boldsymbol{r'} = L\boldsymbol{r}$ (новую безразмерную координату обозначим через r). Тогда уравнение для $\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})$ можно записать в виде

$$C_r\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big(C_\theta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\,\frac{\partial\Psi}{\partial C_r} +$$

$$+ (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta)\,\frac{\partial\Psi}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi)\,\frac{\partial\Psi}{\partial C_\varphi}\Big) =$$

$$= k^{-1}\Big(\pi^{-3/2} \iiint \exp(-C'^2)\, K(\boldsymbol{C},\nu;\boldsymbol{C}',\nu')\, \Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}')\, d\Omega' - \Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})\Big). \tag{1.11}$$

Учитывая, что отношение правой части уравнения (1.11) к левой части имеет порядок Kn^{-1}, для построения решения (1.11) можно использовать метод последовательных приближений. Представим $\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})$ в виде разложения по степеням k:

$$\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = \psi^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + k\psi^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + k^2\psi^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + \ldots . \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, в изотермическом приближении получаем систему рекуррентных соотношений для определения $\psi^{(i)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})$ $(i = 0 \div 2)$:

$$\psi^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = 2C_\varphi U_\varphi^{(0)}, \qquad \psi^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = 2C_\varphi U_\varphi^{(1)} - 2C_r C_\varphi S_{r\varphi}^{(0)}; \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = 2C_\varphi U_\varphi^{(2)} - 2C_r C_\varphi\, S_{r\varphi}^{(1)} + 2C_r^2 C_\varphi \frac{\partial S_{r\varphi}^{(0)}}{\partial r} + \frac{2C_r C_\theta C_\varphi}{r}\frac{\partial S_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \theta} + \\ + \frac{2C_\varphi}{r}(C_\theta^2 + C_\varphi^2) S_{r\varphi}^{(0)} - \frac{2C_r}{r}(C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi) S_{r\varphi}^{(0)};\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$S_{r\varphi}^{(i)} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_\varphi^{(i)}}{\partial r} - \frac{U_\varphi^{(i)}}{r}.$$

Здесь $S_{r\varphi}^{(i)}$ — компоненты тензора скоростей деформации; $U_\varphi^{(i)}$ — коэффициенты в разложении в ряд по параметру k безразмерной массовой скорости газа:

$$U_\varphi = U_\varphi^{(0)} + kU_\varphi^{(1)} + k^2 U_\varphi^{(2)} + \ldots . \tag{1.15}$$

Заметим, что с учетом (1.15) в ряд по параметру k можно разложить и $S_{r\varphi}$:

$$S_{r\varphi} = S_{r\varphi}^{(0)} + kS_{r\varphi}^{(1)} + k^2 S_{r\varphi}^{(2)} + \ldots . \tag{1.16}$$

Подставляя в (1.10) разложения (1.6) и (1.12), с учетом модели диффузного отражения молекул газа поверхностью сферы находим

$$Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})|_S = -[k\psi^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + k^2\psi^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})]\,|_S. \tag{1.17}$$

Умножая обе части (1.17) в случае двухатомного газа на $\nu\, d\nu\, dC_\theta dC_\varphi$ и интегрируя по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$ и по ν от 0 до $+\infty$, а в случае многоатомного газа — на $d\nu\, dC_\theta dC_\varphi$ и интегрируя по C_θ, C_φ, ν от $-\infty$ до $+\infty$, с учетом (1.3), (1.13), (1.14) и условия ортогональности (1.4) получаем

$$Z_1(0,\mu) = -2U_\varphi^{(1)} + 2\mu S_{r\varphi}^{(0)}, \qquad \mu > 0; \tag{1.18}$$

$$Z_2(0,\mu) = -2U_\varphi^{(2)} + 2\mu S_{r\varphi}^{(1)} - 2\mu^2 \frac{\partial S_{r\varphi}^{(0)}}{\partial r} + 2(\mu^2 - 2)\, S_{r\varphi}^{(0)}, \qquad \mu > 0. \tag{1.19}$$

Входящие в (1.18) и (1.19) значения $U_\varphi^{(1)}$ и $U_\varphi^{(2)}$ найдем из условия разрешимости краевых задач (1.7), (1.9), (1.18) и (1.8), (1.9), (1.19), которые имеют вид [8]

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\,\mu\,\exp(-\mu^2)\, Z_1(0,\mu)\, d\mu = 0, \\ \int\limits_0^\infty \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\left\{\mu\,\exp(-\mu^2)\, Z_2(0,\mu) - 2[\mu a(\mu)]'\right\} d\mu = 0,\end{gathered} \tag{1.20}$$

где

$$a(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} S_{r\varphi}^{(0)}, \qquad \lambda^{\pm}(\mu) = \lambda(\mu) \pm \sqrt{\pi}\, i\mu \exp(-\mu^2),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, z \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z}\, d\mu, \qquad X(z) = \frac{1}{z} \exp\Big(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\theta(\tau) - \pi}{\tau - z}\, d\tau\Big),$$

$$X^{\pm}(\mu) = -\frac{\lambda^{\pm}(\mu)}{|\lambda^+(\mu)|} X(\mu), \qquad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\, \tau \exp(-\tau^2)}.$$

Подставляя (1.18), (1.19) в (1.20) и учитывая, что согласно [8]

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} [\mu a(\mu)]'\, d\mu = -2S_{r\varphi}^{(0)},$$

получаем

$$U_{\varphi}^{(1)} = -Q_1 S_{r\varphi}^{(0)},$$
$$U_{\varphi}^{(2)} = -Q_1 S_{r\varphi}^{(1)} + Q_2 \frac{\partial S_{r\varphi}^{(0)}}{\partial r} - (Q_2 + 3)\, S_{r\varphi}^{(0)}. \tag{1.21}$$

Здесь Q_n — интегралы Лойалки [9]:

$$Q_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \exp(-\mu^2) \mu^{n+1}\, d\mu$$

($Q_1 = -1{,}016\,19$, $Q_2 = -1{,}266\,32$).

На поверхности сферы

$$U_{\varphi}^{(0)} = \Omega R \sin\theta, \tag{1.22}$$

где Ω — безразмерная угловая скорость вращения сферы, связанная с Ω_0 соотношением $\Omega R = \Omega_0 L \sqrt{m/(2k_{\rm B}T)}$.

С учетом (1.15), (1.16) и (1.21), (1.22) выражение для массовой скорости газа на поверхности сферы записывается в виде

$$U_{\varphi} = \Omega R \sin\theta - kQ_1 S_{r\varphi} + k^2 \Big(Q_2 \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial r} - (Q_2 + 3)\, S_{r\varphi}\Big). \tag{1.23}$$

2. Построение профиля массовой скорости в объеме газа. В рамках классической гидродинамики массовая скорость газа, увлекаемого вращающейся сферой, определяется выражением

$$U_{\varphi}(r, \theta) = \frac{B}{r^2} \sin\theta. \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.23), находим

$$B = \frac{\Omega R^3}{1 - 3kQ_1 - 3k^2(4Q_2 + 3)}.$$

Нормированные на $\Omega_0 L \sin\theta \, (L/r')^2$ значения массовой скорости газа при различных значениях чисел Кнудсена и Прандтля

Kn	H_2O (Pr = 1,01)	NH_3 (Pr = 0,93)	O_2 (Pr = 0,85)	Воздух (Pr = 0,71)	Cl_2 (Pr = 0,64)	Одноатомный газ (Pr = 2/3)
0,01	0,9775	0,9755	0,9733	0,9681	0,9646	0,9660
0,05	0,8912	0,8823	0,8718	0,8483	0,8330	0,8391
0,10	0,7927	0,7769	0,7585	0,7181	0,6926	0,7028
0,15	0,7053	0,6844	0,6605	0,6094	0,5780	0,5905
0,20	0,6283	0,6041	0,5768	0,5197	0,4857	0,4991
0,25	0,5610	0,5348	0,5056	0,4460	0,4114	0,4250
0,30	0,5024	0,4751	0,4452	0,3854	0,3514	0,3647
0,35	0,4513	0,4238	0,3939	0,3353	0,3028	0,3154
0,40	0,4068	0,3795	0,3502	0,2937	0,2630	0,2749

Таким образом, профиль массовой скорости газа определяется выражением

$$U_\varphi(r,\theta) = \frac{\Omega R}{1 - 3kQ_1 - 3k^2(4Q_2+3)} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\theta. \tag{2.2}$$

Переходя в (2.2) к размерным величинам, находим

$$u_\varphi(r',\theta) = \frac{\Omega_0 L}{1 + (2C_m^{(0)}\,\mathrm{Kn}\,/\,\mathrm{Pr})(1 + 2C_m^{(0)}\zeta\,\mathrm{Kn}\,/\,\mathrm{Pr})} \left(\frac{L}{r'}\right)^2 \sin\theta. \tag{2.3}$$

Здесь коэффициент $C_m^{(0)} = -2Q_1/\sqrt{\pi} = 1{,}146\,65$ имеет смысл коэффициента изотермического скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности; $\zeta = -(4Q_2+3)/(3Q_1^2)$. Поскольку $Q_2 + 3/4 = -Q_1^2/2$ [4], выражение (2.3) окончательно принимает вид

$$u_\varphi(r',\theta) = \frac{\Omega_0 L}{1 + (2C_m^{(0)}\,\mathrm{Kn}\,/\,\mathrm{Pr})[1 + 4C_m^{(0)}\,\mathrm{Kn}\,/(3\,\mathrm{Pr})]} \left(\frac{L}{r'}\right)^2 \sin\theta. \tag{2.4}$$

В случае простого (одноатомного) газа Pr = 2/3. Соответственно

$$u_\varphi(r',\theta) = \frac{\Omega_0 L}{1 + 3C_m^{(0)}\,\mathrm{Kn}\,(1 + 2C_m^{(0)}\,\mathrm{Kn})} \left(\frac{L}{r'}\right)^2 \sin\theta.$$

Соотношение (2.4) определяет массовую скорость газа, увлекаемого вращающейся сферой. Из (2.4) следует, что учет вращательных степеней свободы молекул газа приводит к зависимости массовой скорости газа от числа Прандтля. Так как значения числа Прандтля для различных газов варьируются в достаточно широком диапазоне (например, для водяного пара при температуре 100 °C Pr = 1,01, для аммиака (NH_3) Pr = 0,93, для двуокиси серы (SO_2) Pr = 0,85, для хлора (Cl_2) Pr = 0,64, для воздуха Pr = 0,71), учет этой зависимости вносит существенные поправки в значения скорости газа. В таблице приведены нормированные на $\Omega_0 L \sin\theta\,(L/r')^2$ значения массовой скорости газа, вычисленные по формуле (2.4) при различных значениях чисел Кнудсена и Прандтля.

Заключение. В работе в изотермическом приближении построен профиль массовой скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающейся в нем сферой. Установлена существенная зависимость массовой скорости газа от числа Прандтля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Loyalka S. K.** Motion of sphere in gas: Numerical solution of the linearized Boltzmann equation // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. P. 1049–1056.
2. **Поддоскин А. Б., Юшканов А. А.** Вращение сферы в неограниченном газе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 165–171.
3. **Смирнов Л. П., Чекалов В. В.** Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 4. С. 117–124.
4. **Латышев А. В.** Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений: Моногр. / А. В. Латышев, В. Н. Попов, А. А. Юшканов. Архангельск: Помор. ун-т, 2004.
5. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение задачи о скачке температуры в газе с вращательными степенями свободы // Теорет. и мат. физика. 1993. Т. 95, № 3. С. 530–540.
6. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
7. **Sone Y.** Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary. 1 // Rarefied gas dynamics: N. Y.; L.: Acad. Press, 1969. V. 1. P. 243–253.
8. **Попов В. Н.** Постановка граничных условий на обтекаемых разреженным газом искривленных поверхностях // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 14. С. 87–94.
9. **Loyalka S. K.** The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport Theory Statist. Phys. 1975. V. 4. P. 55–65.

Поступила в редакцию 20/I 2009 г.,
в окончательном варианте — 10/IX 2009 г.