УДК 539.3

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДИЛАТИРУЮЩИХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ СРЕД

А. В. Березин

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990 Москва
E-mail: berezin@imash.ru

Исследуются трещины, возникающие в материалах, обладающих свойствами дилатансии и разносопротивляемости (различные модули упругости при различных видах напряженного состояния). Изучено распределение напряжений и деформаций в дилатирующих разносопротивляющихся телах с трещинами, позволяющее оценить влияние поврежденности на характеристики трещиностойкости.

Ключевые слова: разрушение, трещины, прочность.

Запишем выражение для упругого потенциала в виде

$$\Phi = \alpha\sigma_i^2\varphi(\sigma_0/\sigma_i)/2 + \sigma_0^2\alpha_1/2,$$

где σ_i — интенсивность напряжений; σ_0 — шаровая часть тензора напряжений. Связь между напряжением и деформацией имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\,\alpha\omega(u)\bar\sigma_{ij} + \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big(\alpha_1\sigma_0 + \alpha\sigma_i\,\frac{\varphi^2(u)-\omega(u)}{u}\Big), \qquad (1)$$

где ε_{ij} — тензор малых деформаций; $\bar\sigma_{ij}$ — девиатор тензора напряжений; α, α_1 — постоянные; $u = \sigma_0/\sigma_i$; $\omega(u)$ — функция разномодульности; $\varphi^2(u) = -2u^2\displaystyle\int\frac{\omega(u)}{u^3}\,du$; δ_{ij} — тензор Кронекера.

Эффекты разносопротивляемости рассмотрены в [1, 2]. При умеренных нагрузках соотношения (1) описывают поведение графитовых материалов при пропорциональном нагружении [3, 4]. В [5] получены зависимости деформации от параметра $u = \sigma_0/\sigma_i$ для повреждающихся пластических материалов. Показано, что распределение напряжений и деформаций по координате r (r — расстояние от вершины выреза или трещины) вблизи вырезов и трещин в материалах, в которых связь между напряжениями и деформациями определяется уравнением (1), не зависит от функций $\varphi = \varphi(\sigma_0/\sigma_i)$, $\omega = \omega(\sigma_0/\sigma_i)$ и имеет тот же вид, что и в случае $\varphi \equiv 1$, $\omega \equiv 1$. Доказательство этого утверждения приведено в [5].

В плоской задаче асимптотические выражения для напряжений и деформаций в концевой области трещины имеют вид $\sigma_{ij} = r^{-1/2}f_{ij}(\theta)$, $\varepsilon_{ij} = r^{-1/2}\varepsilon_{ij}(\theta)$. Следовательно, функция $\varphi(\sigma_0/\sigma_i)$ оказывает влияние только на зависимости напряжений и деформаций от полярного угла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00915-а).

Итерационная схема метода последовательных приближений, используемого для определения функций напряжений $X(z,\bar z)$, имеет вид [6–8]

$$\frac{\partial^4 X^{(n)}}{\partial^2 z\,\partial^2 \bar z} = f^{(n-1)}(z,\bar z),$$

$$X^{(n)} = X_0^{(n)} + \iiiint f^{(n-1)}(z,\bar z)\,dz\,dz\,d\bar z\,d\bar z,$$

$$f^{(n-1)}(z,\bar z) = -\frac{1}{16(\alpha+\alpha_1/9+\alpha\delta u^{(n-1)})}\Big[\frac{4}{3}\,\alpha\delta\,\frac{\partial^2\sigma_i^{(n-1)}}{\partial z\,\partial\bar z} + \tag{2}$$

$$+ \frac{3}{2}\,\alpha\delta\Big(\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial z^2}\,(-\sigma_{11}^{(n-1)}+\sigma_{22}^{(n-1)}-2i\sigma_{12}^{(n-1)}) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial \bar z^2}\,(-\sigma_{11}^{(n-1)}+\sigma_{22}^{(n-1)}-2i\sigma_{12}^{(n-1)}) + 2\,\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial z\,\partial\bar z}\,(\sigma_{11}^{(n-1)}+\sigma_{22}^{(n-1)}) -$$

$$- 4\,\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial z\,\partial\bar z}\,\sigma_0^{(n-1)} + 8\,\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial z}\,\frac{\partial\sigma_0^{(n-1)}}{\partial\bar z} + 8\,\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial\bar z}\,\frac{\partial\sigma_0^{(n-1)}}{\partial z}\Big)\Big],$$

где $X(z,\bar z)$ — решения задач о трещинах в разносопротивляющихся дилатирующих средах в условиях плоского напряженного состояния в комплексных переменных $z = x+iy$, $\bar z = x-iy$; $X_0^{(n)}$ — решение однородного уравнения; $\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(\sigma_{11}^{(n)})^2 - \sigma_{11}^{(n)}\sigma_{22}^{(n)} + (\sigma_{22}^{(n)})^2 + 3(\sigma_{12}^{(n)})^2}$ — интенсивность напряжений; $\sigma_0^{(n)} = (\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)})/3$ — шаровая часть тензора напряжений; $u^{(n)} = \sigma_0^{(n)}/\sigma_i^{(n)}$; δ — малый параметр; n — номер итерации.

В механике разрушения тел с трещинами в общем случае деформации в окрестности произвольной точки контура трещины представляются в виде суммы деформаций трех типов, соответствующих трем типам относительных перемещений берегов трещины: нормальному отрыву (тип I), поперечному (тип II) и продольному (тип III) сдвигам. Деформация типа I обусловлена смещением берегов трещины в противоположных направлениях по нормали к поверхности трещины. Деформация типа II соответствует смещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, перпендикулярном фронту трещины. Деформация типа III соответствует скольжению поверхностей трещины в направлении, параллельном фронту трещины. При любом относительном смещении $\boldsymbol{U}$ берегов трещины выполняется равенство

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{\rm I} + \boldsymbol{U}_{\rm II} + \boldsymbol{U}_{\rm III}.$$

В нелинейной механике разрушения (в частности, для дилатирующих разносопротивляющихся сред) основными являются задачи определения трех типов относительных смещений берегов трещины, задающих локальные деформации в окрестности вершины трещины, при заданном напряженном состоянии тела с трещиной. С учетом результатов, полученных в работе [6], и приведенного в этой работе представления напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины по аналогии с линейной механикой разрушения вводятся коэффициенты интенсивности напряжений $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$, $K_{\rm III}$, соответствующие трем типам относительных смещений берегов трещины: нормальному отрыву, поперечному и продольному сдвигам. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений и скоростей освобождения энергии при распространении трещины при заданном напряженно-деформированном состоянии тела является задачей механики разрушения, так как с использованием значений этих коэффициентов можно определить локальное напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины. Задав локальный критерий разрушения, выраженный через коэффициенты $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$, $K_{\rm III}$, можно определить способность тела к разрушению. Каждому виду разрушения соответствует определенное напряженно-деформированное состояние дилатирующих разносопротивляющихся сред. Установлено, что при воздействии касательных напряжений на бесконечности в вершине трещины помимо смещений типа III имеет место смещение берегов трещины, соответствующее деформированию типа I. Следовательно, для реализации разрушения типа III необходимо подобрать сдвиговые и нормальные напряжения, так чтобы выполнялись граничные условия на бесконечности, или выбрать соответствующие граничные условия на берегах трещины. Аналогично при задании касательных напряжений на бесконечности, соответствующих деформациям типа II в линейной теории упругости, помимо смещений типа II имеют место смещения типа I.

В случае трещины нормального отрыва (деформация типа I) длиной $2l$ при граничном условии $\sigma_{22} = \sigma$ на бесконечности для линейной функции разномодульности $\omega(u) = 1 + \delta u$ получено точное значение коэффициента интенсивности напряжений K_{I} [5]:

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi l}\,.$$

Для трещины длиной $2l$ при граничном условии $\sigma_{12} = \tau_0$ на бесконечности [7–10] в первом приближении найдены коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} = 2{,}5\,\delta\tau_0\sqrt{\pi l}\,, \qquad K_{\mathrm{II}}^{(0)} = \tau_0\sqrt{\pi l}\,,$$

для трещины длиной $2l$ при граничном условии $\sigma_{23} = \tau_0$ на бесконечности [6] — коэффициенты

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} = \frac{17{,}71\alpha - 11{,}2\alpha_1}{4\alpha_1 + \alpha}\,\chi\tau_0\sqrt{\pi l}\,, \qquad K_{\mathrm{III}}^{(0)} = \tau_0\sqrt{\pi l}$$

($\chi = 0{,}1$ — параметр разносопротивляемости, определяемый отношением шаровой части тензора деформаций к интенсивности деформаций).

Таким образом, при рассмотрении задач механики разрушения в дилатирующих разносопротивляющихся средах необходимо учитывать дополнительные смещения при задаваемых в напряжениях граничных условиях для задач о трещинах или определять напряженные состояния, при которых реализуются основные виды разрушений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Салганик Р. М.** Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 4. С. 149–158.
3. **Березин А. В., Строков В. И., Барабанов В.Н.** Деформационные свойства и разрушение изотропных графитовых материалов // Конструкционные материалы на основе графита. М.: Металлургия, 1976. С. 103–110.
4. **Березин А. В., Ломакин Е. В., Строков В. И., Барабанов В. Н.** Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Пробл. прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
5. **Березин А. В.** Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990.
6. **Березин А. В.** Механика разрушения дилатирующих разномодульных сред // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1997. № 1. С. 59–70.

7. **Березин А. В., Пономарев П. Л.** Трещины поперечного и продольного сдвига в разномодульных дилатирующих средах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 127–135.
8. **Березин А. В., Евсеев Н. В.** Наклонная трещина в разносопротивляющихся материалах // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2010. № 4. С. 58–61.
9. **Березин А. В.** Трещины в разносопротивляющихся дилатирующих материалах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 304–307.
10. **Березин А. В., Клемяшов А. Г.** Определение траектории распространения трещины в дефектном материале // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2012. № 4. С. 56–59.

Поступила в редакцию 13/VI 2013 г.,
в окончательном варианте — 18/VII 2013 г.