

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ В СТРУЕ ПРОВОДЯЩЕЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Вулис, К. Е. Джаугаитин

(Ленинград)

В рамках теории магнитного пограничного слоя второго рода при числе Рейнольдса $R_m \gg 1$ показано влияние струйного течения на электрический разряд.

1. В работе [1] В. Н. Жигулевым показано, что взаимодействие магнитного поля, созданного разрядным током, с движущейся проводящей средой локализуется при значениях магнитного числа Рейнольдса $R_m \gg 1$ в узкой области своеобразного магнитного пограничного слоя. Если вектор \mathbf{H} ортогонален к плоскости вектора скорости \mathbf{V} (магнитный пограничный слой второго рода [1]), то, как показано в другой работе того же автора [2], электрический разряд в однородном потоке идеальной жидкости стягивается к оси и принимает вид «электрической струи». Там же указано, что этот эффект может быть использован для получения высокой температуры, и приведено решение соответствующей тепловой задачи.

В работах [3, 4] были рассмотрены некоторые частные задачи о движении вязкой проводящей жидкости (струи и однородного потока) вдоль тела, у поверхности которого происходит электрический разряд.

Наряду с указанным в работе [2] аспектом (получение высокой температуры) задачи о разряде в потоке проводящей среды представляют известный интерес как иллюстрация влияния гидродинамики потока на форму и характер электрического разряда.

В этой связи ниже рассмотрены некоторые простейшие задачи о форме разряда в свободных ламинарных струях, допускающие решения в рамках теории магнитного пограничного слоя второго рода.

Полагая для простоты $\rho = \text{const}$, а также не учитывая температурной зависимости проводимости, можно воспользоваться для профиля скорости решением соответствующей автомодельной задачи.

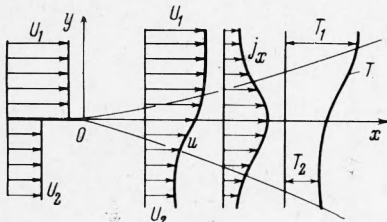
В этом случае влияние магнитного поля на движение ограничивается созданием градиента статического давления, причем полное давление (т. е. сумма $P^+ = p + p_m = p + \frac{1}{2}\mu H^2$) остается постоянным.

При сделанных ограничениях речь может идти о двух эффектах — перестройке линий электрического тока под влиянием движения среды и температурного поля — под влиянием джоулевой диссипации.

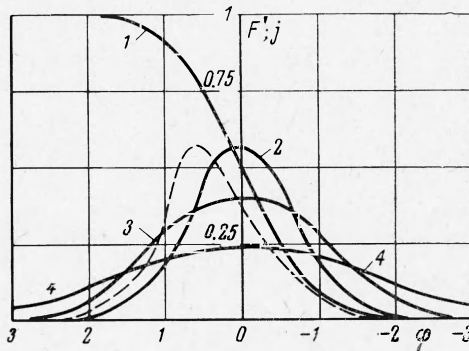
Исходные уравнения для плоского стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости представим в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P^+}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= \nu_m \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}, \quad j_x = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad j_y = \frac{\partial H}{\partial x} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu_m}{\rho C_p} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

2. В качестве первого примера рассмотрим задачу о разряде, протекающем в пограничном слое на краю плоской струи. Пусть (см. схему на фиг. 1) вдоль плоской пластины стекает в неподвижную или движущуюся спутно среду однородный поток вязкой несжимаемой жидкости. Начиная от кромки пластины, в потоке создается пограничный слой с характерным профилем скорости $u(y)$, показанным на фиг. 1. Примем, что между краем пластины и весьма удаленной от него областью поддерживается постоянная разность потенциалов. При отсутствии движения электрический разряд был бы близок к цилиндрическому (край пластины ось O_z — ось симметрии).



Фиг. 1



Фиг. 2

При наличии струйного движения профиль скорости выражается известной формулой [5]

$$\frac{u}{u_1} = F'(\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{u_1} - 1 \right) (1 - \operatorname{erf} \varphi), \quad \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{\nu x} \right)^{1/2} y \quad (2.1)$$

При граничных условиях для магнитного поля и температуры

$$\begin{aligned} H &= H_\infty, \quad T = T_1 && \text{при } y = +\infty; \\ H &= -H_\infty, \quad T = T_2 && \text{при } y = -\infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

автомодельные решения

$$\frac{H + H_\infty}{2H_\infty} = h(\varphi), \quad \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \Theta(\varphi) \quad (2.3)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$h'' + 2P_m F h' = 0, \quad \Theta'' + 2PF\Theta' = S \frac{P}{P_m} (h')^2 \quad \left(S = \frac{4H_\infty^2}{\rho C_p (T_1 - T_2)} \right) \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} h &= \Theta = 1 && \text{при } \varphi = +\infty \\ h &= \Theta = 0 && \text{при } \varphi = -\infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

для случая постоянной проводимости могут быть записаны в виде

$$h(\varphi) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (F(\varphi))^{P_m} d\varphi \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} (F''(\varphi))^{P_m} d\varphi \right] \quad (2.6)$$

$$\Theta(\varphi) = \Theta_0 + S(1 - \Theta_0)\Theta_1, \quad \Theta_0(\varphi) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (F''(\varphi))^P d\varphi \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} (F''(\varphi))^P d\varphi \right]$$

$$\Theta_1(\varphi) = \frac{P}{P_m} \int_{-\infty}^{\varphi} (F''(\varphi))^P \left[\int_0^{\varphi} (h'(\varphi))^2 (F''(\varphi))^{-P} d\varphi \right] d\varphi$$

Здесь P и P_m — гидродинамическое число и магнитогиродинамическое число Прандтля.

Для иллюстрации на фиг. 2 показаны результаты расчета простого примера, где кривая 1 дает F'/P ; кривые 2, 3, 4 соответствуют значениям $P_m = 1, 0.5, 0.25$; кривая 5 — $P = 1$ при $\sigma \sim T$. Как видно, профиль тока, как и в [2], имеет симметрично струйную форму, тогда как профиль температуры асимметричен.

Если учесть зависимость проводимости от температуры, то для несжимаемой жидкости задача сводится к интегральному уравнению

$$\Theta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\varphi} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \left[SP \int_{-\infty}^{\varphi} \sigma(T) (h'(\varphi))^2 \Phi(\varphi) + C \right] d\varphi$$

$$\Phi(\varphi) = \exp 2P\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} F\Theta' d\varphi \quad (2.7)$$

Здесь постоянная C определяется выражением

$$C = 1 - \left[SP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \left(\int_{-\infty}^{\varphi} \sigma(T) (h'(\varphi))^2 \Phi(\varphi) d\varphi \right) d\varphi \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{\Phi(\varphi)} \right]^{-1}$$

$$h(\varphi) = \left[\int_{-\infty}^{\varphi} \sigma(T) \exp \left(-2P \int_0^{\varphi} F\sigma d\varphi \right) d\varphi \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} \sigma(T) \exp \left(-2P \int_0^{\varphi} F\sigma d\varphi \right) d\varphi \right]$$

Решение (численное) при конкретной зависимости $\sigma(T)$ приводит к еще большему сужению таковой области. Здесь действует своеобразный лавинный механизм — в области прохождения тока растет температура, вместе с ней — и проводимость, что, в свою очередь, приводит к росту тока и т. д. Некоторое представление об этом дает пунктирная кривая на фиг. 2 (при линейной зависимости $\sigma(T)$).

3. Аналогичным образом решается задача о плоской струе-источнике (фиг. 3). Решения уравнений этой задачи должны подчиняться граничным условиям:

$$(3.1)$$

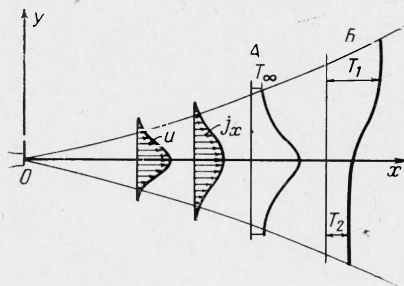
$$\begin{aligned} &\text{при } y = 0 \\ &du/dy = 0, \quad v = 0, \quad H = 0 \\ &\text{при } y = \pm \infty \\ &u = 0, \quad H = \pm H_{\infty} \end{aligned}$$

Распределение скорости в струе в этом случае имеет вид

$$\frac{u}{u_m} = F'(\varphi) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}$$

$$u_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3I_x^2}{4\rho^2 v_x} \right)^{1/3}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{I_x}{6\rho v^2 x^2} \right)^{1/3} y$$

$$I_x = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 = \text{const} \quad (3.2)$$



Фиг. 3

Для магнитного поля, вводя условие нетривиальности решения

$$\int_0^{\infty} uHdy = K \neq 0 \quad (3.3)$$

приходим к дифференциальному уравнению относительно

$$h'' + 2P_m F h' = 0 \quad (h(+\infty) = 1, h(-\infty) = -1) \quad (3.4)$$

Решение имеет вид

$$h(\varphi) = 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} (F'(\varphi))^P m d\varphi \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} (F'(\varphi))^P m d\varphi \right] - 1 \quad (3.5)$$

Что касается уравнения энергии, то решение его приведем для двух вариантов граничных условий для температуры: симметричных (А) и асимметричных (В) относительно скорости.

Случай А

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right) \quad \text{при } y = 0 \\ T = T_{\infty} \quad (u = 0) \quad \text{при } y = \pm \infty \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнение энергии запишем в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} = v \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + v \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_m \left(\frac{1}{P_m} - 1 \right) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ \left(\Pi = i - i_{\infty} + \frac{u^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} (H^2 - H_{\infty}^2) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

При значениях чисел Прандтля $P = P_m = 1$ уравнение (3.7) допускает простой интеграл, аналогичный интегралу Крокко в обычной газодинамике

$$\Pi = C_1 u + C_2 \quad (3.8)$$

С учетом граничных условий следует

$$\begin{aligned} i = i_{\infty} + \frac{A}{I_0} 0.454 \left(\frac{I_0^2}{\rho^2 v x} \right)^{1/3} \text{ch}^{-2} \varphi - 0.103 \left(\frac{I_0^2}{\rho^2 v x} \right)^{2/3} \text{ch}^{-4}(\varphi) - \frac{\mu H_{\infty}^2}{2\rho} [(h(\varphi))^{-2} - 1] \\ A = \int_{-\infty}^{\infty} u \Pi dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

Профили скорости, тока и температуры будут симметричными с максимумами на оси струи.

Случай В

$$T = T_1 \quad \text{при } y = +\infty, \quad T = T_2 \quad \text{при } y = -\infty \quad (3.10)$$

Полагая

$$\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \Theta(\varphi) \quad (3.11)$$

получим уравнение

$$\Theta'' + 2PF\Theta' + \frac{P}{P_m} S (h')^2 = 0 \quad (\Theta(+\infty) = 1, \Theta(-\infty) = -1) \quad (3.12)$$

Решение записывается в виде

$$\Theta(\varphi) = \Theta_0(\varphi) + S (\Theta_0 \Theta_1(\infty) - \Theta_1(\varphi)) \quad (3.13)$$

$$\Theta_0(\varphi) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (F'(\varphi))^P dy \right]^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} (F'(\varphi))^P d\varphi \right]$$

$$\Theta_1(\varphi) = \frac{P}{P_m} \int_{-\infty}^{\infty} (F'(\varphi))^P \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (F'(\varphi))^{-P} (h'(\varphi))^2 d\varphi \right\} d\varphi$$

В этом случае профиль тока, как и скорости, будет симметричным, а профиль температуры будет напоминать соответствующий профиль для края струи. Результаты расчетов при $P = P_m = 1$ приведены на фиг. 4, где кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям $S = 0, 1, 2, 3, 4$.

4. Определим также распределение магнитного поля и тока для случая осесимметричной струи источника — с профилем скорости, отвечающим выражению

$$\frac{u}{u_m} = \frac{F'(\varphi)}{\varphi} = \frac{1}{(1 + 1/8\varphi^2)^2} \quad (4.1)$$

$$u_m = \frac{3I_x}{8\pi r \nu x}, \quad \varphi = \left(\frac{3I_x}{8\pi r \nu^2 x^2} \right)^{1/2} y$$

$$I_x = 2\pi \int_0^{\infty} y u^2 dy = \text{const}$$

Исходное уравнение

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = \nu_m \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

с граничным условием (4.3)

$$H = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad H = H_{\infty} \quad \text{при } y = \infty$$

допускают автомодельное решение уравнения

$$(\varphi h')' + P_m (Fh)' = 0 \quad (4.4)$$

в виде

$$h(\varphi) = \left(\frac{F'}{\varphi} \right)^{P_m} = \frac{1}{(1 + 1/8\varphi^2)^{2P_m}} \quad (4.5)$$

Уравнение энергии в этой задаче даже в случае $P = 1$ не интегрируется в квадратурах.

Заметим, что аналогичные решения можно было бы построить для турбулентных струйных течений, исходя из обычных полуэмпирических схем. С качественной стороны результаты остались бы теми же; с количественной — более широкая турбулентная струя привела бы к более интенсивному сжатию токового слоя. Однако допустимость распространения на движение проводящей среды в области больших значений магнитного числа Рейнольдса R_m обычных методов расчета (например теория пути смещения и др.) требует специальной проверки.

Поступила 28 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.
2. Жигулев В. Н. Теория электрического разряда в движущейся среде. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 6.
3. Джагаштин К. Е. Некоторые задачи теории пограничного слоя проводящей жидкости. Ж. техн. физ., 1963, т. 23, № 7.
4. Джагаштин К. Е. Распространение ламинарной закрученной струи проводящей жидкости вдоль поверхности конуса. Вопросы магнитной гидродинамики, Рига, 1963.
5. Улис Л. А. и Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. Изд-во «Наука», 1965.