

УДК 533.6.11–535.23

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С МИНИМАЛЬНЫМ ПОЛНЫМ РАДИАЦИОННЫМ ПОТОКОМ К ПОВЕРХНОСТИ

М. А. Аргучинцева, Н. Н. Пилюгин\*

Иркутский государственный университет, 664003 Иркутск

\* Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета, 117192 Москва

Построено решение вариационной задачи о тонком теле с минимальным суммарным радиационным тепловым потоком при движении в газе с постоянной скоростью. Установлено, что существует три вида поперечного контура оптимального тела: окружность, звездообразный контур и контур, состоящий из дуг окружностей и отрезков прямых. Параметр излучения влияет только на форму продольного контура и не влияет на оптимальную форму поперечного контура. Показано, что использование оптимальных пространственных тел позволяет существенно (более чем на 50 %) уменьшить радиационный тепловой поток к поверхности тела по сравнению с телами вращения с аналогичными геометрическими характеристиками.

**Введение.** Вход космических аппаратов в атмосферу Земли с гиперзвуковыми скоростями сопровождается интенсивным конвективным и радиационным нагревом, что может вызывать интенсивное термохимическое разрушение обтекаемой поверхности [1]. При больших числах Маха ( $M > 25 \div 30$ ) и Рейнольдса тепло к поверхности тела передается в основном за счет излучения. Одним из способов уменьшения тепловых потоков к телу является выбор оптимальных формы спускаемого аппарата и траектории его полета [2–4]. В большинстве работ, посвященных исследованию оптимальных по тепловому потоку тел, рассматривались задачи об оптимальных продольных контурах осесимметричных и плоских тел [2]. В [4] методом локальных вариаций впервые найдены оптимальные формы трехмерных тел с заданным эллиптическим донным сечением с минимальным суммарным (конвективным и радиационным) нагревом поверхности вдоль траектории движения. Показано, что по сравнению с осесимметричной конфигурацией суммарный тепловой поток к поверхности трехмерного тела при одинаковых условиях входа на 30 % меньше.

Однако вопросы, связанные с оптимизацией пространственных конфигураций по теплообмену, еще мало изучены [3]. Поэтому представляет интерес исследование задач нахождения оптимальных форм поперечных контуров трехмерных тел с точки зрения минимизации радиационного теплового потока.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим гиперзвуковое движение трехмерного тела в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  с началом в вершине тела и осью  $z$ , направленной противоположно поступательному движению потока газа;  $\theta$  — угол, образованный радиусом  $r$  и плоскостью  $(x, z)$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ .

Ограничимся исследованием класса поверхностей, обладающих свойством гомотетии. В этом случае каждое поперечное сечение тела, перпендикулярное оси  $z$ , должно быть

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96030, 01-01-00050) и в рамках Федеральной целевой программы “Интеграция” (код проекта И (А105-4)).

геометрически подобно донному сечению тела. Поверхности таких тел описываются уравнением

$$f(r, \theta, z) = r - \varphi(z)R(\theta) = 0,$$

где функции  $\varphi(z)$ ,  $R(\theta)$  определяют продольный и поперечный контуры тела соответственно.

Будем предполагать, что тепловой поток на поверхности тела зависит от местного угла наклона поверхности  $\theta_w$ , т. е. от угла между внешней нормалью к элементу поверхности и вектором скорости набегающего потока газа. Такого рода зависимости получены разными методами при гиперзвуковом обтекании осесимметричных [5, 6] и плоских [7] тел. Для радиационного потока к пространственному телу в предельном случае сильно излучающего газа найдено соотношение  $q_R \sim \cos^3 \theta_w$  [8]. Более общие степенные зависимости от  $\cos \theta_w$  для радиационных тепловых потоков к пространственным телам рассмотрены в [1, 9] и получили подтверждение при численном решении задач гиперзвукового обтекания некоторых пространственных тел [10, 11]. В [9] доказано, что если трехмерное тело мало отличается от осесимметричного и площади поперечных сечений этих тел равны, то в соответствии с “правилом площадей” в ряде случаев можно проводить пересчет тепловых потоков к пространственным телам по соответствующим значениям радиационных потоков к осесимметричным телам [1].

Таким образом, можно предположить, что зависимость радиационного теплового потока от локального угла наклона поверхности тела справедлива и для пространственных тел. Как отмечено выше, это подтверждается в ряде предельных случаев [1, 8, 9]. Кроме того, в настоящее время в литературе отсутствуют другие аппроксимации распределения радиационных потоков к пространственным телам. В данной работе распределение локального радиационного теплового потока  $q_R$  по поверхности трехмерного тела в первом приближении принималось в виде [1]

$$q_R = q_{R0}(-\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_z \rangle)^m, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_z \rangle = -\dot{\varphi}(z)R(\theta)/[1 + (\dot{R}(\theta)/R(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(z)R(\theta))^2]^{1/2},$$

где  $q_{R0}$  — коэффициент радиационного теплообмена в критической точке тела;  $m$  — параметр излучения, определяемый излучающими способностями среды и скоростью движения газа ( $m \in [3; 10]$ ) [10, 11];  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности;  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  — единичные векторы цилиндрической системы координат.

Отметим, что подобные зависимости (с соответствующими значениями степени  $m$ ) имеют место и в ряде других случаев теплообмена при гиперзвуковом обтекании пространственных тел: для конвективных тепловых потоков [12–14], при обтекании тел разреженным газом [15, 16], а также при воздействии интенсивного лазерного излучения на обтекаемое тело [17]. Поэтому результаты настоящего исследования могут быть использованы (в качестве первого приближения) и для других случаев пространственного теплообмена.

Интегрируя локальный радиационный тепловой поток  $q_R$  вдоль боковой поверхности тела  $S$ , получим формулу для коэффициента радиационного теплового потока

$$C_R = \frac{1}{L^2} \iint_S \frac{q_R}{q_{R0}} ds, \quad ds = \frac{r}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_r \rangle} d\theta dz, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_r \rangle = \frac{1}{[1 + (\dot{R}(\theta)/R(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(z)R(\theta))^2]^{1/2}},$$

где  $L$  — заданная длина тела вдоль оси  $z$ . В безразмерных переменных ( $\zeta = z/L$ ,  $\rho(\theta) = R(\theta)/L$ ) формула для коэффициента радиационного теплового обмена примет вид

$$C_R = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)\dot{\varphi}^m(\zeta)\rho^{m+1}(\theta) d\theta d\zeta}{[1 + (\dot{\rho}(\theta)/\rho(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(\zeta)\rho(\theta))^2]^{(m-1)/2}}.$$

В классе тонких тел  $((\dot{\varphi}(\zeta)\rho(\theta))^2 \ll 1)$  выражение для  $C_R$  можно представить в виде произведения функционалов  $J_1(\varphi)$  и  $J_2(\rho)$ , зависящих от формы продольного  $\varphi(\zeta)$  или поперечного  $\rho(\theta)$  контуров тела соответственно:

$$C_R = J_1(\varphi)J_2(\rho), \quad J_1(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\zeta)\dot{\varphi}^m(\zeta) d\zeta, \quad J_2(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{2m}(\theta) d\theta}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-1)/2}}. \quad (1.1)$$

Таким образом, исходную задачу нахождения формы трехмерного тела, минимизирующей радиационный нагрев поверхности, можно разделить на две задачи: об оптимальном продольном и оптимальном поперечном контурах тела.

В качестве ограничений, накладываемых на форму тела, рассматриваются следующие изопериметрические условия:

— на заданный объем тела  $V$

$$\int_0^1 \varphi^2(\zeta) d\zeta \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{2V}{L^3}; \quad (1.2)$$

— на площадь  $S$  смачиваемой поверхности тела

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi(\zeta)\rho(\theta)[1 + (\dot{\rho}(\theta)/\rho(\theta))^2 + (\dot{\varphi}(\zeta)\rho(\theta))^2]^{1/2} d\theta d\zeta = \frac{S}{L^2},$$

в классе тонких тел это ограничение примет вид

$$\int_0^1 \varphi(\zeta) d\zeta \int_0^{2\pi} [\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{1/2} d\theta = \frac{S}{L^2}; \quad (1.3)$$

— на площадь донного сечения тела  $S_b$

$$\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{2S_b}{L^2}; \quad (1.4)$$

— на периметр донного сечения тела  $P$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)} d\theta = \frac{P}{L}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим также дополнительное ограничение на предельное значение волнового сопротивления тела. Функционал волнового сопротивления  $D$  имеет вид [18]

$$\frac{D}{q} = \iint_S (-\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_z \rangle)^3 ds, \quad ds = \frac{r}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_r \rangle} d\theta dz,$$

где  $q$  — скоростной напор. Тогда в классе тонких тел ограничение на сопротивление тела приводит к неравенству

$$\int_0^1 \varphi(\zeta)\dot{\varphi}^3(\zeta) d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} \leq \frac{D_*}{qL^2}, \quad (1.6)$$

где  $D_*$  — заданное предельное значение волнового сопротивления.

**2. Оптимальный продольный контур.** Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: среди гладких функций  $\varphi(\zeta)$ , описывающих продольный контур тела и удовлетворяющих граничным условиям  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ , найти функцию, минимизирующую интеграл теплового потока  $J_1(\varphi)$  (1.1).

Следует отметить, что решению задач нахождения оптимальных продольных контуров тел с точки зрения минимизации радиационного нагрева поверхности посвящено достаточно большое количество работ (см. обзор в [2]). Поэтому остановимся лишь на основных моментах решения поставленной оптимизационной задачи.

Функция  $\varphi(\zeta)$ , минимизирующая функционал  $J_1(\varphi)$ , должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$(1 - m)\varphi(\zeta)\dot{\varphi}^m(\zeta) = C, \quad C = \text{const},$$

которое с учетом граничных условий имеет решение

$$\varphi(\zeta) = \zeta^{m/(m+1)}. \quad (2.1)$$

Полученная кривая удовлетворяет условию Лежандра. Значение функционала на экстремали определяется по формуле  $J_1^{\min}(\varphi) = [m/(m+1)]^m$ .

С учетом (2.1) получим следующие изопериметрические условия на объем тела  $V$  (1.2) и площадь смачиваемой поверхности  $S$  (1.3), а также ограничение на волновое сопротивление тела (1.6):

$$\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = V_*, \quad V_* = \frac{V}{L^3} \frac{2(3m+1)}{m+1} = \text{const}; \quad (2.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)} d\theta = S_*, \quad S_* = \frac{S}{L^2} \frac{2m+1}{m+1} = \text{const}; \quad (2.3)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} \leq C_{D*}, \quad C_{D*} = \frac{D_*}{qL^2} \frac{(m+1)^2(m-1)}{m^3} = \text{const}. \quad (2.4)$$

**3. Оптимальный поперечный контур.** Задачу об оптимальном поперечном контуре тела сформулируем следующим образом. Среди кусочно-гладких функций  $\rho(\theta)$ , удовлетворяющих условию замкнутости контура  $\rho(0) = \rho(2\pi)$ , изопериметрическим условиям на объем  $V_*$  (2.2) и площадь смачиваемой поверхности тела  $S_*$  (2.3), а также ограничению на предельно допустимое значение волнового сопротивления  $C_{D*}$  (2.4), найти функцию, минимизирующую интеграл радиационного теплового потока  $J_2(\rho)$  (1.1).

Для исследования поставленной задачи применим подход, предложенный в [18]. Выпишем функционал Лагранжа

$$J(\rho) = \int_0^{2\pi} F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho, \dot{\rho}) d\theta, \quad (3.1)$$

где  $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho, \dot{\rho}) = \rho^{2m}(\theta)/[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-1)/2} + \lambda_1\rho^2(\theta) + \lambda_2\sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)} + \lambda_3\rho^6(\theta)/(\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta))$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — неопределенные постоянные множители Лагранжа.

Следует отметить, что структура целевого функционала (3.1) не изменится, если вместо изопериметрических условий на  $V_*$  (2.2) и  $S_*$  (2.3) рассмотреть изопериметрические условия на площадь донного сечения тела  $S_b$  (1.4) и его периметр  $P$  (1.5) соответственно. Из выражений (1.4), (1.5), (2.2), (2.3) следует, что для тонких тел с оптимальным

продольным контуром (2.1) имеют место следующие связи между геометрическими характеристиками:

$$S_* = P/L, \quad S_b = V_* L^2/2. \quad (3.2)$$

Функция, являющаяся решением исходной вариационной задачи, должна удовлетворять:

— уравнению Эйлера для функционала Лагранжа (3.1)

$$F - \dot{\rho} F_{\dot{\rho}} = \frac{\rho^{2m}(\theta)[\rho^2(\theta) + m\dot{\rho}^2(\theta)]}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m+1)/2}} + \lambda_1 \rho^2(\theta) + \frac{\lambda_2 \rho^2(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)}} + \\ + \lambda_3 \frac{\rho^6(\theta)[\rho^2(\theta) + 3\dot{\rho}^2(\theta)]}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^2} = C = \text{const}; \quad (3.3)$$

— условию трансверсальности, согласующемуся с условиями на концах:

$$F_{\dot{\rho}}|_0 = F_{\dot{\rho}}|_{2\pi} = 0, \quad (3.4)$$

$$F_{\dot{\rho}} = \dot{\rho}(\theta) \left( \frac{(1-m)\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m+1)/2}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)}} - \lambda_3 \frac{2\rho^6(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^2} \right);$$

— необходимому условию Лежандра

$$F_{\dot{\rho}\dot{\rho}} = \frac{(m-1)\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m+3)/2}} \left( m\dot{\rho}^2(\theta) - \rho^2(\theta) + \frac{\lambda_2}{m-1} \frac{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{m/2}}{\rho^{2m-2}(\theta)} + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda_3}{m-1} \frac{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-3)/2}}{\rho^{2(m-3)}(\theta)} (3\dot{\rho}^2(\theta) - \rho^2(\theta)) \right) \geq 0; \quad (3.5)$$

— условию дополняющей нежесткости

$$\lambda_3 \left( \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} - C_{D_*} \right) = 0; \quad (3.6)$$

— условию Вейерштрасса — Эрдмана в угловых точках, которые могут быть двух типов: положение одних произвольно, а другие лежат на окружностях  $\rho = \rho_0$ ,  $\rho = \rho_f$  ( $\rho_0$ ,  $\rho_f$  — концевые радиусы поперечного контура). В первом случае приходим к соотношениям

$$\Delta[F - \dot{\rho} F_{\dot{\rho}}] = 0, \quad \Delta[F_{\dot{\rho}}] = 0, \quad (3.7)$$

где  $\Delta[\cdot]$  — разность значений, вычисленных справа (знак “+”) и слева (знак “−”) от угловой точки  $\theta_c$ . Условия (3.7) выполняются при  $\dot{\rho}_+(\theta_c) = \pm\infty$ ,  $\dot{\rho}_-(\theta_c) = \mp\infty$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Во втором случае остается только первое условие (3.7), которое сводится к соотношению  $\dot{\rho}_+(\theta_c) + \dot{\rho}_-(\theta_c) = 0$ . Кроме того, из условий (3.7) следует, что значение константы  $C$  остается одним и тем же на всех дугах экстремали.

Следовательно, любые две соседние дуги, образующие цикл экстремали, симметричны относительно луча, проходящего через угловую точку. Тогда оптимальный поперечный контур может состоять из целого числа  $n$  симметричных циклов, каждый из которых занимает угол  $2\pi/n$ . При этом выполняется условие замкнутости поперечного контура. При анализе формы экстремали, состоящей из симметричных циклов, достаточно исследовать дугу, образующую половину цикла.

С учетом сказанного выше функционал задачи и ограничения на форму тела примут вид

$$J_2(\rho, n) = 2n \int_0^{\pi/n} \frac{\rho^{2m}(\theta) d\theta}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-1)/2}} \rightarrow \min; \quad (3.8)$$

$$2n \int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta) d\theta = V_*; \quad (3.9)$$

$$2n \int_0^{\pi/n} \sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)} d\theta = S_*; \quad (3.10)$$

$$2n \int_0^{\pi/n} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} \leq C_{D*}. \quad (3.11)$$

Радиусы в концевых точках  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_f = \pi/n$  считаются свободными. Функционал Лагранжа для задачи (3.8)–(3.11) имеет вид

$$J(\rho, n) = 2n \int_0^{\pi/n} F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho, \dot{\rho}) d\theta,$$

где подынтегральная функция  $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho, \dot{\rho})$  определяется по формуле (3.1).

Рассмотрим необходимые условия экстремума функционала  $J(\rho, n)$ . На дуге экстремали должен удовлетворяться первый интеграл уравнения Эйлера (3.3), который исследуется совместно с условиями трансверсальности (3.4) в концевых точках  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_f = \pi/n$  и условием дополняющей нежесткости (3.6).

Оптимизирующее условие на число дуг экстремали сводится к равенству нулю производной интеграла  $J(\rho, n)$  относительно параметра  $n$  [18] (в предположении вещественности  $n$ ):

$$\int_0^{\pi/n} F d\theta - \frac{\pi}{n} [F]_{\pi/n} = 0. \quad (3.12)$$

Затем из решений уравнения (3.12) выбираются только целые значения параметра  $n$ , имеющие физический смысл. В общем случае использование такого подхода может приводить к потере возможных решений либо к отсутствию целых решений уравнения (3.12). Однако, как показано ниже, целевой функционал  $J(\rho, n)$  не зависит от параметра  $n$  явным образом. Следовательно,  $dJ/dn = 0$  для любого (в том числе целого) значения  $n$ . Отметим, что использование вспомогательного условия (3.12) позволяет получить аналитические решения исходной вариационной задачи, удовлетворяющие как необходимым условиям экстремума функционала (3.3)–(3.7), так и ограничению (3.12).

Учитывая (3.4) и вводя обозначение  $\Phi = \dot{\rho}F_{\dot{\rho}}$ , проинтегрируем уравнение Эйлера (3.3) на отрезке  $[0, \pi/n]$ :

$$\int_0^{\pi/n} F d\theta - \int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = \int_0^{\pi/n} C d\theta \equiv \frac{\pi}{n} [F]_{\pi/n}. \quad (3.13)$$

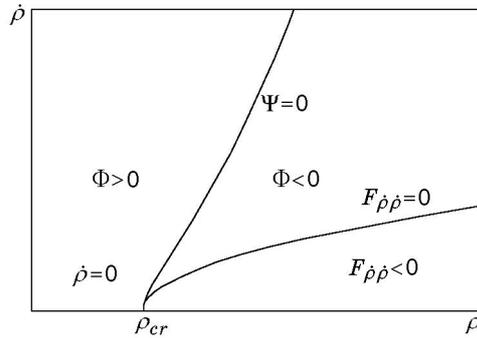


Рис. 1. Поведение функции  $\Phi$  на плоскости  $(\rho, \dot{\rho})$

Из выражений (3.12), (3.13) и условия трансверсальности (3.4) следует, что оптимальный поперечный контур должен удовлетворять условиям

$$\int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = 0, \quad \Phi|_0 = \Phi|_{\pi/n} = 0. \tag{3.14}$$

Необходимо рассмотреть следующие случаи:

- а) функция  $\Phi$  тождественно равна нулю во всех точках отрезка  $[0, \pi/n]$ ;
- б) функция  $\Phi$  меняет знак на отрезке  $[0, \pi/n]$  и, следовательно, равна нулю не только на концах  $\theta_0 = 0, \theta_f = \pi/n$ , но и в промежуточных точках.

В случае “а” имеем соотношения

$$\dot{\rho}(\theta) = 0; \tag{3.15}$$

$$\frac{(1 - m)\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m+1)/2}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)}} - \frac{2\lambda_3\rho^6(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^2} = 0. \tag{3.16}$$

Если на экстремали ограничение на волновое сопротивление (3.11) выполняется как строгое неравенство, то из условия дополняющей нежесткости (3.6) следует, что  $\lambda_3 = 0$  ( $i = 1$ ). Если  $\lambda_3 \neq 0$  и  $\lambda_2 = 0$  ( $i = 2$ ), то исследуется задача без ограничения на площадь смачиваемой поверхности тела, для которой условие на волновое сопротивление (3.11) выполняется как строгое равенство. Для рассматриваемых случаев уравнение (3.16) сводится к виду

$$\Psi = \dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta) - a_i^2\rho^4(\theta) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.17}$$

$$a_1 = [(m - 1)/\lambda_2]^{1/m}, \quad a_2 = [(1 - m)/(2\lambda_3)]^{1/(m-3)}.$$

Исследовав функцию  $\Phi$  на плоскости  $(\rho, \dot{\rho})$  (рис. 1), можно сделать следующие выводы. Зависимость (3.15) удовлетворяет условию Лежандра (3.5) при  $\rho \leq \rho_{cr}$  ( $\rho_{cr} = 1/a_i, i = 1, 2$ ), зависимость (3.17) — при  $\rho \geq \rho_{cr}$ . При этом функция  $\Phi$  положительна левее линии  $\Psi = 0$  и отрицательна правее нее. Если допустить, что конечные точки экстремали ( $\theta_0 = 0, \theta_f = \pi/n$ ) располагаются на линии  $\Phi = 0$  произвольным образом, то необходимо исследовать три класса тел.

**4. Поперечный контур тел класса I.** Пусть конечные точки экстремали лежат на линии (3.15) ( $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}(\pi/n) = 0$ ). Поскольку решение дифференциального уравнения (3.15) имеет вид

$$\rho(\theta) = C_1, \tag{4.1}$$

оптимальным телом класса I будет тело вращения. Константа  $C_1$  определяется из заданных изопериметрических условий:  $C_1 = \sqrt{V_*/(2\pi)}$  в случае заданного объема тела (3.9);

$C_1 = S_*/(2\pi)$  в случае заданной площади боковой поверхности тела (3.10). Для того чтобы изопериметрические условия (3.9), (3.10) выполнялись одновременно, между входными параметрами задачи должна существовать связь  $V_* = S_*^2/(2\pi)$ .

Интеграл радиационного теплового потока для поперечного контура (4.1) равен  $J_2^{\min} = 2\pi C_1^{m+1}$ .

**5. Поперечный контур тел класса II.** Рассмотрим класс тел, для которых обе концевые точки лежат на кривой  $\Psi = 0$  ( $\Psi|_0 = 0$ ,  $\Psi|_{\pi/n} = 0$ ). В этом случае поперечный контур тела удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.17), решение которого имеет вид

$$\rho(\theta) = 1/(a_i \cos(\theta + C_2)), \quad C_2 = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

Выражение (5.1) представляет собой уравнение прямой, являющейся стороной звездообразного поперечного контура тела. Установим связь неизвестных параметров  $a_i$ ,  $C_2$  с заданными геометрическими характеристиками тела.

1. Исследуем случай  $i = 1$ , когда известны объем  $V_*$  ( $\lambda_1 \neq 0$ ) и площадь смачиваемой поверхности тела  $S_*$  ( $\lambda_2 \neq 0$ ), а условие на предельное значение волнового сопротивления тела (3.11) выполняется как строгое неравенство ( $\lambda_3 = 0$ ). Из изопериметрических условий (3.9), (3.10) получим

$$a_1 = S_*/V_*, \quad S_*^2/V_* = 2n(\text{tg}(\pi/n + C_2) - \text{tg} C_2). \quad (5.2)$$

Оптимизирующее условие (3.12) на число  $n$  дуг экстремали сводится к следующему:

$$\left[ m \left( \frac{\lambda_2}{m-1} \right)^{(m-1)/m} + \lambda_1 \right] \left\{ \int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta) d\theta - \frac{\pi}{n} \rho^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\} = 0.$$

Выражение в фигурных скобках не может обращаться в нуль, так как при этом функция  $\rho(\theta)$  не удовлетворяет уравнению Эйлера (3.3). Следовательно, имеем связь между множителями Лагранжа

$$\lambda_1 = -m(\lambda_2/(m-1))^{(m-1)/m}, \quad \lambda_2 = (m-1)(V_*/S_*)^m. \quad (5.3)$$

Тогда условие (3.12) выполняется для любого числа циклов  $n$ , и интеграл для радиационного теплового потока (3.8) не зависит от  $n$ :

$$J_2^{\min} = S_*^{1-m} V_*^m. \quad (5.4)$$

Следовательно, для оптимальных звездообразных тел с различным числом лучей, но одинаковыми значениями параметров  $m$ ,  $S_*$ ,  $V_*$  радиационный нагрев поверхности одинаков.

Простой подстановкой можно показать, что полученные решения (5.1)–(5.3) удовлетворяют исходному уравнению Эйлера (3.3), условиям трансверсальности (3.4) и Лежандра (3.5). Из условия (3.5) следует, что тела класса II реализуются при  $S_*^2/V_* \geq 2n \text{tg}(\pi/n)$ . В случае строгого равенства уравнение формы тела сводится к соотношению

$$\rho(\theta) = 1/(a_i \cos \theta) \quad (C_2 = 0), \quad (5.5)$$

которое представляет собой сторону правильного многоугольника, описанного около окружности  $\rho = 1/a_i$ . При  $n \rightarrow \infty$  имеем  $S_*^2/V_* \rightarrow 2\pi$ , и оптимальным поперечным контуром является окружность.

2. Рассмотрим случай  $i = 2$ , когда заданы объем тела  $V_*$  ( $\lambda_1 \neq 0$ ) и ограничение на волновое сопротивление тела ( $\lambda_3 \neq 0$ ), а площадь смачиваемой поверхности тела  $S_*$  свободна ( $\lambda_2 = 0$ ). Тогда из изопериметрических условий (3.9), (3.11) следует

$$a_2 = \sqrt{V_*/C_{D*}}, \quad V_*^2/C_{D*} = 2n(\text{tg}(\pi/n + C_2) - \text{tg} C_2).$$

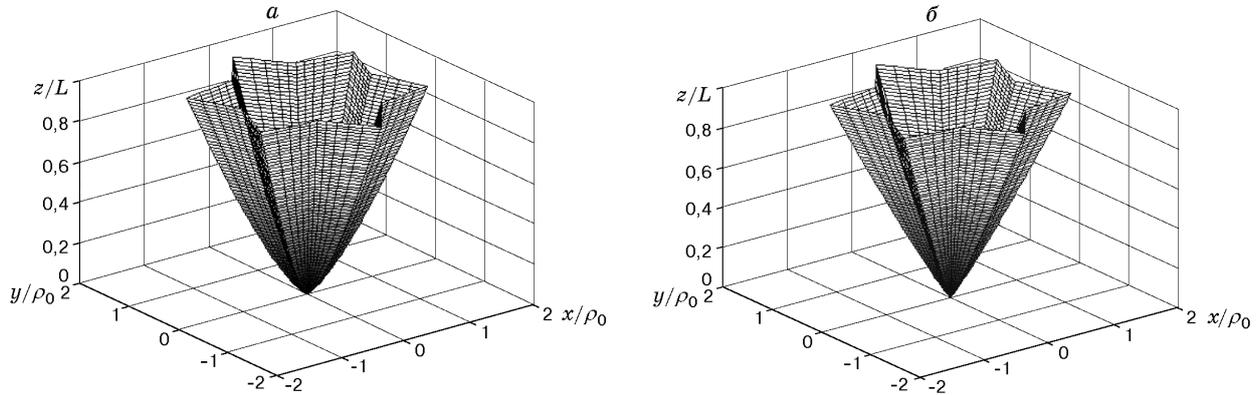


Рис. 2. Оптимальные формы тел класса II ( $n = 6, S_*^2/V_* = 3n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ):  
 а —  $m = 3$ ; б —  $m = 10$

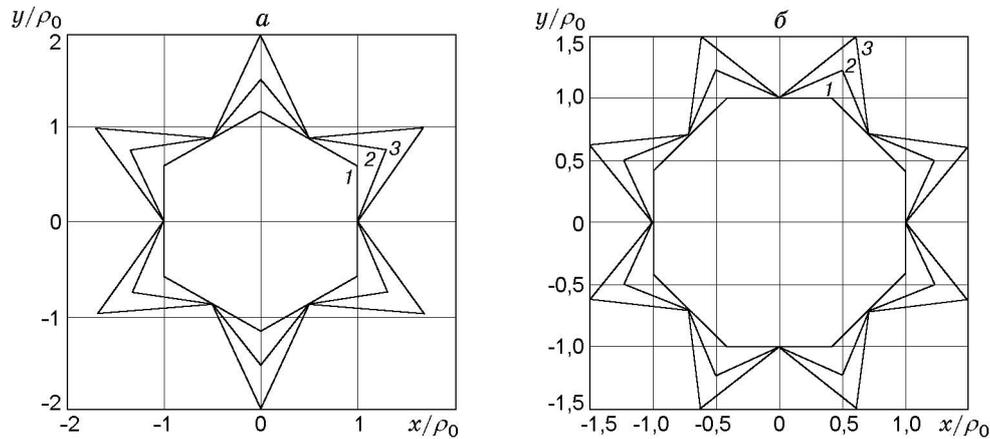


Рис. 3. Динамика поперечного контура тел класса II:  
 а —  $n = 6$ ; б —  $n = 8$ ; 1 —  $S_*^2/V_* = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ; 2 —  $S_*^2/V_* = 3n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ; 3 —  $S_*^2/V_* = 5n \operatorname{tg}(\pi/n)$

Оптимизирующее условие на число циклов экстремали (3.12) удовлетворяется для любого  $n$  при

$$\lambda_1 = \frac{m-3}{2} \left( \frac{C_{D_*}}{V_*} \right)^{(m-1)/2}, \quad \lambda_3 = \frac{1-m}{2} \left( \frac{C_{D_*}}{V_*} \right)^{(m-3)/2}. \quad (5.6)$$

Следовательно, минимальное значение функционала радиационного потока на экстремали не зависит от числа циклов и вычисляется по формуле

$$J_2^{\min} = V_*^{(3-m)/2} C_{D_*}^{(m-1)/2}. \quad (5.7)$$

Тела класса II с заданными  $V_*, C_{D_*}$  реализуются при следующем ограничении на входные параметры задачи:  $V_*^2/C_{D_*} \geq 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ .

На основе полученных аналитических выражений проведены расчеты оптимальных форм тел класса II в широком диапазоне входных параметров. На рис. 2 представлены звездобразные конфигурации с ограничениями на геометрические характеристики  $S_*, V_*$  при  $n = 6, m = 3, 10, S_*^2/V_* = 3n \operatorname{tg}(\pi/n)$ . Параметр излучения  $m$  оказывает влияние только на продольный контур тела, форма поперечного контура от  $m$  не зависит.

Динамика поперечного контура тела при  $n = 6, 8$  и различных значениях  $S_*^2/V_*$  представлена на рис. 3. На рис. 3 видно, что при  $S_*^2/V_* \rightarrow 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$  отношение конечных

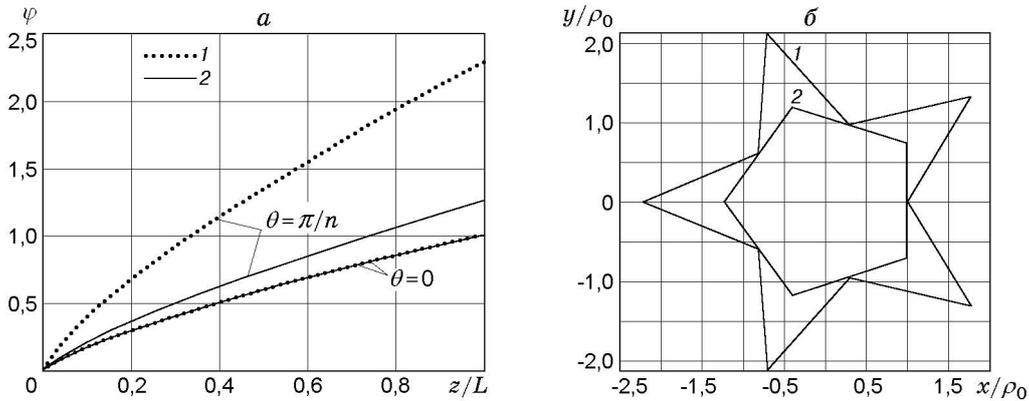


Рис. 4. Продольный (а) и поперечный (б) контуры тел класса II ( $n = 5, m = 5$ ):  
 1 —  $V_*^2/C_{D_*} = 5n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ; 2 —  $V_*^2/C_{D_*} = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$

радиусов  $\rho_f/\rho_0$  уменьшается, а форма поперечного сечения тела стремится к правильно-многоугольнику.

На рис. 4, а, б представлены оптимальные продольные и поперечные контуры звездообразных конфигураций соответственно в случае заданных  $V_*$ ,  $C_{D_*}$  при  $n = 5, m = 5$ ,  $V_*^2/C_{D_*} = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ;  $5n \operatorname{tg}(\pi/n)$ .

**6. Поперечный контур тел класса III.** Рассмотрим класс тел, для которого начальная точка контура лежит на линии (3.15)  $\dot{\rho}|_0 = 0$ , а конечная — на линии (3.17)  $\Psi|_{\pi/n} = 0$ . Таким образом, контур класса III содержит дугу окружности и прямую, касающуюся окружности. Из рис. 1 следует, что в силу непрерывности контура точка перехода дуги окружности в прямую соответствует  $\rho_0 = \rho_{cr} \equiv 1/a_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда аналитически экстремаль можно представить в виде

$$\rho = \begin{cases} 1/a_i, & 0 \leq \theta \leq \varepsilon_i, \\ 1/[a_i \cos(\theta - \varepsilon_i)], & \varepsilon_i \leq \theta \leq \pi/n, \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ) — угол сопряжения дуг экстремали, который определяется из соответствующих изопериметрических условий:  $S_*^2/V_* = 2n[\varepsilon_1 + \operatorname{tg}(\pi/n - \varepsilon_1)]$ ,  $a_1 = S_*/V_*$  в случае заданных  $V_*$  (3.9) и  $S_*$  (3.10);  $V_*^2/C_{D_*} = 2n[\varepsilon_2 + \operatorname{tg}(\pi/n - \varepsilon_2)]$ ,  $a_2 = \sqrt{V_*/C_{D_*}}$  в случае заданных  $V_*$  (3.9) и  $C_{D_*}$  (3.11).

Отметим, что из условия (3.12) на число циклов  $n$  следует, что оптимальные решения (6.1) справедливы только при выполнении соответствующих ограничений (5.3) или (5.6) на множители Лагранжа. Таким образом, полученные оптимальные формы тел класса III удовлетворяют как уравнению Эйлера (3.3), условиям трансверсальности (3.4) и Лежандра (3.5), так и оптимизирующему условию (3.12).

Функционал радиационного теплового потока для экстремали (6.1) определяется формулами (5.4) или (5.7) и не зависит от числа циклов.

На рис. 5 представлены оптимальные формы тел класса III с заданными параметрами  $S_*$ ,  $V_*$  при  $n = 3, m = 4, 10$ ,  $S_*^2/V_* = 1,5n \operatorname{tg}(\pi/n)$ . Динамика поперечного контура тела при  $n = 3, 4$  и различных значениях  $V_*^2/C_{D_*}$  представлена на рис. 6.

Из рис. 5, 6 следует, что при  $S_*^2/V_*$  и  $V_*^2/C_{D_*}$ , стремящихся к  $2n \operatorname{tg}(\pi/n)$  ( $\varepsilon_i = 0$ ), предельным случаем оптимального поперечного контура класса III является правильный многоугольник (5.5). Другим предельным случаем при  $S_*^2/V_*$  и  $V_*^2/C_{D_*}$ , стремящихся к  $2\pi$  ( $\varepsilon_i = \pi/n$ ), будет окружность радиусом  $\rho_0 = 1/a_i$ .

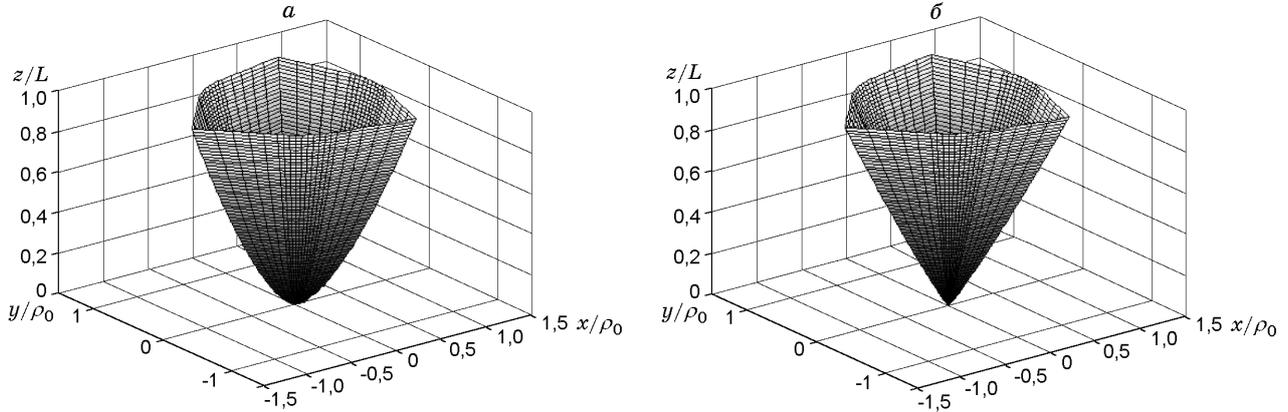


Рис. 5. Оптимальные формы тел класса III ( $n = 3, S_*^2/V_* = 1,5n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ):  
 а —  $m = 4$ ; б —  $m = 10$

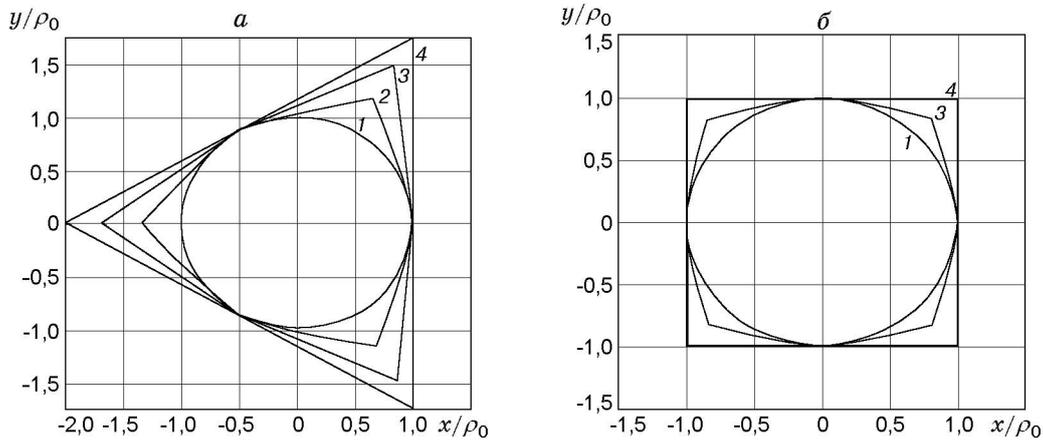


Рис. 6. Динамика поперечного контура тел класса III:  
 а —  $n = 3$ ; б —  $n = 4$ ; 1 —  $V_*^2/C_{D_*} = 2\pi$ ; 2 —  $V_*^2/C_{D_*} = 1,4n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ; 3 —  $V_*^2/C_{D_*} = 1,7n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ; 4 —  $V_*^2/C_{D_*} = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$

**7. Обсуждение результатов.** Полученные в пп. 4–6 решения соответствуют случаю “а” (см. п. 3), когда функция  $\Phi$  тождественно равна нулю на отрезке  $[0; \pi/n]$ . Исследуем случай “б”, когда функция  $\Phi$  может менять знак на отрезке  $[0; \pi/n]$  и, следовательно, равна нулю не только на концах отрезка, но и в конечном числе промежуточных точек.

Рассмотрим перечисленные выше классы тел:

— для тел класса I ( $\dot{\rho}|_0 = \dot{\rho}|_{\pi/n} = 0$ ) функция  $\Phi \equiv 0$  (см. рис. 1) либо  $\Phi > 0$ , что противоречит интегральному условию (3.14);

— для тел класса II ( $\Psi|_0 = \Psi|_{\pi/n} = 0$ ) и класса III ( $\dot{\rho}|_0 = \dot{\rho}|_{\pi/n} = 0$ ) функция  $\Phi$  не может менять знак на отрезке  $[0; \pi/n]$ , так как это противоречит тому, что экстремаль пересекает линию  $\Psi = 0$  бесконечное число раз.

Действительно, первый интеграл уравнения Эйлера (3.3) и уравнение (3.17) должны удовлетворяться одновременно во всех точках пересечения. Тогда в случаях заданных  $S_*$ ,  $V_*$  и  $S_*$ ,  $C_{D_*}$  справедливы соответственно соотношения

$$\left[ m \left( \frac{\lambda_2}{m-1} \right)^{(m-1)/m} + \lambda_1 \right] \rho^2(\theta) = C, \quad \left[ \frac{3-m}{2} \left( \frac{2\lambda_3}{1-m} \right)^{(m-1)/(m-3)} + \lambda_1 \right] \rho^2(\theta) = C. \quad (7.1)$$

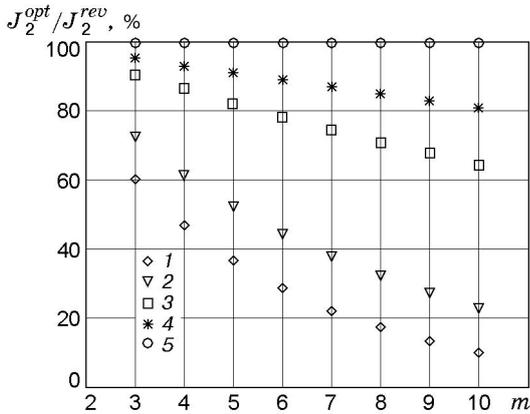


Рис. 7. Зависимость  $J_2^{opt}/J_2^{rev}$  от параметра излучения  $m$ :

1 —  $S_*^2/V_* = 10,3923$ ; 2 —  $S_*^2/V_* = 8,6603$ ; 3 —  $S_*^2/V_* = 6,9282$ ; 4 —  $S_*^2/V_* = 6,5818$ ; 5 —  $S_*^2/V_* = 2\pi$

Поскольку для тел классов II, III выполняются ограничения на множители Лагранжа (5.3), (5.6), сомножители, стоящие в квадратных скобках выражений (7.1), и константа  $C$  (3.3) обращаются в нуль. Следовательно, уравнения (7.1) удовлетворяются для любого значения  $\rho$ , и экстремаль имеет бесконечное число точек пересечений с кривой  $\Psi = 0$ . Доказанное утверждение обосновывает справедливость полученных решений.

Таким образом, тела, обладающие оптимальными поперечными контурами с точки зрения минимизации радиационного нагрева, могут быть четырех типов:

- 1) тела класса I (4.1) с круговым поперечным сечением ( $\rho \leq \rho_{cr}$ );
- 2) тела класса II (5.1) со звездообразным поперечным сечением ( $\rho \geq \rho_{cr}$ ,  $S_*^2/V_* \geq 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ,  $V_*^2/C_{D*} \geq 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ );
- 3) тела класса III (6.1) со звездообразным поперечным сечением, имеющим круговые включения ( $\rho \geq \rho_{cr}$ ,  $S_*^2/V_* \in [2\pi; 2n \operatorname{tg}(\pi/n)]$ ,  $V_*^2/C_{D*} \in [2\pi; 2n \operatorname{tg}(\pi/n)]$ );
- 4) пирамидальные тела с сечениями в виде правильных многоугольников (5.5), которые являются подмножествами тел классов II, III при  $S_*^2/V_* = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ ,  $V_*^2/C_{D*} = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$ .

Коэффициенты радиационного нагрева поперечных контуров тел классов II, III зависят от параметра излучения газа  $m$  и заданных геометрических характеристик тела, но не зависят от числа циклов экстремали  $n$ . Таким образом, для тел классов II, III, обладающих одинаковыми заданными параметрами  $m$ ,  $S_*$ ,  $V_*$  или  $m$ ,  $C_{D*}$ ,  $V_*$ , радиационный нагрев поверхности одинаков, при этом у тел класса III число лучей меньше. Параметр излучения  $m$  влияет только на форму продольного контура тела  $\varphi(\zeta)$  (2.1) и не влияет на оптимальную форму поперечного контура  $\rho(\theta)$ .

Зависимости отношения коэффициентов радиационного нагрева поперечных контуров оптимальных тел классов II, III  $J_2^{opt}$  и эквивалентных тел вращения  $J_2^{rev}$  от параметра излучения  $m$  при различных значениях  $S_*^2/V_*$  приведены на рис. 7. Под эквивалентными понимаются тела вращения, имеющие такие же длины  $L$  ( $L = 1$ ) и объемы  $V_*$ , что и оптимальные тела. Например, при  $n = 4$  кривые 1, 2 соответствуют телам класса II, кривые 3–5 — телам класса III; при  $n = 6$  кривые 1–3 соответствуют телам класса II, кривые 4, 5 — телам класса III.

Из расчетов следует, что использование оптимальных тел позволяет существенно уменьшить радиационный тепловой поток к поверхности тела по сравнению с телами вращения с аналогичными геометрическими характеристиками (для тел класса III до 50 %, для тел класса II до 98 %). Этот эффект тем сильнее, чем больше значения параметра излучения  $m$  и параметров  $S_*^2/V_*$ ,  $V_*^2/C_{D*}$ .

Однако отметим, что к результатам, полученным для звездообразных тел класса II с большим числом циклов  $n$ , следует относиться осторожно, поскольку поперечный кон-

тур тела имеет глубокие впадины между двумя соседними циклами, в которых применение формулы (1.1) для радиационного теплового потока физически неоправдано. Поэтому необходимо дальнейшее уточнение как исходной физической модели для радиационного теплообмена тел со впадинами, так и найденных форм тел путем экспериментальных исследований и численных расчетов по более точным моделям пространственного теплообмена.

Авторы выражают благодарность А. И. Леонтьеву и Г. А. Тирскому за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А.** Унос массы и изменение формы трехмерного тела при движении по траектории в атмосфере Земли // Космич. исслед. 1979. Т. 17, № 2. С. 246–255.
2. **Аргучинцева М. А., Пилюгин Н. Н.** Экстремальные задачи радиационной газовой динамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997.
3. **Аргучинцева М. А., Пилюгин Н. Н.** Экстремальные задачи при теплообмене пространственных тел, движущихся с гиперзвуковыми скоростями // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 4. С. 643–657.
4. **Аргучинцева М. А., Пилюгин Н. Н.** Пространственные формы тел с минимальным нагревом поверхности при гиперзвуковом движении в атмосфере // Космич. исслед. 1992. Т. 30, № 5. С. 615–628.
5. **Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А.** Динамика ионизованного излучающего газа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
6. **Стулов В. П., Шапиро Е. Г.** Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 1. С. 154–160.
7. **Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А.** Гиперзвуковое обтекание невязким излучающим газом плоских затупленных тел // ПМТФ. 1975. № 3. С. 68–75.
8. **Деев А. А., Левин В. А., Пилюгин Н. Н.** О форме тела с минимальным полным потоком лучистой энергии к его поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 4. С. 84–89.
9. **Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н.** Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 2. С. 71–76.
10. **Апштейн Э. З., Вартамян Н. В., Сахаров В. И.** Определение лучистых тепловых потоков по поверхности пространственных и осесимметричных тел при сверхзвуковом обтекании их идеальным газом // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 1. С. 92–97.
11. **Апштейн Э. З., Вартамян Н. В., Сахаров В. И.** Радиационный нагрев пространственных тел, обтекаемых невязким сверхзвуковым потоком воздуха // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 4. С. 183–187.
12. **Мурзинов И. Н.** Затупленные по сфере конусы минимальных тепловых потоков // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 6. С. 173–179.
13. **Chin J. H.** Shape change and conduction for nosetips at angle of attack // AIAA J. 1975. V. 13, N 5. P. 599–604.
14. **Widhoph G. F.** Heat-transfer correlations for blunt cones at angle of attack // J. Spacecraft Rockets. 1971. V. 8, N 9. P. 1002–1004.
15. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

16. **Kondo J., Aihara J., Tani T., Onij A.** The optimum configuration and the optimum re-entry trajectory of space shuttle vehicles. N. Y., 1972. (Paper / ICAS; N 72-27).
17. **Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В.** Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970.
18. **Миеле А., Саарис Дж.** Поперечный контур тела минимального полного сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 306–324.

*Поступила в редакцию 8/X 2001 г.,  
в окончательном варианте — 14/II 2002 г.*

---