

УДК 532.135

Гидродинамика и теплоперенос при ламинарном течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале*

Д.В. Ананьев, Г.Р. Халитова, Е.К. Вацагина

Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, Казань

E-mail: Dima211083@yandex.ru

Приводятся результаты численного исследования гидродинамики и теплообмена при ламинарном течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале. Для описания вязкоупругих свойств жидкости используется модель нелинейно-вязкоупругой жидкости Фан-Тьен–Таннера. Рассматривается решение поставленной задачи в программном пакете «COMSOL Multiphysics». Приводится верификация предложенного метода решения. Установлено, что при течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале максимальный вклад температурного разогрева за счет диссипации составляет примерно 7–8 %.

Ключевые слова: гидродинамика, теплоперенос, плоскощелевой канал, ламинарное течение, математическое моделирование, модель Фан-Тьен–Таннера, вязкоупругая жидкость.

Введение

Течение вязкоупругих жидкостей в каналах экструзионных аппаратов, представляющих собой плоскощелевые каналы, всегда пользовалось вниманием исследователей, занимающихся изучением течений реологически сложных сред [1–5]. Решение задачи течения вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале дает возможность проверить адекватность различных реологических уравнений состояния.

Одной из наиболее распространенных моделей нелинейно-вязкоупругой жидкости, хорошо зарекомендовавшей себя на практике, является модель Фан-Тьен–Таннера [3]. В литературе [4–7] были представлены решения задачи о течении жидкости Фан-Тьен–Таннера в каналах и трубах в случае использования линейных или упрощенных моделей жидкости. В настоящей работе рассматривается нелинейная модель вязкоупругой жидкости Фан-Тьен–Таннера. Приводится сравнение численного и аналитического решений задачи.

Модель Фан-Тьен–Таннера является универсальной реологической моделью, позволяющей с высокой точностью прогнозировать аномалию вязкости раствора полимера и наличие продольной вязкости в течениях, обусловленных нормальными напряжениями, хорошо описывающей течение полимеров, пластмасс, резиновых смесей, т.е. тех жидкостей, для которых характерно наличие вязкоупругого эффекта [8–11].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Академии наук РТ (грант № 12-08-97034-р_поволжье_a).

С практической точки зрения понимание особенностей течения вязкоупругих жидкостей в плоскощелевых каналах чрезвычайно важно для совершенствования различных процессов переработки, например, экструзии, формования волокон и т.д. В связи с этим возникает необходимость в численном исследовании гидродинамики и теплообмена при ламинарном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тьен–Таннера в плоскощелевом канале, который часто встречается в экструзионной технологии.

1. Постановка и метод решения задачи

1.1. Гидродинамическая часть задачи

Постановка задачи течения вязкоупругой жидкости в каналах осуществлялась при следующих допущениях: гидродинамические процессы имеют изотермический, стационарный и сформировавшийся характер; жидкость прилипает к стенкам каналов; течение жидкости ламинарное; жидкость несжимаема; массовые силы не учитываются, а вязкоупругие свойства описываются моделью Фан-Тьен–Таннера. Тогда основные уравнения, описывающие гидродинамику процесса записываются следующим образом:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\nabla \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}}) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma, \quad (2)$$

$$\lambda \left(\overset{\nabla}{\sigma}_V + \xi (D \cdot \sigma_V + \sigma_V \cdot D) \right) + g \sigma_V = 2\eta_V D, \quad (3)$$

где $\sigma = \sigma_V + \sigma_N, \quad (4)$

$$\sigma_N = 2\eta_N D, \quad (5)$$

$$g = \exp \left[\frac{\varepsilon \lambda}{\eta_V} \text{tr}(\sigma_V) \right], \quad (6)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} - \sigma \cdot \nabla \mathbf{V}^T - \nabla \mathbf{V} \cdot \sigma, \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \nabla \sigma \cdot \bar{\mathbf{V}}, \quad (8)$$

$$D = \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{V}} + \nabla \bar{\mathbf{V}}^T). \quad (9)$$

Здесь $\bar{\mathbf{V}}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, σ — тензор напряжений, σ_V — вязкоупругая составляющая тензора напряжений, σ_N — ньютоновская составляющая тензора напряжений, λ — время релаксации напряжений, $\overset{\nabla}{\sigma}$ — верхняя конвективная производная, ε, ξ — реологические параметры модели Фан-Тьен–Таннера, $0 \leq \xi \leq 2$, η_N, η_V — ньютоновская и неньютоновская составляющие общей вязкости (условного растворителя и полимера), D — тензор скоростей деформации, « $\overset{\nabla}{\sigma}$ » — символ транспонирования, tr — операция взятия следа, t — время.

Рассмотрим течение вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале высотой $2h$ и длиной L , достаточной для того, чтобы оно успело сформироваться при задании на входе параболического профиля скорости (например, $L = 50h$). Геометрическая область течения представляет собой некоторую область, находящуюся между двумя параллельными плоскостями, где ось Ox декартовой системы координат проходит по оси симметрии канала.

В силу симметрии рассматривается только половина канала. Жидкость течет в направлении оси OX . Тогда система уравнений (1)–(3) примет вид:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_N \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_N \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \sigma_{vxx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{vxy}}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_N \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_N \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \sigma_{vxy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{vyy}}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\frac{\partial \sigma_{vxx}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \sigma_{vxx}}{\partial y} v_y - 2\sigma_{vxx} \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2\sigma_{vxy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \right. \\ & \left. + 2\xi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{vxx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{vxy} \right) \right) + g\sigma_{vxx} = 2\eta_v \frac{\partial v_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\frac{\partial \sigma_{vxy}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \sigma_{vxy}}{\partial y} v_y - \sigma_{vxx} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \sigma_{vyy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (\sigma_{vxx} + \sigma_{vyy}) \right) + g\sigma_{vxy} = \eta_v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\frac{\partial \sigma_{vyy}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \sigma_{vyy}}{\partial y} v_y - 2\sigma_{vxy} \frac{\partial v_y}{\partial x} - 2\sigma_{vyy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \right. \\ & \left. + 2\xi \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{vyy} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{vxy} \right) \right) + g\sigma_{vyy} = 2\eta_v \frac{\partial v_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (14)$$

где v_x, v_y — компоненты вектора скорости, $\sigma_{vxx}, \sigma_{vyy}, \sigma_{vxy}$ — компоненты тензора σ_V .

Граничные условия имеют следующий вид.

На твердых границах:

– условия прилипания для скорости: $\bar{v} = 0$; (15)

– граничные условия для тензора напряжений σ следуют из условий, имеющих место на твердой границе: $v_x = 0, v_y = 0, \partial v_x / \partial x = 0, \partial v_y / \partial x = 0$, и из уравнения неразрывности: $\partial v_y / \partial y = 0$, где v_x, v_y — составляющие вектора скорости; тогда граничные условия получаются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \sigma_{vxy} \frac{\partial v_x}{\partial y} (\xi - 2) + g\sigma_{vxx} = 0, \\ \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y} \left((0,5\xi - 1) \sigma_{vyy} + 0,5\xi \sigma_{vxx} \right) + g\sigma_{vxy} = \eta_v \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\ \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y} \xi \sigma_{vxy} + g\sigma_{vyy} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

На оси симметрии канала:

$$\partial v_x / \partial y = 0, \quad v_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (17)$$

На входе в канал:

$$v_y = 0, \quad v_x \text{ — параболический профиль.} \quad (18)$$

На выходе мы полагаем, что течение полностью сформировалось и компоненты скорости не меняются по направлению x :

$$\partial v_x / \partial x = \partial v_y / \partial x = 0. \quad (19)$$

Запишем задачу (10)–(19) в безразмерном виде с помощью новых переменных:

$$x^* = \frac{x}{h}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{v_0}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma h}{(\eta_N + \eta_v) v_0}, \quad p^* = \frac{ph}{v_0 (\eta_N + \eta_v)}, \quad (20)$$

где v_0 — максимальное значение параболического профиля скорости на входе в канал.

Тогда получим:

$$\text{Re} \left(v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \beta \left(\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_{vxx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial y^*} \right), \quad (21)$$

$$\text{Re} \left(v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \beta \left(\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{vyy}^*}{\partial y^*} \right), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \text{We} \left(\frac{\partial \sigma_{vxx}^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial \sigma_{vxx}^*}{\partial y^*} v_y^* - 2\sigma_{vxx}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} - 2\sigma_{vxy}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \right. \\ & \left. + 2\xi \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \sigma_{vxx}^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right) \sigma_{vxy}^* \right) \right) + g \sigma_{vxx}^* = 2(1-\beta) \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{We} \left(\frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial y^*} v_y^* - \sigma_{vxx}^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} - \sigma_{vyy}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right) \left(\sigma_{vxx}^* + \sigma_{vyy}^* \right) \right) + g \sigma_{vxy}^* = (1-\beta) \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{We} \left(\frac{\partial \sigma_{vyy}^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial \sigma_{vyy}^*}{\partial y^*} v_y^* - 2\sigma_{vxy}^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} - 2\sigma_{vyy}^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \right. \\ & \left. + 2\xi \left(\frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \sigma_{vyy}^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right) \sigma_{vxy}^* \right) \right) + g \sigma_{vyy}^* = 2(1-\beta) \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$g = \exp \left(\varepsilon \frac{\text{We}}{(1-\beta)} \left(\sigma_{vxx}^* + \sigma_{vyy}^* \right) \right), \quad (26)$$

где безразмерные комплексы Re , We , и β являются числами Рейнольдса ($\text{Re} = \rho v_0 L / (\eta_v + \eta_N)$),

Вайсенберга ($\text{We} = \lambda v_0 / L$) и коэффициентом ретардации ($\beta = \eta_N / (\eta_v + \eta_N)$).

Граничные условия в безразмерном виде примут следующий вид.

На твердых границах:

– условия прилипания для скорости: $\bar{v}^* = 0$;

– из (16) следует:

$$\begin{cases} \text{We} \sigma_{vxy}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} (\xi - 2) + g \sigma_{vxx}^* = 0, \\ \text{We} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \left((0,5\xi - 1) \sigma_{vyy}^* + 0,5\xi \sigma_{vxx}^* \right) + g \sigma_{vxy}^* = \eta_v \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*}, \\ \text{We} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \xi \sigma_{vxy}^* + g \sigma_{vyy}^* = 0. \end{cases}$$

$$\text{На оси симметрии канала: } \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = 0, \quad v_y^* = 0, \quad \sigma_{xy}^* = 0. \quad (27)$$

$$\text{На входе в канал: } v_y^* = 0, \quad v_x^* = 1 - y^{*2}. \quad (28)$$

Для решения использовался программный пакет «COMSOL Multiphysics», позволяющий моделировать физические процессы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, в том числе для задач механики жидкости и газа. Решение базируется на численном решении уравнений в частных производных методом конечных элементов.

Рабочая область течения в плоскощелевом канале представляется в виде прямоугольной области с осью OX по оси симметрии прямоугольника с достаточно большой длиной, чтобы профиль скорости успел сформироваться с учетом того, что на входе задается профиль скорости, заведомо несоответствующий вязкоупругой жидкости (например, параболический профиль или константа поршневого течения).

Для моделирования течения вязкоупругой жидкости выбрано программное приложение «Incompressible Navier–Stokes» для стационарного течения. Значения параметров задаются согласно уравнениям (21)–(22). При этом значения составляющих вектора мас-

совых сил равны: $\frac{1-\beta}{\text{We} \cdot \beta} \left(\frac{\partial \sigma_{vxx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial y^*} \right)$ и $\frac{1-\beta}{\text{We} \cdot \beta} \left(\frac{\partial \sigma_{vxy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{vyy}^*}{\partial y^*} \right)$ по x и по y соответст-

венно. Граничные условия задаются согласно (27)–(28).

Для моделирования вязкоупругих свойств жидкости для каждой компоненты тензора напряжений используем программное приложение «Convection and Diffusion» для стационарного процесса. Значение параметров задаются согласно уравнениям (23)–(25).

1.2. Граничные условия

Так как решением рассматриваемой задачи является профиль скорости и значения компонент тензора напряжений, сформировавшихся и уже не меняющихся на достаточно большом расстоянии от входа, то на входе в канал задаем $\sigma_{vxx}^* = \sigma_{vxy}^* = \sigma_{vyy}^* = 0$.

На твердых границах канала устанавливаются граничные условия, выражения которых для каждой компоненты через другие можно получить из (16). Верификация метода решения, представленного выше, проводилась путем сравнения аналитического решения задачи течения упрощенной модели жидкости Фан-Тьен–Таннера [6] с численным решением, полученным с помощью программного комплекса COMSOL.

Аналитическое решение для течения жидкости в рассматриваемом плоскощелевом канале, описываемой упрощенной моделью Фан-Тьен–Таннера может быть получено путем ряда выкладок. Исследуемое течение в плоскощелевом канале является установившимся, поэтому $\partial/\partial x = 0$, $v_y = 0$, из уравнения неразрывности следует: $\partial v_y/\partial y = 0$, также упрощенная модель Фан-Тьен–Таннера предполагает, что $\xi = 0$. Из уравнения (2) получим $p_x + \partial \sigma_{xy}/\partial y = 0$. Проинтегрируем последнее выражение с учетом $\sigma_{xy}|_{y=0} = 0$,

тогда $\sigma_{xy} = p_x y$, или в безразмерном виде

$$\sigma_{xy}^* = p_x^* y^* . \quad (29)$$

Из (21)–(25) следует:

$$g \cdot \sigma_{xx}^* = 2We \cdot \sigma_{xy}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} , \quad (30)$$

$$\sigma_{yy}^* = 0, \quad (31)$$

$$g \cdot \sigma_{xy}^* = (1-\beta) \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} , \quad (32)$$

$$g = \exp\left(\frac{\varepsilon We}{1-\beta} \sigma_{xx}^*\right) . \quad (33)$$

Разделив (30) на (32) и подставив (29), получим:

$$\sigma_{xx}^* = 2We \left(p_x^* y^*\right)^2 / (1-\beta) , \quad (34)$$

$$g = \exp\left(2\varepsilon (We p_x^* y^*)^2 / (1-\beta)^2\right) . \quad (35)$$

После подстановки (29), (34) и (35) в (32) получаем уравнение:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = p_x^* y^* \exp\left(2\varepsilon (We p_x^* y^*)^2 / (1-\beta)^2\right) . \quad (36)$$

После интегрирования (36) с учетом граничных условий (27), (28) окончательно аналитическое решение имеет вид:

$$v_x^* = \frac{\exp\left(\frac{2\varepsilon (We p_x^* y^*)^2}{(1-\beta)^2}\right) - \exp\left(\frac{2\varepsilon (We p_x^*)^2}{(1-\beta)^2}\right)}{4\varepsilon p_x^* We^2} . \quad (37)$$

На рис. 1 изображены кривые распределения скорости v_x^* при $We = 1$, $\varepsilon = 0,15$, $p_x^* = 1,4$. Среднеквадратичная погрешность численного расчета равна $\delta = 0,042$.

1.3. Постановка и метод решения задачи теплопереноса

Рассмотрим задачу теплопереноса в предположении, что теплофизические свойства жидкости зависят от температуры незначительно и этой зависимостью можно пренебречь. К уравнениям (1)–(9) добавляем уравнение теплопереноса

$$\rho \cdot c_p \frac{dT}{dt} = \lambda_1 \operatorname{div}(\operatorname{grad}T) + \sigma : D, \quad (38)$$

где c_p , λ_1 — удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости соответственно, знак «:» означает двойное

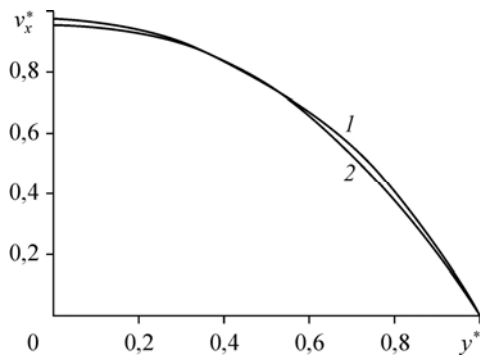


Рис. 1. Распределение скорости v_x^* .

1 — численное решение, 2 — аналитическое решение.

скалярное произведение тензоров, T — температура. В декартовой системе координат уравнение (38) запишется как:

$$\rho \cdot c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \sigma_{vxx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{vxy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \sigma_{vyy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + 2\eta_N \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (39)$$

Граничные условия для уравнения теплопереноса на твердых стенках канала прием как граничные условия первого рода, соответствующие условию постоянства температуры $T|_{\text{ст}} = T_1$. На входе в канал жидкость имеет температуру, равную T_0 . На оси симметрии принимается условие симметрии для профиля температуры, т.е. $\partial T / \partial y|_{y=0} = 0$. Запишем уравнение (39) в безразмерном виде с учетом (20) и, вводя безразмерную температуру как $T^* = (T - T_0) / (T_1 - T_0)$, получим

$$v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{(\partial x^*)^2} + \frac{\partial^2 T^*}{(\partial y^*)^2} \right) + \frac{\text{Br}}{\text{Pe}} \left[\sigma_{vxx}^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \sigma_{vxy}^* \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right) + \sigma_{vyy}^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + 2\beta \left[\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] \right], \quad (40)$$

где $\text{Pe} = \frac{\rho c_p v_0 h}{\lambda_1}$ — число Пекле, $\text{Br} = \frac{(\eta_N + \eta_v) v_0^2}{\lambda_1 (T_1 - T_0)}$ — число Бринкмана.

Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$T^*|_{x^*=0} = 0, \quad T^*|_{y^*=1} = 1, \quad \frac{\partial T^*}{\partial y^*}|_{y^*=0} = 0.$$

Для моделирования процесса теплопереноса в COMSOL было выбрано программное приложение «Heat Transfer, Convection and Conduction» для стационарной задачи. Значение параметров задаются согласно уравнению (40) с учетом ранее рассмотренных уравнений (21)–(26).

2. Результаты численных расчетов

2.1. Результаты численного исследования гидродинамики

Из реологического уравнения Фан-Тьен-Таннера (3)–(9) видно, что характер течения вязкоупругой жидкости определяется параметрами We , β , ε и ξ . В данной модели эффект упругости определяется числом Вайсенберга, который характеризует время релаксационных процессов. Как видно из рис. 2, под влиянием этого параметра конфигурация скорости претерпевает существенные изменения. С увеличением значения We максимальное значение скорости уменьшается,

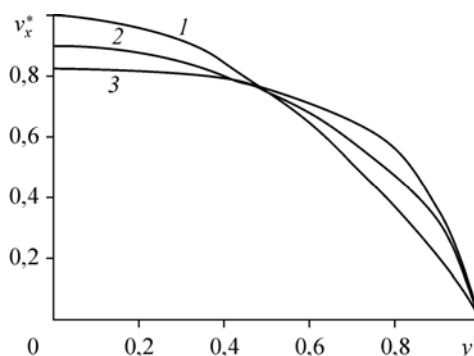


Рис. 2. Распределение скорости для разных чисел We .

$\varepsilon = 0,15$, $\xi = 1$, $\beta = 0,11$; 1 — $We = 0,1$, 2 — $We = 0,5$, 3 — $We = 2$.

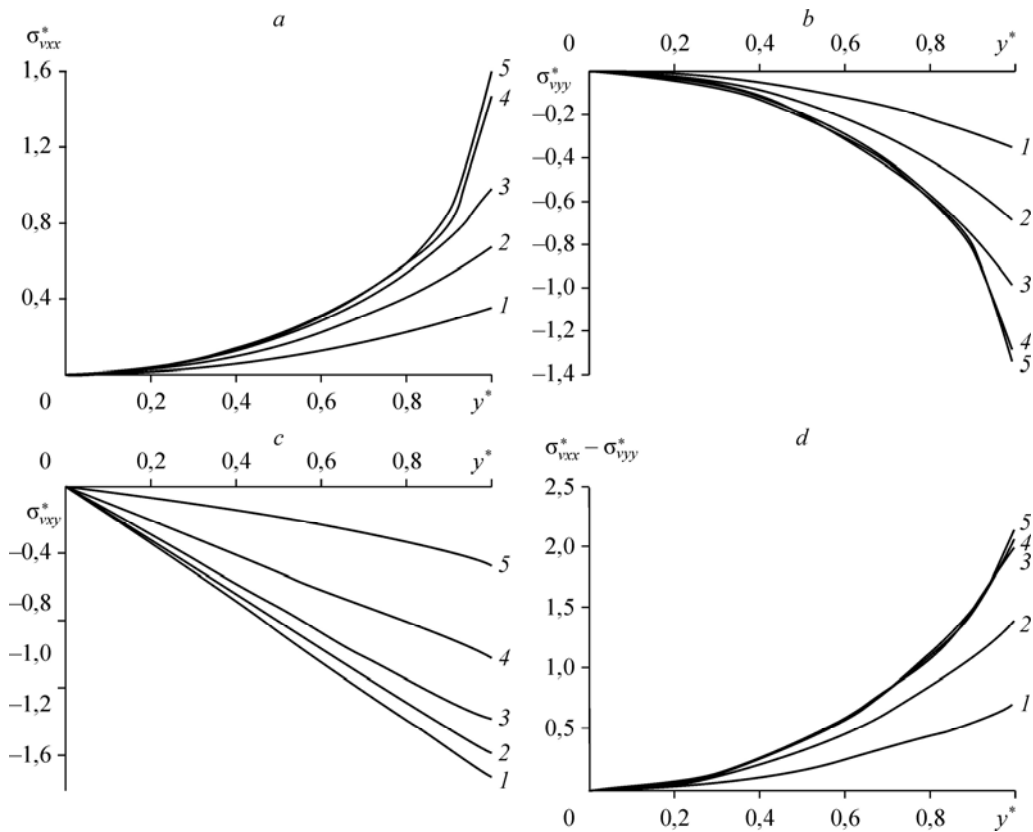


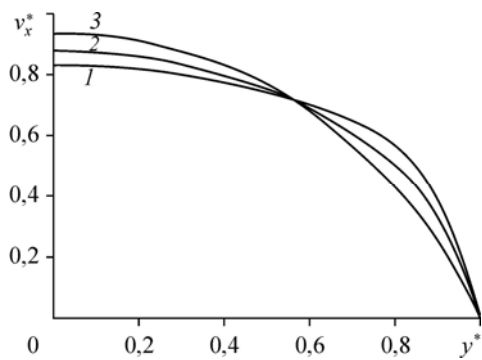
Рис. 3. Распределение нормальных (a, c), касательных (b) и разности нормальных (d) напряжений для разных чисел We.

$$\varepsilon = 0,15, \xi = 1, \beta = 0,11; We = 0,1 (1), 0,2 (2), 0,3 (3), 0,5 (4), 1 (5).$$

профиль скорости сплющивается. При малых значениях We (1) форма продольной составляющей вектора скорости приближается к параболическому виду, который соответствует течению ньютоновской жидкости.

В вискозиметрических течениях эффективная вязкость для вязкоупругих сред, описываемых реологическим уравнением Фан-Тьен–Таннера [6], является убывающей функцией от второго инварианта тензора скоростей деформации. Таким образом, вязкоупругая жидкость проявляет свойства псевдопластичности, поэтому профиль скорости для вязкоупругой жидкости имеет характерную для псевдопластических сред конфигурацию.

Как видно из рис. 3, начиная с некоторого числа We_c , конкретное значение которого зависит от параметров модели Фан-Тьен–Таннера, распределения нормальных и касательных напряжений на графиках ложатся вплотную друг к другу. Так, для $\varepsilon = 0,15$,



$\xi = 1, \beta = 0,11 We_c \approx 1$, а для $\varepsilon = 0,15, \xi = 0, \beta = 0,11 We_c \approx 1,5$. Параметры ε и ξ определяют нелинейное поведение модели. Параметр ξ называется параметром скольжения и варьируется от 0 до 2, он регулирует интенсивность скольжения между звеньями цепи полимера и сплошной средой растворителя. Как видно из рис. 4, 5, значение параметра ξ

Рис. 4. Распределение скорости для разных ξ . $\varepsilon = 0,15, We = 1, \beta = 0,11; \xi = 0,1 (1), 0,3 (2), 1 (3)$.

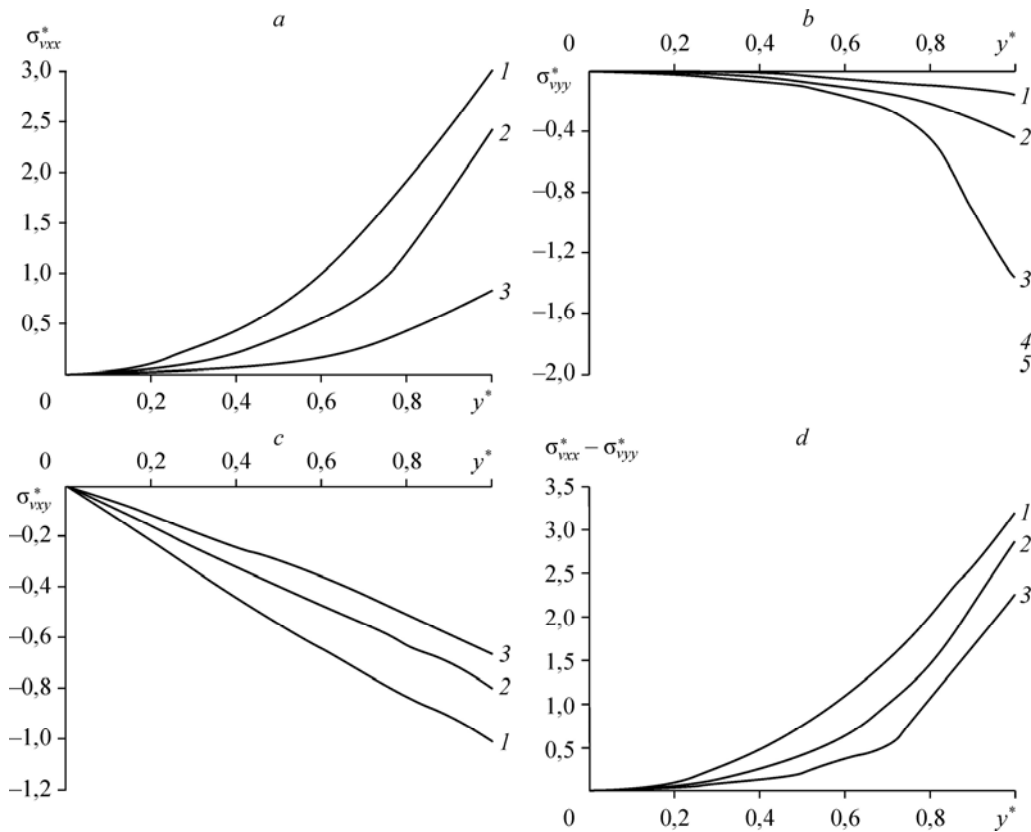


Рис. 5. Распределение нормальных (а, с), касательных (b) и разности нормальных (d) напряжений для разных ξ

$\varepsilon = 0,15$, $We = 1$, $\beta = 0,11$; $\xi = 0,1$ (1), $0,3$ (2), 1 (3).

влияет на форму распределения характеристик течения вязкоупругой жидкости. Большой интенсивности скольжения соответствует более сплюснутая кривая распределения скорости, характерная для псевдопластичных жидкостей.

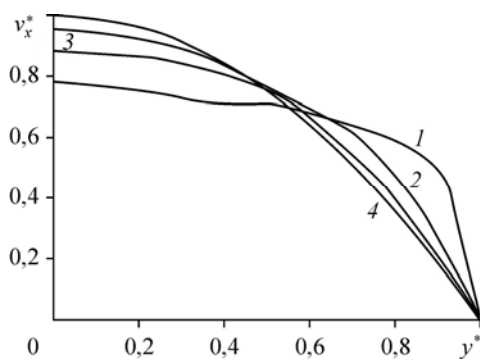
Согласно формуле (20), параметр β может меняться в пределах от 0 до 1. Значения β , близкие к 1, соответствуют раствору полимера с низкой концентрацией, поэтому профиль скорости приближается к параболическому (рис. 6), а соответствующие распределения составляющих вязкоупругой составляющей тензора напряжений близки к нулю (рис. 7). Малые значения параметра β соответствуют расплаву полимера, имеющему ярко выраженные вязкоупругие свойства, что отражается на характере графиков (рис. 6, 7).

2.2. Результаты численного исследования теплопереноса

Расчеты проводились для канала $L_1/h = 10$, где L_1 — длина плоскощелевого канала. Процесс теплопереноса в канале определяется гидродинамическим характером течения, параметрами Re и Wg и их отношением Wg/Re . Число Wg отражает отношение диссипации

Рис. 6. Распределение скорости для разных значений параметра β .

$\varepsilon = 0,15$, $\xi = 0,7$, $We = 1$; $\beta = 0,05$ (1), $0,2$ (2), $0,5$ (3), $0,99$ (4).



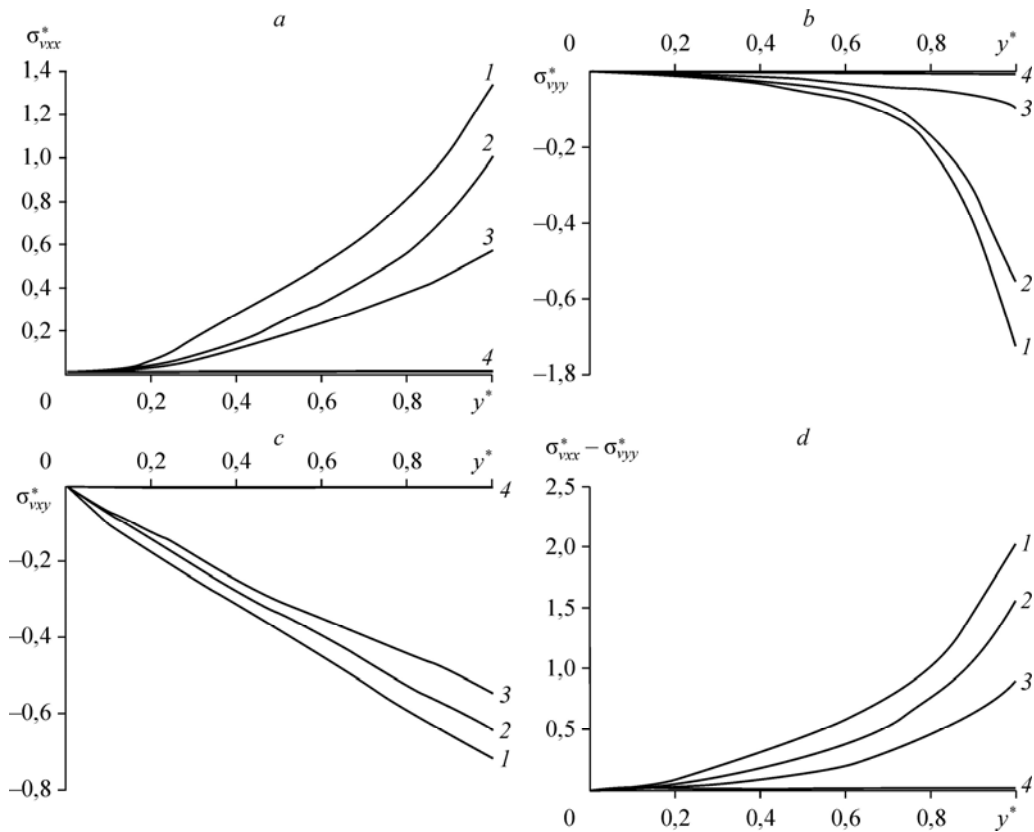
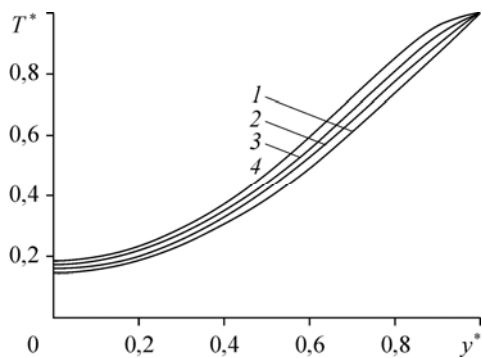


Рис. 7. Распределение нормальных (а, с), касательных (b) и разности нормальных (d) напряжений для разных чисел β .
 $\varepsilon = 0,15$, $\xi = 0,7$, $We = 1$; $\beta = 0,05$ (1), 0,2 (2), 0,5 (3), 0,99 (4).

внутренней энергии к тепловому потоку на стенке. Этот параметр приобретает важное значение в тех случаях, когда имеют место большие градиенты скорости. Как видно из рис. 8, прогрев жидкости с ростом числа Bg увеличивается, причем в пристеночной области разность температур при различных значениях Bg также заметно больше, что можно объяснить тем, что диссипативная функция в уравнении (41), зависящая от числа Bg , определяется в значительной степени градиентами скорости, которые именно в пристеночной области (рис. 2) имеют наибольшие значения. Кроме того, наличие диссипативного члена ($Bg \neq 0$) отражается на форме кривой распределения температуры в пристеночной области. Она характеризуется прогибом, тем большим, чем больше число Bg .



На рис. 9 представлены кривые распределения температуры в поперечном сечении на выходе из канала при различных значениях числа Re и постоянном отношении $Bg/Re = 0,025$. Число Пекле характеризует соотношение конвективного и кондуктивного теплопереноса в потоке. С уменьшением числа Пекле преобладание конвективной

Рис. 8. Распределение температуры в поперечном сечении на выходе из канала $x^* = 10$ для различных чисел Bg .
 $Bg = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4).

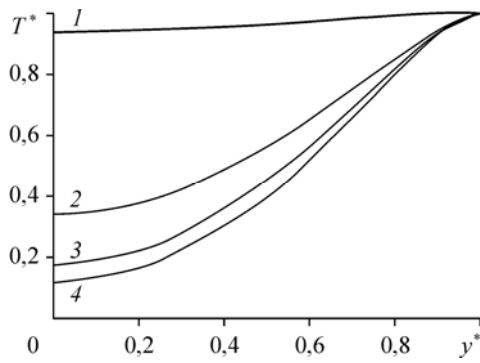


Рис. 9. Распределение температуры в поперечном сечении на выходе из канала $x^* = 10$ для различных чисел Pe при $Bg/Pe = 0,025$.
 $Pe = 10$ (1), 50 (2), 80 (3), 100 (4).

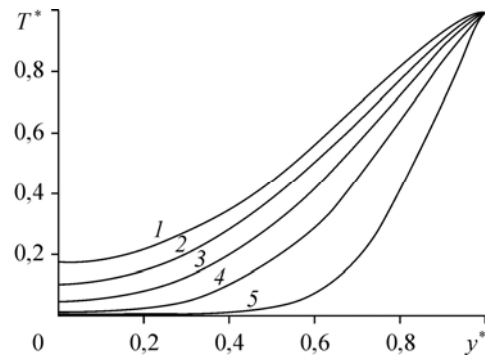


Рис. 10. Изменение температуры в поперечном сечении для различных значений x^* .
 $x^* = 2$ (1), 4 (2), 6 (3), 8 (4), 10 (5).

составляющей в теплопереносе уменьшается и температура на выходе увеличивается. Распределение температуры на выходе, например, при $Pe = 10$ соответствует почти полностью прогретой жидкости.

На рис. 10 кривые распределения температуры в поперечном сечении канала отражают процесс теплопереноса вдоль канала при следующих значениях параметров: $Pe = 80$ и $Bg = 2$.

Для того чтобы оценить вклад диссипативного разогрева при течении вязкоупругой жидкости в щелевом канале, были проведены расчеты для случая, когда температура стенки $T_{ст}^*$ совпадает с температурой на входе, т.е. разогрев вязкоупругой жидкости происходит исключительно только за счет энергии диссипации. Полученные результаты для распределения температуры в поперечном сечении канала на разных длинах от входа в канал представлены на рис. 11. Как видно, для рассматриваемого случая при $Pe = 80$ и $Bg = 2$ максимальный вклад температурного разогрева за счет диссипации составляет примерно 7–8 %.

Соотношение вязкоупругой и вязкой частей диссипативной функции представлено на рис. 12. Видно, что в пристеночной области вязкая составляющая вдвое превышает вязкоупругую, далее разница меняется в обратную сторону, но не столь существенно, и сходится на нет в центре канала.

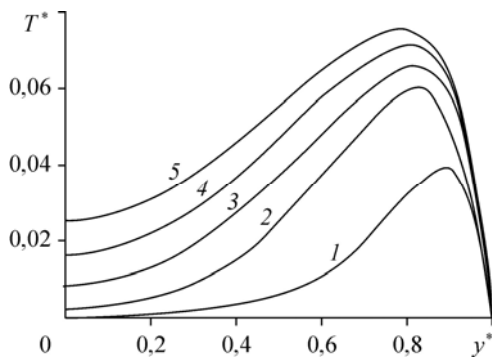


Рис. 11. Разогрев жидкости за счет энергии диссипации.

$T_{ст}^* = 0$; $x^* = 2$ (1), 4 (2), 6 (3), 8 (4), 10 (5).

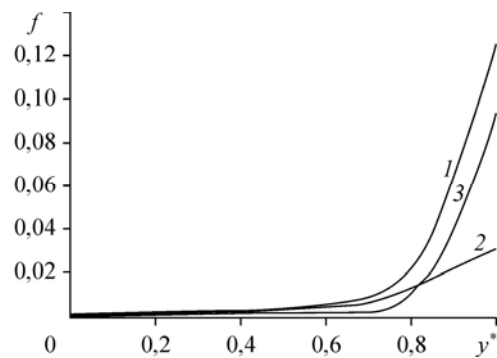


Рис. 12. Распределение диссипативной функции $f = \sigma : D$ в поперечном сечении канала (1) и ее вязкоупругая (2) и вязкая (3) составляющие.

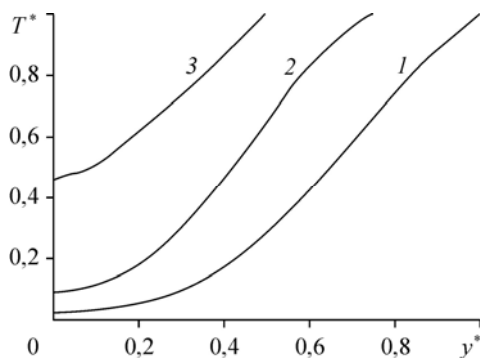


Рис. 13. Распределение температуры на выходе из плоских каналов.
 $h = 1$ (1), $0,75$ (2), $0,5$ (3).

На рис. 13 представлены кривые распределения температуры на выходе из плоских каналов различной высоты, которые показывают общую картину прогрева жидкости: чем больше высота плоского канала, тем больше наблюдается смещение прогретых слоев жидкости к оси канала и тем меньше прогрев пристеночной области.

Заключение

Проведено исследование гидродинамики и теплопереноса при ламинарном течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале. Исследовалась нелинейная модель вязкоупругой жидкости Фан-Тьен–Таннера. Сравнение численных и аналитических данных показало адекватность использованного метода решения. Установлено, что при течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале максимальный вклад температурного разогрева за счет диссипации составляет примерно 7–8 %. В связи с тем, что градиенты скорости имеют наибольшие значения в пристеночной области (рис. 2), разница температур при различных значениях $B\dot{\gamma}$ вблизи стенок плоскощелевого канала также заметно больше.

Список литературы

1. Verbeeten W.M.H., Peters G.W.M., Baaijens F.P.T. Viscoelastic analysis of complex polymer melt flows using the eXtended Pom–Pom model // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2002. Vol. 108. P. 301–326.
2. Lord T.D., Scelsi L., Hassell D.G., Mackley M.R. The matching of 3D Rolie–Poly viscoelastic numerical simulation with experimental polymer melt flow within a slit and a cross-slot geometry // J. Rheol. 2010. Vol. 54, No. 2. P. 355–373.
3. Phan-Thien N., Tanner R.I. A new constitutive equation derived from on the concept of deformation-dependent tensorial mobility // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1977. Vol. 211. P. 353–365.
4. Alves M.A., Pinho F.T., Oliveira P.J. Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien–Tanner fluid // J. Non-Newtonian. Fluid Mech. 2001. Vol. 101. P. 55–76.
5. Oliveira P.J., Pinho F.T. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien–Tanner fluids // J. of Fluid Mechanics. 1999. Vol. 387. P. 271–280.
6. Ferrás L.L., Nóbrega J.M., Pinho F.T. Analytical solutions for channel flow of Phan-Thien–Tanner and Giesekus fluids under slip // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. Vol. 171 P. 97–105.
7. Cruz D.O.A., Pinho F.T., Oliveira P.J. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2005. Vol. 132. P. 28–35.
8. Tanner R.I., Nasser S. Simple constitutive models for linear and branched polymers // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2003. Vol. 116. P. 1–17.
9. Brondani W.M., Coradin H.T., Franco A.T. Numerical study of a PTT viscoelastic fluid flow through a concentric annular // 19th Intern. Congress of Mechanical Engng, November 5–9, 2007, Brasilia. DF. 10 p.
10. Bogaerds A. Stability analysis of viscoelastic flow. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2002. 131 p.
11. Oliveira P.J. Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2003. Vol. 114. P. 33–63.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.,
 после переработки — 11 апреля 2014 г.