

УДК 539.3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОПЛАСТИН

С. А. Калоеров, Е. С. Глушанков

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк, Украина

E-mails: kaloerov@mail.ru, evgenij.glushankov@gmail.com

Предложен метод исследования термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной кусочно-однородной пьезопластины при воздействии линейного теплового потока. Решение задачи с использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера. Для случая пластины с одним включением получено точное аналитическое решение задачи. Приведены результаты численных исследований, позволивших установить влияние электрических и магнитных свойств материалов пластины и включений и их расположения на основные характеристики термоэлектромагнитоупругого состояния.

**Ключевые слова:** линейный тепловой поток, пьезопластина, включения, температурные напряжения, напряженности и индукции электромагнитного поля, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.15372/PMTF20180609

В современной промышленности в качестве элементов конструкций широко используются пластины из пьезоматериалов [1]. Под действием механических сил, электромагнитных и тепловых полей в таких элементах возникают высокие концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому актуальной задачей является разработка методов определения напряженно-деформированного и предельно-равновесного состояний упругих тел из пьезоматериалов. В настоящее время решены задачи о телах, на которые действуют механические силы, электромагнитные поля, а также разность температур на границе тела [2–5]. При решении задач о пластинах применялись различные методы. В случае использования комплексных потенциалов исходные уравнения удовлетворяются тождественно, поэтому при решении задач необходимо обеспечить выполнение лишь граничных условий. Если пластина занимает односвязную область, ограниченную эллиптическим (круговым) контуром, то граничные условия выполняются при использовании метода рядов, что позволяет получить точное аналитическое решение. В случае многосвязных областей применение метода рядов приводит к большому объему вычислений и не обеспечивает удовлетворительную точность выполнения граничных условий, а в случае пересекающихся контуров этот метод неприменим. При решении таких задач с помощью комплексных потенциалов сначала использовался дискретный метод наименьших квадратов [6–8]: составлялся функционал

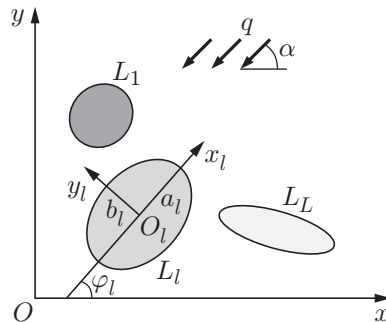


Рис. 1. Схема задачи для многосвязной области

невязок и находился его минимум, что приводило к системе линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем Вронского для определения неизвестных коэффициентов рядов Лорана и коэффициентов в разложении по полиномам Фабера. В работе [9] для упрощения вычислений был применен обобщенный метод наименьших квадратов [10, 11], в котором граничные условия удовлетворяются для достаточно большого набора точек коллокации (значительно большего, чем при использовании обычного метода коллокации). При этом для определения неизвестных коэффициентов рядов используется переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом сингулярных разложений матриц [11–13].

Существуют также другие методы решения краевых задач, в частности численные методы, в которых приближенно удовлетворяются и уравнения, и граничные условия (методы конечных разностей, конечных элементов, развиваемый в последние годы метод коллокаций и наименьших квадратов [14, 15] и др.).

В данной работе предложен метод решения задачи термоэлектромагнитоупругости в случае кусочно-однородной пьезопластины с включениями при воздействии линейного потока тепла. Для пластины с одним включением методом рядов получено точное аналитическое решение, для пластины с множеством включений с использованием обобщенного метода наименьших квадратов задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты численных исследований.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим расположенную в плоскости  $(x, y)$  бесконечную пластину из пьезоматериала, занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ) (рис. 1), в которые вставлены включения из других материалов, занимающие области  $S^{(l)}$  и находящиеся в условиях идеального теплового и электромагнитоупругого контактов с пластиной. При этом в локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах отверстий  $L_l$  и осями, направленными вдоль осей эллипсов, параметрические уравнения эллипсов имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

в основной системе  $Oxy$  — вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\varphi_l$  — угол между осями  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}, y_{0l}$  — координаты начал локальных систем координат  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  — параметр, изменяющийся в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Пластина находится под действием теплового потока с плотностью  $q$ , направленного под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  таким образом, что в сплошной пластине потоки тепла на основных площадках равны

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha,$$

а на произвольной площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  —

$$q_n^* = q_x^* \cos nx + q_y^* \cos ny,$$

на бесконечности напряжения, компоненты векторов индукции электрического и магнитного полей равны нулю ( $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$ ).

При использовании метода суперпозиции и комплексных потенциалов решение несвязанной задачи о термоэлектромагнитоупругом состоянии (ТЭМУС) пластины сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$  и комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для пластины и потенциалов  $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$  и  $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) для каждого включения из соответствующих граничных условий. Если эти функции определены, то основные характеристики ТЭМУС (температура  $T$ , плотности потоков тепла, напряжения  $\sigma$ ,  $\tau$ , индукции  $D$ ,  $B$  и напряженности  $E$ ,  $H$  поля, перемещения  $u$ ,  $v$  и потенциалы  $\varphi$ ,  $\psi$  поля) в пластине вычисляются по формулам [8, 16, 17]

$$T(x, y) = T^*(x, y) + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}; \lambda_{2k}; \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k),$$

$$(D_x; D_y; B_x; B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}; \lambda_{8k}; \lambda_{9k}; \lambda_{10k}) \Phi_k'(z_k);$$

$$(E_x; E_y; H_x; H_y) = (E_x^*; E_y^*; H_x^*; H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0; \mu_k r_k^0; h_k^0; \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (2)$$

$$(u; v; \varphi; \psi) = (u^*; v^*; \varphi^*; \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k; q_k; r_k^0; h_k^0) \Phi_k(z_k),$$

где  $\mu_5, \mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — корни характеристических уравнений теплопроводности и электромагнитоупругости соответственно,

$$\begin{aligned} k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} &= 0; \\ \Delta(\mu) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - \\ - l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)], \end{aligned}$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}, \quad T^*(x, y) = (t_x x + t_y y)q,$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2},$$

$$\varkappa_T = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}, \quad \lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k,$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{8k} &= -\nu_k, & \lambda_{9k} &= \rho_k \mu_k, & \lambda_{10k} &= -\rho_k, \\
 \nu_k &= \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} & (k = \overline{1, 4}), & & \nu_5 &= \frac{r_\chi}{r_5}, \\
 \rho_k &= \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k) l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} & (k = \overline{1, 4}), & & \rho_5 &= \frac{r_\omega}{r_5}, \\
 r_5 &= \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, & r_\chi &= \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, & r_\omega &= \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \\
 l_5(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, & & l_\chi(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \\
 l_\omega(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix}, \\
 l_{2\alpha}(\mu_5) &= -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2, & l_{1t}(\mu_5) &= t_1^\sigma \mu_5 - t_2^\sigma, & l_{1m}(\mu_5) &= m_1^\sigma \mu_5 - m_2^\sigma, \\
 r_k^0 &= g_{11} \mu_k^2 - g_{16} \mu_k + g_{12} - (\beta_{11} \mu_k - \beta_{12}) \nu_k - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \rho_k + \delta_k^5 t_1^\sigma / r_5, \\
 h_k^0 &= p_{11} \mu_k^2 - p_{16} \mu_k + p_{12} - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \nu_k - (\chi_{11} \mu_k - \chi_{12}) \rho_k + \delta_k^5 m_1^\sigma / r_5, \\
 p_k &= s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} + (g_{11} \mu_k - g_{21}) \nu_k + (p_{11} \mu_k - p_{21}) \rho_k + \delta_k^5 \alpha_1 / r_5, \\
 q_k &= s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left( g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k + \left( p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2}{r_5 \mu_5}, \\
 (E_x^*; E_y^*; H_x^*; H_y^*) &= (t_1^\sigma; t_2^\sigma; m_1^\sigma; m_2^\sigma) T^*(x, y), \\
 u^*(x, y) &= \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y - \omega_3 y + u_0, \\
 v^*(x, y) &= \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y + \omega_3 x + v_0, \\
 \varphi^*(x, y) &= -\frac{t_1^\sigma q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2^\sigma q t_y}{2} y^2 - t_1^\sigma q t_x x y + \varphi_0, \\
 \psi^*(x, y) &= -\frac{m_1^\sigma q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2^\sigma q t_y}{2} y^2 - m_1^\sigma q t_x x y + \psi_0; \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5, \tag{4}
 \end{aligned}$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластины;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре;  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре;  $\beta_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля;  $t_i^\sigma$ ,  $m_i^\sigma$  — пирозлектрические и пиромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;  $\delta_j^i$  — символ Кронекера;  $-\omega_3 y + u_0$ ,  $\omega_3 x + v_0$  — жесткие перемещения,

возникающие в сплошной пластине под действием потока тепла;  $\omega_3$  — угол поворота плоскости  $Oxy$  против часовой стрелки;  $u_0, v_0$  — компоненты поступательного перемещения (эти величины можно принять равными нулю);  $\varphi_0, \psi_0$  — потенциалы электрического и магнитного полей на нулевом уровне.

Аналогичные формулы могут быть получены для каждого включения  $S^{(l)}$  ( $l = \overline{1, L}$ ), если в приведенных выше формулах соответствующие величины заменить на величины с индексами “ $(l)$ ”.

На контурах контактов пластины и включений граничные условия для задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости в векторном виде записываются следующим образом [8, 16, 17]:

$$2 \operatorname{Re} [(1; i\chi_T)F_5(t_5) - (1; i\chi_T^{(l)})F_5^{(l)}(t_5^{(l)})] = \left( -T^*(t); \int_0^s q_n^*(t) ds + c \right); \quad (5)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 [(\lambda_{6k}; \lambda_{2k}; \lambda_{8k}; \lambda_{10k}; p_k; q_k; r_k^0; h_k^0)\Phi_k(z_k) - (\lambda_{6k}^{(l)}; \lambda_{2k}^{(l)}; \lambda_{8k}^{(l)}; \lambda_{10k}^{(l)}; p_k^{(l)}; q_k^{(l)}; r_k^{0(l)}; h_k^{0(l)})\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})] = (c_{11}; c_{12}; c_{13}; c_{14}; -u^*; -v^*; -\varphi^*; -\psi^*). \quad (6)$$

Комплексные потенциалы для пластины  $F_5(z_5)$  и  $\Phi_k(z_k)$  определены в многосвязных областях  $S_5$  и  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями [8]

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k = \overline{1, 5}) \quad (7)$$

и ограниченных контурами  $L_{5l}$  и  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  при этих преобразованиях.

В случае многосвязной области комплексный потенциал  $F_5(z_5)$  для задачи теплопроводности имеет вид [7]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^L D_l \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}(z_5), \quad (8)$$

где  $c_5$  — вещественная константа, определяемая из условий на контурах отверстий;  $D_l = -q_l/(4\pi\chi_T)$ ;  $q_l$  — суммарный поток тепла через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $F_{50}(z_5)$  — функция, голоморфная в многосвязной области  $S_5$ , ограниченной контурами  $L_{5l}$ . При этом из условий ограниченности функции  $F_5(z_5)$  на бесконечности следует

$$\sum_{l=1}^L D_l = 0.$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 5}$ ) для задачи термоэлектромагнитоупругости имеют вид [8]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k),$$

где  $\Gamma_k, A_{kl}, B_{kl}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1; \mu_k; \mu_k^2; q_k - \mu_k p_k; \nu_k; \mu_k \nu_k; \rho_k; \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0),$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1; \mu_k; p_k; q_k; \nu_k; \rho_k; r_k^0; h_k^0) i A_{kl} &= (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0); \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1; \mu_k; p_k; q_k; \nu_k; \rho_k; r_k^0; h_k^0) i B_{kl} &= (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0); \\
\Gamma_5 &= r_5 c_5, \quad A_{5l} = r_5 D_l, \quad B_{5l} = r_5 (b_{5l} - z_{5l} D_l),
\end{aligned} \tag{9}$$

$b_{5l}$  — вычет функции  $F_{50}(z_5)$  в точке  $z_{5l}$ ;  $\Phi_{k0}(z_k)$  — функции, голоморфные в многосвязных областях  $S_k$ . Для построения этих функций, а также функции  $F_{50}(z_5)$  используем методы конформных отображений.

Отобразим конформно внешность единичного круга  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$  [6, 8]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \quad R_{kl} = (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l))/2, \\
m_{kl} &= (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l))/(2R_{kl}).
\end{aligned}$$

Функции  $F_{50}(z_5)$  и  $\Phi_{k0}(z_k)$ , голоморфные вне контуров отверстий  $L_{kl}$  областей  $S_k$  в областях переменных  $\zeta_{kl}$ , являются голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$ , в том числе в бесконечно удаленной точке, поскольку их можно разложить в ряды Лорана вида [8]

$$F_{50}(z_5) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n}, \quad \Phi_{k0}(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \tag{10}$$

где  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  — постоянные. Таким образом, комплексные потенциалы для пластины принимают вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^L D_l \ln(z_5 - z_{5l}) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n}; \tag{11}$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \tag{12}$$

Для каждого включения комплексные потенциалы  $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$  и  $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  определены в многосвязных областях  $S_k^{(l)}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \tag{13}$$

где  $\mu_k^{(l)}$  — корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (3) путем замены в нем постоянных материала пластины на постоянные материала соответствующего включения.

Учитывая, что включения являются конечными односвязными областями, и представляя голоморфные в этих областях функции в виде рядов по полиномам Фабера, комплексные потенциалы для включений находим в виде

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{5n}^{(l)} P_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)}); \tag{14}$$

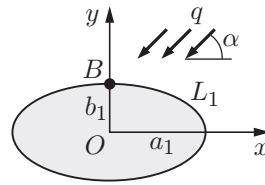


Рис. 2. Схема задачи для пластины с одним включением

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}), \quad (15)$$

где  $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  — полиномы Фабера для эллипсов  $L_k^{(l)}$ , получаемых из эллипса  $L_k^{(l)}$  аффинными преобразованиями (13);  $a_{kn}^{(l)}$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

**2. Точное решение задачи для пластины с одним включением.** Пусть в пластине имеется одно эллиптическое включение с контуром  $L_1$  и полуосями  $a_1, b_1$  (рис. 2), на бесконечности под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  действует линейный поток тепла с плотностью  $q$ .

В данном случае  $L = 1, \varphi_1 = x_{01} = y_{01} = 0$ , поэтому для получения точного аналитического решения задачи, удовлетворяющего граничным условиям, будем использовать метод рядов. С этой целью полиномы Фабера для эллипса  $L_k^{(1)}$  представим в виде [9, 18]

$$P_{kn}^{(1)}(z_k^{(1)}) = (\zeta_k^{(1)})^n + (m_k^{(1)})^n / (\zeta_k^{(1)})^n,$$

где  $\zeta_k^{(1)}$  — переменные, вычисляемые из конформных отображений

$$z_k^{(1)} = R_k^{(1)}(\zeta_k^{(1)} + m_k^{(1)}/\zeta_k^{(1)})$$

внешности единичного круга  $|\zeta_k^{(1)}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_k^{(1)}$ ,

$$R_k^{(1)} = (a_l - i\mu_k^{(1)}b_l)/2, \quad m_{kl} = (a_l + i\mu_k^{(1)}b_l)/(2R_k^{(1)}).$$

Тогда комплексные потенциалы для задачи теплопроводности (11), (14) принимают вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}, \quad F_5^{(1)}(z_5^{(1)}) = c_{50}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(1)} \left( (\zeta_5^{(1)})^n + \frac{(m_5^{(1)})^n}{(\zeta_5^{(1)})^n} \right). \quad (16)$$

На контуре включения  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} = \sigma$ , т. е.

$$x = \frac{a}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = -\frac{ib}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad \zeta_{k1} = \zeta_k^{(1)} = \sigma. \quad (17)$$

Поэтому, подставляя функцию (16) в граничные условия (5) и применяя метод рядов, находим  $c_5 = c_{50}^{(1)} = c_{51n} = c_{5n}^{(1)} = 0$  ( $n \geq 2$ ), а для  $c_{511}$  и  $c_{51}^{(1)}$  получаем систему двух линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{511} - c_{51}^{(1)} m_5^{(1)} - \bar{c}_{51}^{(1)} = -s_1, \quad \varkappa_T c_{511} - \varkappa_T^{(1)} c_{51}^{(1)} m_5^{(1)} + \varkappa_T^{(1)} \bar{c}_{51}^{(1)} = i\bar{s}_2,$$

где

$$s_1 = q(t_x a_1 + i t_y b_1)/2, \quad s_2 = q(a_1 \sin \alpha + i b_1 \cos \alpha)/2.$$

Зная постоянные  $c_{511}$  и  $c_{51}^{(1)}$ , для функций  $F_5(z_5), F_5^{(1)}(z_5^{(1)})$  получаем выражения

$$F_5(z_5) = c_{511}/\zeta_{51}, \quad F_5^{(1)}(z_5^{(1)}) = c_{51}^{(1)} z_5^{(1)}/R_5^{(1)}. \quad (18)$$

Тогда на основе (4) находим

$$\begin{aligned} \Phi_5(z_5) &= B_{51} \ln \zeta_{51} + a_{512}/\zeta_{51}^2, & \Phi_5^{(1)}(z_5^{(1)}) &= a_{50}^{(1)} + a_{52}^{(1)}(z_5^{(1)}/R_5^{(1)})^2, \\ B_{51} &= r_5 R_{51} c_{511}, & a_{512} &= r_5 R_{51} m_{51} c_{511}/2, & a_{52}^{(1)} &= r_5^{(1)} R_5^{(1)} c_{51}^{(1)}/2. \end{aligned} \quad (19)$$

С использованием выражений (19) комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \\ \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) &= a_{k0}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(1)} \left[ (\zeta_k^{(1)})^n + \frac{(m_k^{(1)})^n}{(\zeta_k^{(1)})^n} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $B_{k1}$  — постоянные, вычисляемые из решения системы уравнений (9).

Подставляя функции (20) в граничные условия (6) с учетом выражений (17) и применяя метод рядов, находим  $a_{k0}^{(1)} = a_{k1n} = a_{kn}^{(1)} = 0$  ( $n \neq 2$ ), а для определения  $a_{k12}$  и  $a_{k2}^{(1)}$  получаем систему восьми линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^4 [(\lambda_{6k}; \lambda_{2k}; \lambda_{8k}; \lambda_{10k}; p_k; q_k; r_k^0; h_k^0) a_{k12} - \\ &\quad - (\lambda_{6k}^{(1)}; \lambda_{2k}^{(1)}; \lambda_{8k}^{(1)}; \lambda_{10k}^{(1)}; p_k^{(1)}; q_k^{(1)}; r_k^{0(1)}; h_k^{0(1)}) a_{k2}^{(1)} (m_k^{(1)})^2 - \\ &\quad - (\bar{\lambda}_{6k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{2k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{8k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{10k}^{(1)}; \bar{p}_k^{(1)}; \bar{q}_k^{(1)}; \bar{r}_k^{0(1)}; \bar{h}_k^{0(1)}) \bar{a}_{k2}^{(1)}] = \\ &\quad = -(\lambda_{65}; \lambda_{25}; \lambda_{85}; \lambda_{105}; p_5; q_5; r_5^0; h_5^0) a_{512} + \\ &\quad + (\lambda_{65}^{(1)}; \lambda_{25}^{(1)}; \lambda_{85}^{(1)}; \lambda_{105}^{(1)}; p_5^{(1)}; q_5^{(1)}; r_5^{0(1)}; h_5^{0(1)}) a_{52}^{(1)} (m_5^{(1)})^2 + \\ &\quad + (\bar{\lambda}_{65}^{(1)}; \bar{\lambda}_{25}^{(1)}; \bar{\lambda}_{85}^{(1)}; \bar{\lambda}_{105}^{(1)}; \bar{p}_5^{(1)}; \bar{q}_5^{(1)}; \bar{r}_5^{0(1)}; \bar{h}_5^{0(1)}) \bar{a}_{52}^{(1)} - \\ &\quad - (0; 0; 0; 0; e_1; e_2; e_3; e_4), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= q(\alpha_1 a_1^2 t_x + \alpha_2 b_1^2 t_x - \alpha_6 b_1^2 t_y + 2\alpha_1 a_1 b_1 t_x i)/8, \\ e_2 &= q(-\alpha_1 a_1^2 t_y + \alpha_6 a_1^2 t_x - \alpha_2 b_1^2 t_y + 2\alpha_2 a_1 b_1 t_x i)/8, \\ e_3 &= q(t_1^\sigma a_1^2 t_x - t_2^\sigma b_1^2 t_y + 2t_1^\sigma a_1 b_1 t_x i)/8, \\ e_4 &= q(m_1^\sigma a_1^2 t_x - m_2^\sigma b_1^2 t_y + 2m_1^\sigma a_1 b_1 t_x i)/8. \end{aligned}$$

Тогда функции (20) принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_{k1} + a_{k12}/\zeta_{k1}^2, \quad \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = a_{k2}^{(1)}(z_k^{(1)}/R_k^{(1)})^2. \quad (21)$$

Зная функции (18), (21), по формулам (1), (2) находим значения основных характеристик ТЭМУС в любых точках пластины и ядра. Из (2), (21) следует, что все эти характеристики в ядре являются линейными функциями комплексных переменных  $z_k^{(1)}$ , а следовательно, и  $x$ ,  $y$ .

**3. Решение задачи для многосвязной пластины.** Пусть в пластине имеется  $L$  разнородных произвольно расположенных эллиптических включений. Тогда комплексные



потенциалы для пластины имеют вид (11), (12), а для каждого ядра эти функции, разложенные в ряды по полиномам Фабера (14), (15), можно представить в виде степенных рядов [9, 18]

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)} - z_{5l}^{(l)})^n; \quad (22)$$

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)})^n, \quad (23)$$

где  $z_{kl}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l}$ ;  $c_{5n}^{(l)}$ ,  $a_{kn}^{(l)}$  ( $l = \overline{1, L}$ ) — неизвестные коэффициенты.

Неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $c_{5n}^{(l)}$ ,  $a_{kln}$ ,  $a_{kn}^{(l)}$ , входящие в функции (11), (14), (22), (23), определим из граничных условий (5), (6) на контурах контактов пластины с каждым включением  $S^{(l)}$ , причем условия (6) в данном случае целесообразно использовать в дифференциальной форме. Дифференцируя их по дуге контура, находим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 [q_{ki} \delta_{k,s} \Phi_k'(z_k) + q_{ki}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})] = \\ = -2 \operatorname{Re} [q_{5i} \delta_{5,s} \Phi_5'(z_5) + q_{5i}^{(l)} \delta_{5,s}^{(l)} \Phi_5^{(l)}(z_5^{(l)})] + \frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} \quad (i = \overline{1, 8}). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\delta_{k,s} = dz_k/ds$ ;  $q_{k1} = 1$ ;  $q_{k2} = \mu_k$ ;  $q_{k3} = p_k$ ;  $q_{k4} = q_k$ ;  $q_{k5} = \nu_k$ ;  $q_{k6} = \rho_k$ ;  $q_{k7} = r_k^0$ ;  $q_{k8} = h_k^0$ ;  $q_{ki}^{(l)}$  — величины, вычисляемые по формулам для  $q_{ki}$ , в которых соответствующие величины заменены на величины с индексом “(l)”,

$$\Phi_k'(z_k) = N_k'(z_k) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}'(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}); \quad (25)$$

$$N_k'(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \left( A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right),$$

$$\varphi_{kln}'(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \varphi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = n(z_k^{(l)} - z_{kl}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, L}),$$

$$\frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{df_{j5}(t_{jm})}{ds} = -\frac{du^*}{ds}, \quad \frac{df_{j6}(t_{jm})}{ds} = -\frac{dv^*}{ds},$$

$$\frac{df_{j7}(t_{jm})}{ds} = -\frac{d\varphi^*}{ds}, \quad \frac{df_{j8}(t_{jm})}{ds} = -\frac{d\psi^*}{ds}.$$

Для того чтобы обеспечить выполнение граничных условий (5), (24), используем обобщенный метод наименьших квадратов. Для этого выберем на каждом контуре области  $L_j$  набор точек  $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$  ( $j = \overline{1, L}$ ,  $m = \overline{1, M_j}$ ) и подставим функции (8), (22), (25) в граничные условия. Тогда для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $c_{5n}^{(l)}$ ,  $a_{kln}$ ,  $a_{kn}^{(l)}$  получаем следующие две системы линейных алгебраических уравнений:

$$(2; 0)c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^L (1; i z_{\Gamma}) w_{5l}(t_{5jm}) D_l +$$

Таблица 1

## Постоянные материалов

Величина	Материал			Величина	Материал		
	М1	М2	М3		М1	М2	М3
$s_{11}/s_0$	7,165	22,260	10,745	$\beta_{22}/\beta_0$	0,137	10,612	0,090
$s_{22}/s_0$	6,797	14,984	7,398	$\nu_{11}/\nu_0$	-0,190	213,404	-14,931
$s_{66}/s_0$	19,912	47,481	7,637	$\nu_{22}/\nu_0$	-0,185	-5,534	-3,740
$s_{12}/s_0$	-2,337	-6,437	-2,542	$\chi_{11}/\chi_0$	0,336	0,590	0,805
$g_{16}/g_0$	2,028	109,220	2,054	$\chi_{22}/\chi_0$	0,119	0,575	0,704
$g_{21}/g_0$	-0,496	-4,333	-1,159	$\alpha_1/\alpha_0$	8,530	-3,031	-1,578
$g_{22}/g_0$	1,157	8,016	2,458	$\alpha_2/\alpha_0$	1,990	-0,608	-0,326
$p_{16}/p_0$	1,850	268,318	98,843	$t_2^g/t_0$	133,000	-40,853	2,405
$p_{21}/p_0$	0,576	17,778	12,102	$m_2^g/m_0$	133,000	0,394	0,207
$p_{22}/p_0$	1,186	31,206	22,268	$k_{11}/k_0$	2,500	9,000	1,200
$\beta_{11}/\beta_0$	0,156	19,612	0,106	$k_{22}/k_0$	2,500	9,000	1,500

$$\begin{aligned}
& + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} (1; i\mathcal{Z}_T) \varphi_{5ln}(t_{5jm}) c_{5ln} - 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1; i\mathcal{Z}_T^{(j)}) \varphi_{5n}^{(j)}(t_{5jm}^{(j)}) c_{5n}^{(j)} = \\
& = \left( -T^*(t); \int_0^s q_n^*(t) ds + c \right) \quad (j = \overline{1, L}; m = \overline{1, M_j}); \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} q_{ki} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kjm}) a_{kln} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} q_{ki}^{(j)} \delta_{k,s}^{(j)} \varphi'_{kjn}(t_{kjm}^{(j)}) a_{kn}^{(j)} = \\
& = \frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} - 2 \operatorname{Re}(q_{5i} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5jm}) + q_{5i}^{(j)} \delta_{5,s}^{(j)} r_5^{(j)} F_5^{(j)}(t_{5jm}^{(j)})) - \\
& - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_{ki} \delta_{k,s} N'_k(t_{kjm}) \quad (j = \overline{1, L}; m = \overline{1, M_j}; i = \overline{1, 8}). \quad (27)
\end{aligned}$$

Здесь  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\varphi_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)}) = (z_5^{(l)} - z_{5l}^{(l)})^n$ .

Системы (26), (27) будем решать с использованием сингулярных разложений [10–13]. После нахождения псевдорешений этих систем постоянные  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $c_{5n}^{(l)}$ ,  $a_{kln}$ ,  $a_{kn}^{(l)}$ , а следовательно, и функции  $F_5(z_5)$ ,  $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ ,  $\Phi_k(z_k)$ ,  $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  будут известны, и по ним можно вычислить основные характеристики ТЭМУС в любой точке пластины.

**4. Результаты численных исследований.** Проведены численные исследования для пластин, изготовленных из следующих материалов: 1) композит на основе титаната бария — феррита (II) кобальта  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  (материал М1) [19]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $\text{CdSe}$ , а пьезомагнитные и магнитные —  $\text{BaTiO}_3$  (материал М2) [20]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют материалу PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные —  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  (материал М3) [20]. Физико-механические постоянные этих материалов приведены в табл. 1. При этом нормирующие множители имеют следующие значения:  $s_0 = 10^{-6}$  МПа $^{-1}$ ,  $g_0 = 10^{-2}$  м $^2$ /МКл,  $p_0 = 10^{-5}$  МТл $^{-1}$ ,  $\beta_0 = 10^3$  МН $\cdot$ м $^2$ /МКл $^2$ ,  $\nu_0 = 10^{-1}$  МКл $\cdot$ м/МА,  $\chi_0 = 10^{-1}$  МПа/МТл $^2$ ,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  К $^{-1}$ ,  $t_0 = 10^{-3}$  МН/(МКл $\cdot$ К),  $m_0 = 10^{-3}$  МА/(м $\cdot$ МКл),  $k_0 = 1$  Вт/(м $\cdot$ К).

Главные направления материальной симметрии рассматриваемых материалов совпадают с направлениями осей координат. При этом, для того чтобы было выполнено условие потенциальности создаваемого потоком тепла электромагнитного поля [16]

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{k_{11} \operatorname{tg} \alpha - k_{12}}{k_{22} - k_{12} \operatorname{tg} \alpha},$$

поток направлялся под углом  $\alpha = \pi/2$  к оси  $Ox$ . Считалось, что включения изготовлены из тех же пьезоматериалов, что и пластины, с постоянными, связанными с постоянными пластины соотношениями

$$k_{ij}^{(l)} = \lambda_T^{(l)} k_{ij}, \quad s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}, \quad p_{ij}^{(l)} = \lambda_p^{(l)} p_{ij}, \quad \alpha_{ij}^{(l)} = \lambda_\alpha^{(l)} \alpha_{ij}$$

( $\lambda_T^{(l)}$ ,  $\lambda_s^{(l)}$ ,  $\lambda_p^{(l)}$ ,  $\lambda_\alpha^{(l)}$  — величины, которые будем называть параметрами относительной теплопроводности, деформируемости, пьезомагнетизма и тепловой расширяемости). Как показали расчеты, значения остальных параметров, зависящих от постоянных  $g_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $t_i^\sigma$ ,  $m_i^\sigma$  материалов включений, оказывают несущественное влияние на значения основных характеристик ТЭМУС, поэтому их можно принять равными единице. Ниже приведены результаты расчетов для пластин, изготовленных из материалов М1 и М3.

При проведении расчетов количество членов в рядах Лорана (10) и в разложениях по полиномам Фабера (22), (23) для каждого включения, а также количество точек коллокации  $M_{jm}$  на контурах отверстий  $L_j$ , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (26), (27), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не выполнялись с необходимой степенью точности. Из результатов расчетов следует, что для этого в рядах для каждой пластины и каждого включения необходимо сохранять от 30 до 40 членов и на каждом контуре выбирать от 100 до 400 точек коллокации.

В табл. 2 для пластины с одним круговым включением радиусом  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ) для различных значений параметров  $\lambda_T^{(1)}$ ,  $\lambda_s^{(1)}$ ,  $\lambda_p^{(1)}$ ,  $\lambda_\alpha^{(1)}$  приведены значения отношения напряжений  $\sigma_x$  к плотности потока тепла  $q$  в точке  $B$  (см. рис. 2) на линии контакта пластины с включением. Параметр  $\lambda_{\text{тек}}$  соответствует одному из параметров  $\lambda_T^{(1)}$ ,  $\lambda_s^{(1)}$ ,  $\lambda_p^{(1)}$ ,  $\lambda_\alpha^{(1)}$  и меняется в диапазоне от нуля до бесконечности. При этом значения трех остальных параметров фиксированы и равны 0,5, 2,0 либо 1,0. В скобках указаны значения напряжений для случая, когда не учитываются электромагнитные свойства материалов пластины и включения, т. е. когда решается задача термоупругости для пластины с круговым включением. На рис. 3 приведены зависимости отношения нормальных напряжений  $\sigma_s$  к  $q$  в пластине вблизи контура включения на площадках, перпендикулярных контуру, от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$ .

Из табл. 2, рис. 3 и других полученных результатов следует, что значения напряжений в пластине при учете свойств пьезоматериала значительно отличаются от соответствующих значений без учета этих свойств (в задаче термоупругости). При этом при учете свойств пьезоматериала значения напряжений (по модулю) в случае материала М1 существенно уменьшаются, в случае материала М3 незначительно увеличиваются. Следует отметить, что эти различия значительны и ими нельзя пренебрегать. Подкрепление отверстия упругим включением приводит к значительному уменьшению концентрации напряжений. При этом большое влияние оказывают параметры включения  $\lambda_T^{(1)}$ ,  $\lambda_s^{(1)}$ ,  $\lambda_p^{(1)}$ ,  $\lambda_\alpha^{(1)}$ . При увеличении значений этих параметров, особенно параметра относительной расширяемости  $\lambda_\alpha^{(1)}$  и параметра относительного пьезомагнетизма  $\lambda_p^{(1)}$ , происходит существенное изменение ТЭМУС.

В табл. 3 для пластины с двумя одинаковыми круговыми включениями радиусом  $a_1$  ( $b_1 = a_2 = b_2 = a_1$ ) (рис. 4) в зависимости от отношения расстояния  $c$  между контурами

Таблица 2

Значения  $\sigma_x/q$  в точке  $B$  на контуре включения

$\lambda_{\text{тек}}$	Остальные $(\lambda_i^{(1)})_{\text{тек}}$	Значения $\lambda_{\text{тек}}$ при постоянных значениях остальных $(\lambda_i^{(1)})_{\text{тек}}$								
		0	$10^{-2}$	$10^{-1}$	0,5	1	2	10	$10^2$	$\infty$
Материал М1										
$\lambda_T^{(1)}$	0,5	-0,188	-0,187	-0,176	-0,143	-0,120	-0,098	-0,065	-0,054	-0,052
	2,0	0,243	0,240	0,220	0,158	0,116	0,074	0,013	-0,007	-0,010
$\lambda_s^{(1)}$	0,5	-0,233 (-0,290)	-0,229 (-0,288)	-0,203 (-0,272)	-0,143 (-0,235)	-0,114 (-0,215)	-0,093 (-0,196)	-0,077 (-0,169)	-0,076 (-0,160)	-0,076 (-0,159)
	2,0	0,269 (0,290)	0,263 (0,288)	0,224 (0,272)	0,137 (0,235)	0,098 (0,215)	0,074 (0,196)	0,068 (0,169)	0,075 (0,160)	0,076 (0,159)
$\lambda_p^{(1)}$	0,5	-0,145	-0,145	-0,145	-0,143	-0,141	-0,137	-0,117	-0,199	-0,240
	2,0	0,100	0,100	0,098	0,093	0,087	0,074	-0,016	-0,013	0,159
$\lambda_\alpha^{(1)}$	0,5	-0,303	-0,300	-0,271	-0,143	0,017	0,338	2,903	31,757	—
	1,0	-0,175	-0,174	-0,158	-0,088	0,000	0,175	1,579	17,364	—
	2,0	-0,081	-0,080	-0,073	-0,042	-0,003	0,074	0,695	7,675	—
Материал М3										
$\lambda_T^{(1)}$	0,5	0,131	0,129	0,111	0,059	0,025	-0,008	-0,054	-0,068	-0,070
	2,0	0,055	0,053	0,039	-0,000	-0,026	-0,051	-0,086	-0,097	-0,098
$\lambda_s^{(1)}$	0,5	0,068 (0,058)	0,067 (0,057)	0,065 (0,052)	0,059 (0,043)	0,055 (0,040)	0,051 (0,037)	0,043 (0,035)	0,038 (0,034)	0,037 (0,034)
	2,0	-0,063 (-0,056)	-0,063 (-0,055)	-0,062 (-0,050)	-0,058 (-0,042)	-0,055 (-0,039)	-0,051 (-0,036)	-0,043 (-0,033)	-0,037 (-0,033)	-0,036 (-0,032)
$\lambda_p^{(1)}$	0,5	0,058	0,058	0,058	0,059	0,060	0,060	0,057	0,054	0,054
	2,0	-0,048	-0,048	-0,049	-0,050	-0,050	-0,051	-0,048	-0,044	-0,043
$\lambda_\alpha^{(1)}$	0,5	0,093	0,092	0,086	0,059	0,025	-0,043	-0,585	-6,689	—
	1,0	0,037	0,037	0,033	0,018	0,000	-0,037	-0,332	-3,651	—
	2,0	-0,017	-0,017	-0,019	-0,025	-0,034	-0,051	-0,188	-1,731	—

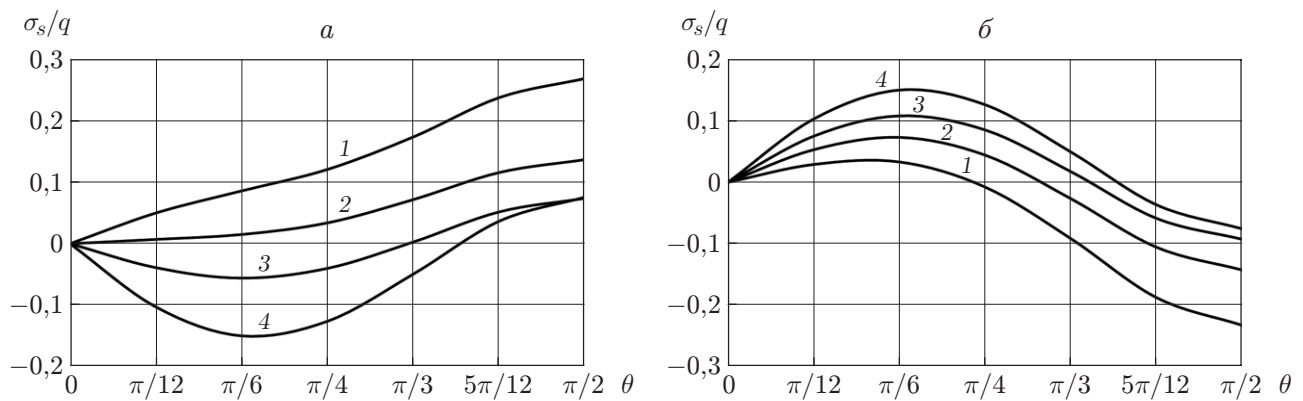


Рис. 3. Зависимости величины  $\sigma_s/q$  в пластине вблизи контура включения от угла  $\theta$  при  $\lambda_T^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 0,5$  (а),  $\lambda_T^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 2,0$  (б) и различных значениях параметра  $\lambda_s^{(1)}$ :  
 1 —  $\lambda_s^{(1)} = 0$ , 2 —  $\lambda_s^{(1)} = 0,5$ , 3 —  $\lambda_s^{(1)} = 2,0$ , 4 —  $\lambda_s^{(1)} = \infty$

Таблица 3

Значения  $\sigma_s/q$  в точках кругового включения

$\theta$ , рад	$\lambda_{\text{тек}}$	$c/a_1$					
		0,01	0,1	1	10	100	$\infty$
$\lambda_{\text{тек}} = \lambda_s^{(1)}$							
$\pi/6$	0	0,128	0,130	0,132	0,103	0,088	0,086
	$10^{-1}$	0,114	0,112	0,111	0,080	0,067	0,065
	1	0,004	0,004	0,004	-0,010	-0,018	-0,019
	$10^1$	-0,153	-0,153	-0,146	-0,124	-0,120	-0,120
	$\infty$	-0,205	-0,204	-0,194	-0,160	-0,151	-0,150
$\pi/2$	0	0,249	0,247	0,267	0,268	0,269	0,269
	$10^{-1}$	0,206	0,204	0,233	0,225	0,224	0,224
	1	0,104	0,106	0,118	0,103	0,098	0,098
	$10^1$	0,110	0,109	0,112	0,077	0,068	0,068
	$\infty$	0,128	0,128	0,127	0,086	0,076	0,076
$\lambda_{\text{тек}} = \lambda_p^{(1)}$							
$\pi/6$	0	-0,164	-0,163	-0,159	-0,136	-0,127	-0,125
	$10^{-1}$	-0,158	-0,158	-0,153	-0,132	-0,123	-0,122
	1	-0,107	-0,106	-0,103	-0,094	-0,091	-0,091
	$10^1$	0,377	0,377	0,365	0,267	0,211	0,203
	$\infty$	-0,121	-0,160	-0,106	-0,114	-0,118	-0,119
$\pi/2$	0	0,130	0,131	0,133	0,106	0,100	0,100
	$10^{-1}$	0,130	0,130	0,132	0,105	0,098	0,098
	1	0,112	0,113	0,118	0,093	0,087	0,087
	$10^1$	-0,044	-0,038	-0,003	-0,008	-0,016	-0,016
	$\infty$	0,176	0,180	0,174	0,161	0,159	0,159

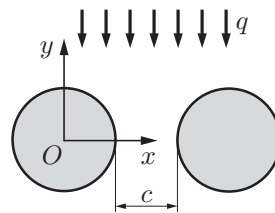


Рис. 4. Схема задачи для пластины с двумя включениями

включений к радиусу включений  $a_1$  и текущего относительного параметра  $\lambda_{\text{тек}}$  приведены значения  $\sigma_s/q$  в двух точках пластины на контуре левого отверстия, соответствующих значениям центрального угла  $\theta$  ( $\theta = \pi/6, \pi/2$ ), отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки. При этом в качестве изменяемого параметра  $\lambda_{\text{тек}}$  принимался параметр  $\lambda_s^{(1)}$  или  $\lambda_p^{(1)}$ , остальные параметры принимались равными двум. Значения напряжений при  $c/a_1 = \infty$  соответствуют случаю пластины с одним включением. Из табл. 3 и других полученных результатов следует, что с уменьшением расстояния между контурами значения напряжений вблизи включений и в области между ними уменьшаются. При  $c/a_1 > 2$  влияние одного включения на ТЭМУС вблизи другого включения незначительно и им можно пренебречь.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–326.
2. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. М.: Наука, 1968.
3. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
4. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991.
5. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988.
6. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А. С. К., 1998. С. 8–26.
7. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикл. механика. 2005. Вып. 40. С. 102–116.
8. Калоеров С. А., Сорочан О. А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред // Прикл. механика. 2009. Т. 45, № 4. С. 81–91.
9. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки. 2006. Вип. 2. С. 77–88.
10. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980.
12. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29, N 4. P. 1322–1342.
13. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29, N 4. P. 1343–1362.
14. Исаев В. И., Шапеев В. П. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 41–60.
15. Shapeev V. Collocation and least residuals method and its applications // EPJ Web Conf. 2016. V. 108. P. 01009-p.1–01009-p.12.
16. Калоеров С. А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2016. № 4. С. 19–34.
17. Калоеров С. А., Глушанков Е. С. Действие линейного потока тепла в пьезопластинах // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2017. № 1. С. 12–25.
18. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. Донецк: Изд-во Донец. нац. ун-та, 2013.
19. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. A. 2004. V. 23. P. 599–614.
20. Hou P.-F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Materials. 2009. V. 41, N 3. P. 329–338.