

## О НЕСИММЕТРИЧНОМ УДАРЕ ВЕРШИНОЙ ВОЛНЫ ПО УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

А. А. Коробкин, Т. И. Хабахпашева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках подхода Вагнера с помощью метода нормальных мод исследована задача об ударе волной по краю упругой пластины, расположенной горизонтально. Пластина моделируется балкой Эйлера с шарнирно закрепленными концами. Жидкость полагается идеальной и несжимаемой. Задача является связанной: упругие и гидродинамические характеристики процесса удара, а также размер области контакта определяются одновременно. Предложен алгоритм, позволивший провести детальное исследование поведения пластины при ударе. Для достаточно длинных пластин обнаружено явление усиления гидродинамических нагрузок за счет упругих деформаций (явление блокировки).

**Введение.** Рассматривается плоская нестационарная задача о вертикальном ударе вершиной волны по краю упругой пластины, расположенной горизонтально. В одномерном приближении решение задачи приведено в [1]. Для достаточно длинных пластин обнаружено явление усиления гидродинамических нагрузок на пластину за счет ее упругих деформаций. Это явление, называемое в дальнейшем блокировкой, представляет несомненный интерес в связи с его важностью для приложений. Для его подробного изучения необходимо провести расчеты по более полной модели, когда число мод свободных колебаний пластины, принимаемых во внимание, достаточно велико. Метод, описанный в [1], позволяет провести такие расчеты, но только с помощью современных быстродействующих компьютеров. В настоящей статье используется новый метод, который разработан для численного исследования центрального удара волной по пластине в [2] и основан на идеях работы [1]. Этот численный алгоритм позволяет проводить расчеты на персональном компьютере, что дает возможность детально исследовать роль упругих эффектов при ударе о воду.

При прочих равных условиях длительность удара в край пластины выше, чем длительность центрального удара [3]. Это приводит к тому, что взаимодействие пластины с жидкостью выражено более ярко при ударе в ее край, чем в центр. Некоторые явления, описанные ниже, не были обнаружены в случае центрального удара.

**Постановка задачи.** В начальный момент времени ( $t' = 0$ ) вершина волны касается края упругой пластины, который принимается за начало декартовой системы координат  $x'Oy'$  (рис. 1). Скорость жидких частиц равна  $V$  и направлена вверх по нормали к недеформированной поверхности пластины ( $y' = 0$ ,  $0 < x' < 2L$ ). Штрихом помечены размерные переменные. Длина волны предполагается намного больше размера пластины, поэтому профиль волны вблизи начала координат может быть аппроксимирован параболическим контуром  $y' = -x'^2/(2R)$ , где  $R$  — радиус кривизны в вершине волны. Для длинных волн  $R \gg L$ . При  $t' > 0$  происходит удар жидкостью по пластине. Ударная стадия заканчивается в момент времени  $T'_*$ , когда пластина окажется полностью смоченной.

Требуется определить упругие деформации пластины, распределение напряжений в ней, а также размер области контакта при тех же предположениях, что и в [2], за исключением симметрии течения. Кроме того, полагается, что размер смоченной части пластины

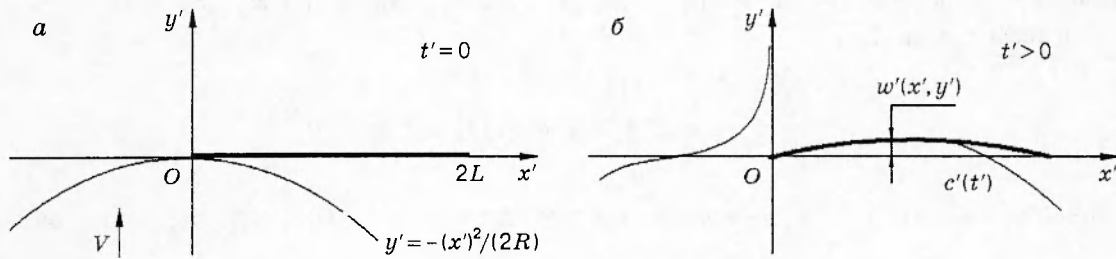


Рис. 1

описывается одной функцией  $c'(t')$ , которая заранее неизвестна и должна быть определена одновременно с расчетом течения жидкости и деформацией пластины в каждый момент времени, причем  $c'(0) = 0, c'(T'_*) = 2L$ . Это предположение означает, что жидкость прилегает к пластине в области контакта  $0 < x' < c'(t')$  независимо от величины давления в этой области, т. е. кавитационные явления не учитываются.

На начальной стадии соударения слабоискривленных поверхностей ( $\epsilon \ll 1$ ) уравнения, описывающие течение жидкости и деформацию упругого тела, а также граничные условия на свободной поверхности и в области контакта могут быть линеаризованы [2]. Помимо этого, граничные условия можно снести на линию  $y' = 0$ . Однако, несмотря на проведенную линеаризацию, задача остается нелинейной, так как требуется определить не только гидродинамические и упругие характеристики, но и размер области контакта.

Чтобы рассматривать задачу в безразмерных переменных, выберем масштабы изменения переменных такими же, как и в случае центрального удара [2]. При этом все безразмерные параметры в постановке задачи не превышают единицы. Обозначения безразмерных переменных отличаются отсутствием штриха.

Тогда постановка задачи имеет вид

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, 0, t) \quad (0 < x < 2, t > 0); \tag{1}$$

$$w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0, x = 2, t \geq 0), \quad w = w_t = 0 \quad (0 < x < 2, t = 0); \tag{2}$$

$$p = -\varphi_t \quad (y \leq 0); \tag{3}$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (y < 0); \tag{4}$$

$$\varphi = 0 \quad (y = 0, x < 0, x > c(t)), \quad \varphi_y = -1 + w_t(x, t) \quad (y = 0, 0 < x < c(t)); \tag{5}$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \tag{6}$$

Здесь  $p(x, y, t)$  — давление в жидкости; функция  $w(x, t)$  задает прогиб балки в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $\varphi(x, y, t)$  — потенциал скоростей. Интервал границы жидкости  $y = 0, 0 < x < c(t)$  соответствует области контакта, а полубесконечные интервалы  $y = 0, x < 0$  и  $y = 0, x > c(t)$  — свободной поверхности. Распределение изгибающих напряжений в балке  $\sigma(x, t)$  определяется по формуле  $\sigma(x, t) = zw_{xx}(x, t)/2$ , где переменная  $z$  меняется по толщине балки ( $z = -1$  соответствует нижней смоченной ее стороне, а  $z = +1$  — верхней стороне в местах наибольшей толщины). Безразмерные параметры  $\alpha$  и  $\beta$  (см. [2]) равны

$$\alpha = \frac{M_B}{\rho L}, \quad \beta = \frac{EJ}{\rho L(RV)^2}.$$

Ударная стадия заканчивается в момент  $T_*$ , когда  $c(T_*) = 2$ . Постановку задачи (1)–(6) необходимо дополнить уравнением для функции  $c(t)$ . Это уравнение следует из условия

ограниченности перемещений жидких частиц в окрестности движущейся точки контакта  $x = c(t)$  и имеет вид [1]

$$t = \frac{5}{16}c^2 + \frac{4}{\pi} \alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta w[c(t) \sin^2 \theta, t] d\theta. \quad (7)$$

Исследование задачи (1)–(7) основано на методе нормальных мод, подробно описанном в [2].

**Метод нормальных мод.** В рамках этого метода прогиб балки  $w(x, t)$  и потенциал скоростей  $\varphi(x, 0, t)$  на участке жидкой границы  $y = 0$ ,  $0 < x < 2$  разыскиваются в виде рядов по собственным функциям  $\psi_n(x)$  задачи о колебаниях балки в пустоте с однородными граничными условиями для этих функций и их вторых производных при  $x = 0$  и  $x = 2$  (см. [2, формулы (13), (14)]):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(x), \quad \varphi(x, 0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \psi_n(x). \quad (8)$$

С учетом нормировки для шарнирно закрепленной балки находим:  $\psi_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ ;  $\lambda_n = (\pi n)/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — собственные числа. Уравнения (8) с учетом (5) дают

$$b_n(t) = \int_0^{c(t)} \varphi(x, 0, t) \psi_n(x) dx. \quad (9)$$

Подставляя представления (8) в уравнение балки (1), принимая во внимание (3) и (9), получаем для обобщенных координат  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  уравнение

$$\alpha \ddot{a}_n + \dot{b}_n + \beta \lambda_n^4 a_n = 0. \quad (10)$$

Точкой обозначается производная по времени. В этом уравнении величины  $b_n$  зависят от производных  $\dot{a}_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  и размера области контакта  $c$ .

Чтобы показать это, удобно ввести новые гармонические функции  $\varphi_n(x, y, c)$  как решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0); \quad (11)$$

$$\varphi_n = 0 \quad (y = 0, x < 0, x > c(t)), \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = \psi_n(x) \quad (y = 0, 0 < x < c(t)); \quad (12)$$

$$\varphi_n \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \quad (13)$$

с интегрируемыми особенностями первых производных вблизи граничных точек  $y = 0$ ,  $x = 0$  и  $y = 0$ ,  $x = c$ . Здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\psi_0(x) \equiv 1$ . После решения краевой задачи (11)–(13) равенства (5), (8), (9) дают

$$\varphi(x, 0, t) = -\varphi_0(x, 0, c) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \varphi_n(x, 0, c), \quad b_m(t) = -f_m(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) S_{nm}(c); \quad (14)$$

$$f_m(c) = \int_0^c \varphi_0(x, 0, c) \psi_m(x) dx; \quad (15)$$

$$S_{nm}(c) = \int_0^c \varphi_n(x, 0, c) \psi_m(x) dx. \quad (16)$$

Матрица присоединенных масс  $S$  с элементами  $S_{nm}(c)$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$  является симметричной, что вытекает из второй интегральной теоремы Грина.

Введем вспомогательный вектор  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, \dots)^T$ ,  $d_n = (\alpha \dot{a}_n + b_n)/(\beta \lambda_n^4)$ , векторы  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1(c), f_2(c), f_3(c), \dots)^T$  и диагональную матрицу  $D = \text{diag} \{ \lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \dots \}$ , с помощью которых уравнения (10) можно переписать в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = (\alpha I + S)^{-1}(\beta D\mathbf{d} + \mathbf{f}), \quad \frac{d\mathbf{d}}{dt} = -\mathbf{a}. \quad (17)$$

Правые части в (17) зависят от  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$  и  $c$ , но не зависят явно от времени  $t$ , поэтому удобно выбрать величину  $c$  за новую независимую переменную,  $0 \leq c \leq 2$ . При этом появляется новая искомая функция  $t = t(c)$ , дифференциальное уравнение для которой следует из (7) и имеет вид [1]

$$\frac{dt}{dc} = Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}), \quad Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \frac{5c/8 + (\mathbf{a}, \Gamma_c(c))}{1 - (\dot{\mathbf{a}}, \Gamma(c))}. \quad (18)$$

Компоненты векторов  $\Gamma(c)$  и  $\Gamma_c(c)$  даются формулами

$$\Gamma_n(c) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \psi_n(c \sin \theta) d\theta, \quad \Gamma_{nc}(c) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \psi'_n(c \sin \theta) d\theta.$$

Умножая каждое уравнение системы (17) на  $dt/dc$  и учитывая (18), находим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dc} = \mathbf{F}(c, \mathbf{d})Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{d})); \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{d}}{dc} = -\mathbf{a}Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{d})), \quad (20)$$

где  $\mathbf{F}(c, \mathbf{d}) = (\alpha I + \beta S(c))^{-1}(\beta D\mathbf{d} + \mathbf{f}(c))$ . Система (18)–(20) решается численно при нулевых начальных условиях

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{d} = 0, \quad t = 0 \quad (c = 0). \quad (21)$$

Производные  $\dot{a}_n(t)$  определяются по формуле  $\dot{a}_n = F_n(c, \mathbf{d})$ .

Важно отметить, что вид задачи Коши (18)–(21) в точности совпадает с видом соответствующей задачи о центральном ударе волной по упругой пластине. Однако входящие в систему (18)–(20) элементы определяются иными формулами и должны быть исследованы независимо. Приведенная постановка задачи остается справедливой при произвольных условиях закрепления концов балки.

Непосредственные вычисления дают

$$\Gamma_n(c) = \sin \xi J_0(\xi) + \cos \xi J_1(\xi), \quad \xi = \frac{\lambda_n c}{2}, \quad (22)$$

$$\Gamma_{nc}(c) = \lambda_n \left( \cos \xi J_0(\xi) - \sin \xi J_1(\xi) - \frac{1}{2\xi} \cos \xi J_1(\xi) \right)$$

для случая балки, шарнирно закрепленной на концах.

При численном решении задачи Коши (18)–(21) требуется обращение матрицы  $S$  на каждом шаге по  $c$ ,  $0 < c \leq 2$ . Поэтому сама возможность решения задачи во многом определяется тем, насколько быстро и эффективно можно вычислить функции  $S_{nm}(c)$  и  $f_m(c)$ ,  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

**Матрица присоединенных масс.** Функции  $f_m(c)$  и  $S_{nm}(c)$  определяются формулами (15) и (16). Подставляя в них  $\psi_m(x) = \sin \lambda_m x$  и проводя интегрирование по частям с учетом равенств  $\varphi_n(0, 0, c) = \varphi_n(c, 0, c) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , получаем

$$f_m(c) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^c \cos(\lambda_m x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x, 0, c) dx; \quad (23)$$

$$S_{nm}(c) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^c \cos(\lambda_m x) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, 0, c) dx. \quad (24)$$

Производные в последних интегралах равны

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, 0, c) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(c-x)}} \text{V.p.} \int_0^c \frac{\sqrt{\mu(c-\mu)} \psi_n(\mu)}{\mu-x} d\mu \quad (25)$$

при  $0 < x < c$  [3], в частности,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x, 0, c) = \frac{c/2 - x}{\sqrt{x(c-x)}}. \quad (26)$$

Вычисляя интеграл в (23) с учетом (26), имеем

$$f_m(c) = \frac{\pi c^2 \sin \lambda}{4\lambda} J_1(\lambda), \quad \lambda = \frac{\lambda_m c}{2}. \quad (27)$$

Определение интегралов (24), (25) при  $n = 1, 2, 3, \dots$  не тривиально, поэтому приведено ниже. Удобно ввести новые переменные интегрирования  $x = c(\xi + 1)/2$  в (24) и  $\mu = c(\sigma + 1)/2$  в (25). Получаем

$$S_{nm}(c) = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{\cos(\lambda\xi + \lambda)}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \text{V.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2} \sin(\zeta\sigma + \zeta)}{\sigma-\xi} d\sigma \right) d\xi,$$

где  $\lambda = \lambda_m c/2$ ,  $\zeta = \lambda_n c/2$ . Используя разложения сумм тригонометрических функций и свойства четности преобразования Гильберта по конечному интервалу, находим

$$S_{nm}(c) = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \left[ \cos \lambda \cos \zeta S_{nm}^{(1)} - \sin \lambda \sin \zeta S_{nm}^{(2)} \right], \quad (28)$$

$$S_{nm}^{(1)} = \int_{-1}^1 \frac{\cos \lambda \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \text{V.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2} \sin \zeta \sigma}{\sigma-\xi} d\sigma \right) d\xi;$$

$$S_{nm}^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{\sin \lambda \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \text{V.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2} \cos \zeta \sigma}{\sigma-\xi} d\sigma \right) d\xi. \quad (29)$$

Вычислим сначала внутренний интеграл в (28). Для этого воспользуемся разложением [4]

$$\sin \zeta \sigma = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\zeta) T_{2k+1}(\sigma) \quad (-1 \leq \sigma \leq 1)$$

и ортогональностью полиномов Чебышева  $T_n(\sigma)$ . Получим

$$\text{V.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\sigma^2} \sin \zeta \sigma}{\sigma-\xi} d\sigma = -\pi J_1(\zeta) + 2\pi(1-\xi^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\zeta) U_{2k}(\xi),$$

где  $U_k(\xi)$  — полиномы Чебышева второго рода. Подстановка последнего разложения в (28) с учетом значения интеграла

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - \sigma^2} U_{2k}(\xi) \cos \lambda \xi d\xi = \frac{2\pi}{\lambda} (-1)^k (2k + 1) J_{2k+1}(\lambda)$$

дает

$$S_{nm}^{(1)} = -\pi^2 J_0(\lambda) J_1(\zeta) + \frac{2\pi^2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) J_{2k+1}(\zeta) J_{2k+1}(\lambda).$$

Последний ряд является табличным [5], что позволяет записать

$$S_{nm}^{(1)} = \frac{\pi^2 \lambda}{\zeta^2 - \lambda^2} [\lambda J_0(\lambda) J_1(\zeta) - \zeta J_0(\zeta) J_1(\lambda)]. \quad (30)$$

В частности, при  $\zeta = \lambda$  имеем

$$S_{nn}^{(1)} = -\pi^2 J_0(\lambda) J_1(\lambda) + \frac{\pi^2 \lambda}{2} (J_3^2(\lambda) + J_1^2(\lambda)). \quad (31)$$

Интегралы в (29) вычисляются аналогично

$$S_{nm}^{(2)} = \frac{\pi^2 \lambda}{\zeta^2 - \lambda^2} [\lambda J_1(\lambda) J_0(\zeta) - \zeta J_1(\zeta) J_0(\lambda)]; \quad (32)$$

$$S_{nn}^{(2)} = -\frac{\pi^2 \lambda}{2} (J_0^2(\lambda) + J_1^2(\lambda)). \quad (33)$$

Функции Бесселя в (22), (27), (30)–(33) вычисляются с помощью их полиномиальных аппроксимаций [4].

**Гидродинамическая сила при ударе.** После решения задачи Коши (18)–(21) прогиб пластины определяется формулой (8), а распределение изгибающих напряжений — формулой

$$\sigma(x, t) = -\frac{\pi^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right).$$

В безразмерных переменных сила, действующая на пластину со стороны жидкости, определяется интегралом

$$F(t) = - \int_0^{c(t)} \varphi_t(x, 0, t) dx, \quad (34)$$

масштаб силы равен  $\rho V^2 R$ . С учетом непрерывности потенциала скоростей на жидкой границе  $y = 0$  формула (34) дает

$$F(t) = -\frac{d}{dt} q(t), \quad q(t) = \int_0^{c(t)} \varphi(x, 0, t) dx. \quad (35)$$

На ударной стадии функцию  $q(t)$  можно вычислить с помощью разложения (8), где  $b_n(t) = \beta \lambda_n^4 d_n(t) - \alpha a_n(t)$ . Такое разложение можно дифференцировать почленно по  $t$ , но результирующий ряд сходится очень медленно, что не позволяет проводить расчеты непосредственно по формуле (34). Поэтому предлагается использовать (35): сначала вычислить функцию  $q(t)$ , а затем продифференцировать ее по времени численно.



Определим функцию  $q(t)$  независимо, используя метод работы [3]. Рассмотрим возмущенное течение жидкости далеко от области контакта. При увеличении масштаба длины пятно контакта стягивается в точку и условия (5) на границе области течения можно в первом приближении заменить одним условием [3]

$$\varphi = q(t)\delta(x) \quad (y = 0),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Решение уравнения (4) с таким граничным условием дает при  $y \rightarrow -\infty$  и  $x = 0$

$$\varphi_y(0, y, t) \sim -\frac{q(t)}{\pi y^2}.$$

Вертикальную составляющую скорости  $\varphi_y(0, y, t)$  при  $y \rightarrow -\infty$  можно определить также с помощью решения задачи, записанной относительно перемещений жидких частиц [1]. Имеем

$$\varphi_y(0, y, t) \sim \frac{1}{\pi y^2} \frac{d}{dt} \int_0^{c(t)} \sqrt{\sigma(c-\sigma)} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 - t + w(\sigma, t) \right) d\sigma.$$

Сравнивая две последние асимптотические формулы, получаем

$$q(t) = - \int_0^{c(t)} \sqrt{\sigma(c-\sigma)} (1 - w_t(\sigma, t)) d\sigma.$$

Используя представление  $w$  в виде ряда (8), перепишем выражение для  $q(t)$  следующим образом:

$$q(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) s_m(c) - \frac{\pi}{8} c^2, \quad s_m(c) = \int_0^c \sqrt{\sigma(c-\sigma)} \psi_m(\sigma) d\sigma. \quad (36)$$

В нашем случае  $\psi_m(\sigma) = \sin \lambda_m \sigma$ ,  $\lambda = \pi m/2$ , откуда

$$s_m(c) = \frac{c}{m} \sin \left( \frac{\pi m c}{4} \right) J_1 \left( \frac{\pi m c}{4} \right).$$

Видно, что  $s_m(c) = O(m^{-3/2})$  при  $m \rightarrow \infty$ . Ранее показано [2], что  $\dot{a}_m(t) = O(m^{-2})$  при  $m \rightarrow \infty$ , поэтому ряд в (36) сходится достаточно быстро и может быть найден численно. Для недеформируемой пластины, когда  $w(x, t) \equiv 0$ , уравнение (7) дает  $c_R(t) = (16t/5)^{1/2}$ . Величины, относящиеся к случаю жесткой пластины, помечаются индексом  $R$ . Из (36) найдем  $q_R(t) = -(\pi/8)c_R^2(t)$ , откуда  $q_R(t) = -(2/5)\pi t$  и  $F_R(t) = 2\pi/5$ .

При малых временах ( $t \ll 1$ ) упругостью пластины можно пренебречь, отсюда  $F(0) = F_R(0)$ . Отношение  $F(t)/F_R(t)$  дается формулой

$$\frac{F(t)}{F_R(t)} = \frac{5}{16} \frac{d}{dt} \left\{ c^2 - \frac{8}{\pi} c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_n(t)}{n} \sin \left( \frac{\pi n c}{4} \right) J_1 \left( \frac{\pi n c}{4} \right) \right\}, \quad (37)$$

которая и используется в расчетах.

**Результаты численного анализа.** Задача Коши (18)–(21) решается численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом по переменной  $s$ . Выбор шага подробно обсуждается в [2]. Однако при таком подходе возникают трудности при малых скоростях точки контакта  $dc/dt$ . В этом случае малые изменения величины  $s$  ведут к значительным изменениям функции  $t(c)$ . При больших значениях производной  $dt/dc$  применялся следующий прием: если  $dt/dc < 3$ , то расчеты велись по модели (18)–(20)

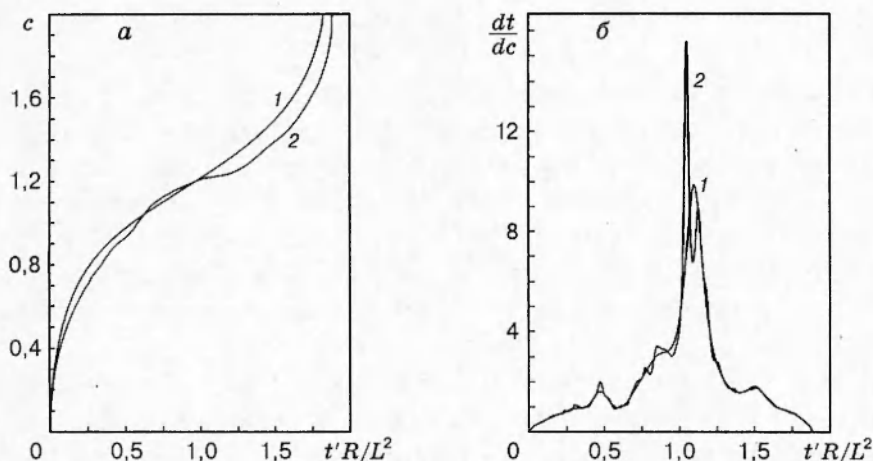


Рис. 2

с независимой переменной  $c$ , в противном случае за независимую переменную принималось время  $t$  и расчеты велись по модели (17) с дополнительным уравнением для  $c(t)$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{Q(c, a, \dot{a})}$$

Шаг по времени полагался равным шагу по  $c$ . Как только скорость смачивания возрастала до  $1/3$ , возвращались к исходной модели.

Задача решалась при  $\alpha = 0,157$  и  $\beta = 0,04$ . Эти значения параметров соответствуют удару в край пластины толщиной 1 см и длиной 1 м, изготовленной из стали ( $\rho_b = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 21 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>), вершиной волны, для которой произведение  $RV = 30$  м<sup>2</sup>/с (например,  $R = 10$  м и  $v = 3$  м/с или  $R = 20$  м и  $v = 1,5$  м/с). Заметим, что использование модели несжимаемой жидкости оправдано в том случае, когда длительность ударной стадии — она имеет порядок  $L^2/(RV)$  — значительно превышает длительность акустического этапа удара — ее порядок равен  $T_{ac} = RV/c_0^2$  [6], где  $c_0$  — скорость звука в покоящейся жидкости при нормальных условиях. В рассматриваемом случае  $T = 625T_{ac}$ , поэтому пренебрежение акустическими эффектами оправдано.

На рис. 2,а показана зависимость размера области контакта  $c$  от времени  $t$ , вычисленная в одномодовом приближении (кривая 1) и с учетом двадцати первых мод (кривая 2). Видно, что одномодовое приближение дает верное представление о расширении смоченной части пластины при ударе. Аналогичные кривые, построенные с помощью пяти и более мод, практически совпадают с кривой 2. Однако для вычисления «обратной скорости смачивания»  $(dt/dc)(t)$  необходимо удерживать большее число мод, причем одномодовое приближение дает неверную информацию о скорости смачивания пластины. На рис. 2,б показана зависимость  $dt/dc$  от времени, найденная с помощью пяти первых мод (кривая 1) и десяти первых мод (кривая 2). Кривые согласуются между собой вне интервала  $1 < t < 1,2$ . Внутри этого интервала производная  $dt/dc$  резко изменяется и принимает свое максимальное значение. Для достаточно хорошего приближения обратной скорости смачивания необходимо учитывать десять мод, вычисления с меньшим количеством мод дают заниженные значения максимума  $dt/dc$ . Увеличение числа мод позволяет уточнить детали изменения скорости смачивания со временем, которые можно рассматривать как несущественные. В частности, максимум производной  $dt/dc$  и ширина области резких изменений  $dt/dc$ , найденные с помощью десяти мод, при этом практически не меняются. Это означает, что сложный вид кривой 2 на рис. 2,б не связан с погрешностями численного счета, а



отражает нерегулярный характер взаимодействия упругой поверхности с жидкостью при ударе.

Процесс смачивания упругой пластины при ударе можно описать следующим образом. На начальном этапе скорость смачивания намного превышает скорость удара и медленно уменьшается со временем до тех пор, пока область контакта не достигнет размера  $1,2L$ . Здесь скорость смачивания превышает 15 м/с. В дальнейшем за счет упругих свойств тела скорость смачивания резко падает до 4 м/с и становится сравнимой со скоростью удара. Для недеформируемых тел этот эффект не наблюдается [3]. Малая скорость смачивания держится недолго, затем она возрастает и становится неограниченной в конце ударной стадии.

Сила  $F(t)$ , действующая со стороны жидкости на пластину, приближенно пропорциональна размеру области контакта  $c(t)$ , скорости ее расширения  $dc/dt$  и скорости удара (см. (37)). На начальном этапе скорость смачивания относительно велика, что является причиной высоких гидродинамических нагрузок на пластину. Эти нагрузки ведут к прогибу пластины и, в частности, к уменьшению местной скорости удара  $v(x, t) = 1 - w_t(x, t)$ . При этом скорость смачивания уменьшается, так как часть жидкости следует за прогибом пластины, а не растекается вдоль нее. Для относительно мягких пластин с малым значением параметра  $\beta$  уменьшение скорости смачивания может быть существенным. Чтобы объяснить резкий характер изменений этой скорости, вычислим периоды  $T_n$  собственных колебаний пластины в пустоте. Имеем  $T_n = T_1/n^2$ ,  $T_1 = (8/\pi)(\alpha/\beta)^{1/2}$  в безразмерных переменных. Отсюда  $T_1 \sim 16$ ,  $T_2 \approx 4$ ,  $T_3 \approx 2$ ,  $T_4 \approx 1$ ,  $T_5 \approx 2/3$ . Видно, что первые три моды не могут быть ответственными за детали процесса, так как длительность ударной стадии меньше 2. Особенности процесса удара на этой стадии обусловлены высшими модами, начиная с четвертой.

Используемая модель справедлива только в том случае, когда скорость  $dc/dt$  положительная и конечная. Если скорость смачивания обращается в нуль, а затем становится отрицательной, то жидкие частицы из области контакта выходят на свободную поверхность и образуется вихревой слой, который в настоящей модели не учитывается. Если скорость смачивания растет и становится сравнимой со скоростью распространения сигнала в жидкости, то предположение о несжимаемости жидкости теряет силу и необходимо рассматривать более сложное акустическое приближение. Рис. 2, б показывает, что в середине ударной стадии скорость смачивания существенно падает, но остается положительной. В дальнейшем скорость смачивания неограниченно возрастает ( $dt/dc \rightarrow 0$ ). Важно отметить, что  $c_* < 2$ , где  $c_*$  такое, что  $(dt/dc)(c_*) = 0$ . В данном случае используемая модель не позволяет описать ударную стадию полностью, в конце ударной стадии скорость расширения области контакта становится настолько большой, что необходимо учитывать акустические эффекты.

Сила, действующая на пластину со стороны жидкости, как функция размера области контакта  $c$  показана на рис. 3, а. В расчетах по формуле (37) удерживалось двадцать первых мод. Видно, что гидродинамические нагрузки растут неограниченно при  $c \rightarrow c_*$ . Это явление называется блокировкой. При блокировке за счет упругих деформаций пластины скорость точки контакта увеличивается, что ведет к неограниченному росту гидродинамических нагрузок. В случае центрального удара блокировка не обнаружена, т. е. для этого явления место удара оказалось определяющим.

На участке резкого изменения производной  $(dt/dc)(t)$  (рис. 2, б) сила сопротивления меняется также очень резко и принимает отрицательные значения (см. рис. 3, а). Последнее указывает на возможность кавитационных явлений в области контакта жидкости с упругой пластиной. Отметим, что кавитационные явления не наблюдаются при ударе недеформируемых пластин.

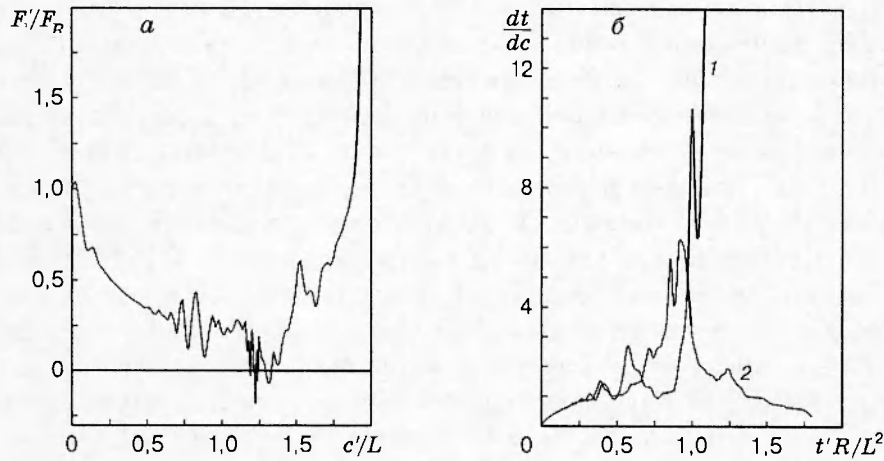


Рис. 3

Естественно предположить, что характер взаимодействия упругой пластины с жидкостью при ударе определяется в основном динамической жесткостью пластины  $\beta$ . Изменение производной  $(dt/dc)(t)$  со временем при  $\beta = 0,02$  (кривая 1) и  $\beta = 0,06$  (кривая 2) показано на рис. 3, б. Расчеты проводились для десяти первых мод, параметр  $\alpha$ , как и ранее, равен 0,157. Переход от  $\beta = 0,04$  к случаю  $\beta = 0,02$  означает увеличение скорости удара в  $\sqrt{2}$  раз при неизменных значениях остальных величин, а к случаю  $\beta = 0,06$  — уменьшение скорости удара в  $\sqrt{3/2}$  раз. Изменение условий удара незначительное, однако оно приводит к качественному изменению протекания процесса. Увеличение скорости удара (кривая 1) обостряет нерегулярный характер взаимодействия упругой пластины с жидкостью. После того как половина пластины будет смочена, рост пятна контакта прекращается и оно начинает уменьшаться. Это выходит за рамки предположений задачи, и счет необходимо остановить. При уменьшении скорости удара (кривая 2) скорость смачивания ограничена и положительна в течение всей ударной стадии. Для  $\beta = 0,06$  сила, действующая на пластину со стороны жидкости ограничена, но, как и при  $\beta = 0,04$ , может принимать отрицательные значения.

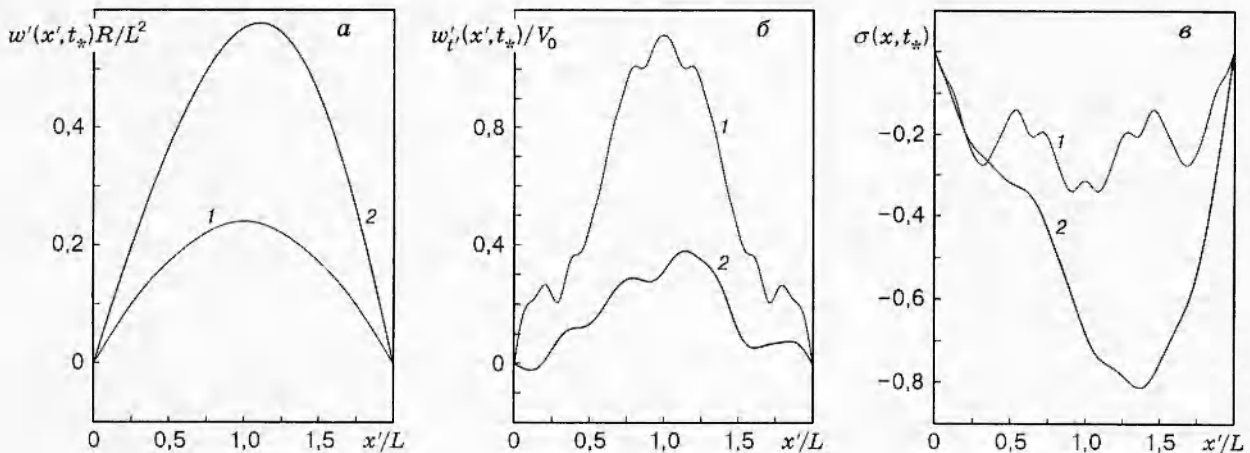


Рис. 4

На рис. 4 приведено сравнение прогиба (*a*), скорости (*b*) точек пластины и распределения изгибающих напряжений в ней (*в*) в момент окончания ударной стадии при ударе волной в край пластины (кривые 2) и в ее центр (кривые 1). Условия удара в обоих случаях одинаковые, за исключением места удара. Все кривые 1 симметричны относительно центра пластины ( $x = 1$ ). В расчетах принимались следующие значения параметров:  $\alpha = 0,314$ ,  $\beta = 0,311$  [2], что соответствует удару волной с радиусом кривизны в вершине 10 м и скоростью 3 м/с по пластине из мягкой стали толщиной 2 см и длиной 1 м. В безразмерных переменных длительность ударной стадии равна 0,365 44 для центрального удара и 1,537 07 для удара в край. Видно, что рост длительности ударной стадии ведет к увеличению прогиба более чем в два раза (рис. 4, *a*), существенному уменьшению кинетической энергии балки (рис. 4, *b*) и увеличению потенциальной энергии упругих деформаций (рис. 4, *в*). При ударе в край максимальные напряжения достигаются на расстоянии  $0,6L$  от правого края балки и равны  $256 \text{ Н/мм}^2$ . Анализ показывает, что при прочих равных условиях место удара существенно влияет на деформацию пластины в конце ударной стадии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01767).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Korobkin A. A. Wave impact on the bow end of a catamaran wet deck // J. Ship Res. 1995. V. 39, N 4. P. 321–327.
2. Коробкин А. А. Плоская задача о симметричном ударе волной по балке Эйлера // Наст. сб. С. 134–147.
3. Korobkin A. A. Water impact problems in ship hydrodynamics // Advances in Marine Hydrodynamics / M. Ohkusu (Ed.). Southampton: Computational Mech. Publ., 1996. P. 323–371.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, специальные функции. М.: Наука, 1983.
6. Korobkin A. A. Acoustic approximation in the slamming problem // J. Fluid Mech. 1996. V. 318. P. 165–188.

*Поступила в редакцию 11/XI 1996 г.,  
в окончательном варианте — 24/I 1997 г.*