

УДК 519.676

Методы типа Розенброка для решения стохастических дифференциальных уравнений^{*}

Т.А. Аверина^{1,2}, К.А. Рыбаков³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993

E-mails: ata@osmf.scc.ru (Аверина Т.А.), rkoffice@mail.ru (Рыбаков К.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Методы типа Розенброка для решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 2. — С. 123–145.

Статья содержит обзор недавних публикаций, в которых описываются математические модели, включающие стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), с приложениями в различных областях. Цель статьи состоит в кратком описании методов типа Розенброка для приближенного решения СДУ. Она показывает, каким образом можно улучшить характеристики численных методов и увеличить точность расчетов, не слишком увеличивая сложность реализации. В статье также предлагается новый вариант метода типа Розенброка для СДУ с мультипликативным шумом для некоммутативного случая. Его апробация проведена на примере моделирования вращательной диффузии.

DOI: 10.15372/SJNM20240201

EDN: UEEZLY

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, метод Эйлера–Маруямы, метод Мильштейна, метод типа Розенброка, численный метод, вращательная диффузия.

Averina T.A., Rybakov K.A. Rosenbrock-type methods for solving stochastic differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 2. — P. 123–145.

This paper reviews recent publications that describe mathematical models with stochastic differential equations (SDEs) and applications in various fields. The purpose of this paper is to briefly describe Rosenbrock-type methods for approximate solution of SDEs. It shows how the performance of the numerical methods can be improved and the accuracy of calculations can be increased without increasing the implementation complexity too much. The paper also proposes a new Rosenbrock-type method for SDEs with multiplicative non-commutative noise. Its testing is carried out by modeling rotational diffusion.

Keywords: stochastic differential equations, Euler–Maruyama method, Milstein method, Rosenbrock-type method, numerical method, rotational diffusion.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № FWNM-2022-0002) и государственного задания МАИ (проект № FSFF-2023-0008).

1. Введение

Для описания детерминированных динамических систем в непрерывном времени применяются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) (в этой работе рассматриваются только динамические системы с сосредоточенными параметрами), однако для учета случайных возмущений их, как правило, недостаточно. Довольно широкий класс стохастических динамических систем в непрерывном времени можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Наиболее часто в приложениях достаточно использовать СДУ с винеровской составляющей или СДУ с гауссовским белым шумом. Укажем некоторые недавние публикации за последние несколько лет, которые дают представление о возможных областях применения СДУ.

Традиционно СДУ включают в математические модели физических явлений. В [1] предложена модифицированная модель Лоренца, учитывающая случайные возмущения, для описания термодинамических процессов в жидкостях, варианты этой модели могут использоваться для моделирования климатических изменений. СДУ применяются в стохастической теории гравитации [2] (авторы используют модель на основе типового гауссовского процесса — процесса Орнштейна–Уленбека). Приложение к сейсмологии с помощью моделирования процесса Бесселя изучается в [3]. Применение СДУ при описании динамики бозонов, связи СДУ с открытыми квантовыми системами и возможности использования последних для решения СДУ обсуждаются в [4].

СДУ находят применение в космологии и астрофизике. В [5] рассматривается модель осциллирующего аккреционного диска для определения спектрального индекса мощности и изменчивости наблюдаемого объекта. Стохастическая модель расширения вселенной предлагается в [6]. В [7] проведены исследования переноса и модуляции частиц космических лучей в турбулентной астросфере. Стохастические уравнения Ньютона для описания движения тел с приложениями к анализу динамики спиральных галактик составляют основу работы [8].

Естественно, многие инженерные задачи требуют описания изучаемых процессов с помощью СДУ. В [9] СДУ применяются в задачах аэродинамики в условиях турбулентности, а именно используется формирующий фильтр для моделирования “реального” шума. Модель литиевой батареи и системы оценивания ее состояния как составная часть системы управления батареями рассматривается в [10]. Работа [11] описывает задачу стабилизации космического аппарата, находящегося под действием случайных возмущений, движение которого описывается СДУ. СДУ часто составляют основу математических моделей систем наблюдения в задачах фильтрации, а также сглаживания и прогнозирования, например задача оценивания ошибки навигационной системы решается в [12].

Среди приложений в биологии отметим работу [13], в которой рассматривается математическая модель хемостата — аппарата для непрерывного культивирования микроорганизмов, учитывающая случайные факторы. В [14] изучается процесс выживания или вымирания видов в простой пищевой цепи, состоящей из нескольких звеньев, в которой каждый вид взаимодействует не более чем с двумя другими видами, находящимися непосредственно выше или ниже него в пищевой цепи (одно из многих обобщений модели Лотки–Вольтерра). В обеих работах возникают процессы Орнштейна–Уленбека.

К приложениям в экологии можно отнести статью [15], которая содержит математическую модель засушливой экосистемы с точки зрения взаимодействия растительности с поверхностными и грунтовыми водами. А в [16] СДУ описывают параметры деревьев, например диаметр, высоту и др., и такие модели востребованы при исследованиях в лесном хозяйстве.

Следующие работы затрагивают исследования в области медицины. В частности, в [17] изучается стохастическая модель на основе осциллятора Уилсона–Коуэна, позволяющая оценить эффективность входных воздействий на клетки (пирамидальные нейроны и интернейроны), которые связаны с гамма-ритмами, имеющими важное значение для взаимодействия между областями головного мозга. В [18] рассматриваются динамические изменения опухолевых и иммунных клеток (иммунный ответ на химиотерапию). Математическая модель передачи инфекции (ВИЧ) от клетки к клетке составляет основу исследования [19].

Математические модели передачи инфекции в популяции, а не от клетки к клетке, как в последней упомянутой работе, с учетом случайных факторов рассматриваются в [20, 21]. Как и многие подобные работы, они основаны на модификации классической модели Кермака–Маккендрика. Нужно отметить, что модели распространения эпидемий в последнее время стали довольно популярными. Несомненно, интерес к ним возрос с появлением вируса COVID-19. Кроме того, такие модели используются для описания распространения вредоносного программного обеспечения в компьютерных сетях. Например, работа [22] посвящена изучению стохастических моделей атаки на компьютерную сеть и защиты от этой атаки в игровой постановке. В [23] рассматривается модель распространения компьютерных вирусов на основе упрощенной модели распространения эпидемий.

Нельзя не отметить применение СДУ в сфере экономики и финансов, так как в этих областях случайные факторы, как правило, являются неотъемлемой частью постановки задачи. В [24] анализируется модель динамики криптовалют на основе геометрических броуновских движений во взаимосвязи с активностью в социальных сетях (в этой части основу моделирования составляют геометрические процессы Орнштейна–Уленбека). Математические модели, описывающие цену базового актива с учетом стохастической волатильности, в том числе и для российских опционов, изучаются в [25, 26].

Можно найти еще много различных приложений, для которых математические модели включают СДУ. Так, объект исследования [27] — модель распространения слухов в социальных сетях с учетом противодействия и контроля вредного воздействия, а в [28] рассматривается стохастическая модель одноязычкового музыкального инструмента, например кларнета. Кроме того, решение СДУ может быть вспомогательной частью некоторого метода или алгоритма. Например, в [29] описан метод стаи синиц (метаэвристический метод оптимизации) в приложении к задаче оптимального управления дискретными детерминированными системами. Решение СДУ в указанной работе моделирует поведение синиц, находящихся в поисках еды, и это решение лежит в основе стратегии поиска минимума функции многих переменных.

Анализ перечисленных публикаций [1, 2, 7, 11–13, 20–22, 27] показывает, что в значительной части работ для моделирования решений СДУ используется простейший численный метод — метод Эйлера–Маруямы [30]. Довольно редко [2, 15, 19] применяется метод Мильштейна [31]. И только в одной из публикаций, а именно [9], авторы воспользовались для расчетов более сложным методом Платена [32]. В некоторых публикациях [5, 8, 10, 17, 18] авторы не указывают название численного метода решения СДУ, либо ссылаются лишь на задействованное при расчетах программное обеспечение: специализированный модуль *DifferentialEquations* для программ на языке *Julia* [3] (по имеющейся ссылке [33] можно предположить, что автор применил один из вариантов метода типа Рунге–Кутты) или система *Wolfram Mathematica* [28].

Конечно, приведенный анализ не претендует на полноту. Однако есть основания полагать, что при анализе большего числа публикаций общая картина если изменится,

то незначительно. Конечно, список используемых методов расширится, но можно быть уверенными, что метод Эйлера–Маруямы будет лидировать с большим отрывом, а следующими после него будут простые варианты метода Мильштейна и методов типа Рунге–Кутты.

Если проанализировать применение численных методов решения ОДУ, то окажется, что часто для расчетов выбирают более сложный (и более точный) численный метод, нежели метод Эйлера, — метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности, который обеспечивает баланс между простотой реализацией и достаточной для многих приложений точностью. При приближенном решении СДУ достижение такой точности — нетривиальная задача.

Для решения СДУ исследователи выбирают самый простой в реализации численный метод, что неудивительно, и это связано со сложностью реализации численных методов, обеспечивающих более высокую точность по сравнению с методом Эйлера–Маруямы. Однако характеристики этого метода таковы, что для увеличения точности потраекторной аппроксимации в l раз требуется уменьшить шаг численного интегрирования в l^2 раз, а при необходимости оценки вероятностных характеристик решения СДУ это повлечет и увеличение числа моделируемых траекторий при согласованном выборе параметров статистического алгоритма [34, 35].

Невысокая точность метода Эйлера–Маруямы особенно заметна при решении СДУ с мультиплективным шумом. Например, две трети проанализированных публикаций включают именно такие СДУ [1, 4, 6, 7, 9, 11, 14–27] и для части из них используется именно метод Эйлера–Маруямы [1, 7, 11, 20–22, 26, 27]. СДУ с аддитивным шумом рассматриваются в [2, 3, 5, 10, 12, 13, 28].

Компромиссным вариантом здесь можно считать метод Мильштейна. Для него справедливо следующее свойство: для увеличения точности потраекторной аппроксимации в l раз требуется уменьшить шаг численного интегрирования в l раз.

Существуют разные семейства значительно более точных численных методов решения СДУ, представленные в [32]. Здесь стоит отметить методы, основанные на кратных обобщенных рядах Фурье [36, 37], и метод, связанный с применением спектральной формы математического описания для моделирования повторных стохастических интегралов (численно-спектральный метод) [38]. Сложность реализации таких методов можно было бы компенсировать, разработав программное обеспечение и обеспечив к нему свободный доступ. В частности, такое программное обеспечение реализовано для методов, основанных на кратных обобщенных рядах Фурье [39]. Пример реализации численно-спектральных методов содержится в [40].

Классификацию численных методов решения СДУ можно проводить по различным признакам, например выделяя явные и неявные методы, одностадийные и многостадийные методы. Кроме того, такая классификация всегда связана с определениями сходимости приближенного решения, т. е. рассматриваются методы, сходящиеся в сильном смысле (потраекторная сходимость) или в слабом смысле (сходимость функционалов от решения). Чтобы составить представление о существующих численных методах решения СДУ, рекомендуется обратиться к монографиям [32, 34, 36, 41].

Данная статья имеет обзорный характер и адресована исследователям, для которых численные методы решения СДУ являются инструментом решения задач в различных областях. Ее основная цель состоит в кратком описании методов типа Розенброка для приближенного решения СДУ. Она показывает, каким образом можно улучшить характеристики численных методов и увеличить точность расчетов, не слишком увеличивая сложность реализации. Кроме того, статья предлагает новый вариант метода типа Ро-

зенброка для СДУ с мультиплекативным шумом для некоммутативного случая. Его апробация проведена на примере моделирования вращательной диффузии.

2. Методы типа Розенброка для решения ОДУ

Прежде чем описывать методы типа Розенброка для приближенного решения СДУ, рассмотрим ОДУ. В 1963 г. Х. Розенброк предложил для приближенного решения систем ОДУ использовать класс методов, которые отличаются от явных методов Рунге–Кутты применением регуляризации при каждом вычислении правой части системы ОДУ [42]. Регуляризация аналогична первому приближению по Ньютону в неявном методе Эйлера. Оказалось, что при соответствующем выборе параметров такие методы становятся А-устойчивыми (см. определение ниже).

Для векторного нелинейного ОДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $f(t, x)$ — векторная функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения задачи Коши, запишем метод Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) \quad (2)$$

и семейство одностадийных методов типа Розенброка

$$x_{k+1} = x_k + \left(I - ha \frac{\partial f(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} hf(t_k, x_k), \quad (3)$$

где x_k — приближенное решение в точке $t_k = t_0 + kh$, $h > 0$ — заданный шаг численного интегрирования, I — единичная матрица порядка n , $\partial f(t, x)/\partial x$ — матрица Якоби, a — параметр этого семейства методов. В методах типа Розенброка (3) в сравнении с формулой для метода Эйлера (2) присутствует регуляризирующий множитель.

Понятие сходимости численного метода определено при $h \rightarrow 0$. Однако желательно, чтобы и при больших размерах шага численное решение в точности сохраняло хотя бы некоторые свойства точного решения. Анализ поведения численного решения при больших размерах шага интегрирования проводится для модельного ОДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}, \quad x(t_0) = x_0, \quad \lambda = \alpha + i\omega, \quad \alpha < 0. \quad (4)$$

Говорят, что метод абсолютно устойчив с шагом h , если при его применении к уравнению (4) выполняется равенство $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$, и метод А-устойчив, если он абсолютно устойчив с любым шагом [43]. При численном решении шаг h должен выбираться из области абсолютной устойчивости. Нарушение требования устойчивости метода обычно дает о себе знать катастрофическим ростом модуля численного решения. При $\alpha \geq 1/2$ методы (3) являются А-устойчивыми.

Пусть $x(t)$ — это решение задачи Коши для линейного однородного ОДУ первого порядка (4) и $x(t) \in \mathbb{R}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$. Найти его точное решение не составляет проблемы, при $\lambda < 0$ выполняется равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Рассмотрим приближенное решение, полученное с помощью простейшего численного метода — метода Эйлера,

$$x_{k+1} = x_k + h\lambda x_k = (1 + h\lambda)x_k, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (5)$$

Чтобы для решения разностного уравнения (5) выполнялось равенство $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$, должно быть справедливым условие $|1 + h\lambda| < 1$, которое зависит от h при фиксированном λ .

Далее рассмотрим применение метода Розенброка из семейства одностадийных методов типа Розенброка (3) при $a = 1/2$:

$$x_{k+1} = x_k + \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)^{-1} h\lambda x_k = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} x_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где $(1 - h\lambda/2)^{-1}$ — регуляризующий множитель.

Для устойчивости численного решения (6) должно выполняться условие $|(2+h\lambda)/(2-h\lambda)| < 1$, и оно, очевидно, выполнено при $\lambda < 0$ для любого h . Таким образом, метод Розенброка является абсолютно устойчивым с любым шагом численного интегрирования, т. е. является А-устойчивым [43] в отличие от метода Эйлера.

Развитие методов типа Розенброка отражено в недавно опубликованном обзоре [44]. Подчеркнем, что выше приведен самый простой вариант метода типа Розенброка, обобщающий метод Эйлера. В общем случае методы типа Розенброка обобщают явные методы Рунге–Кутты и относятся к одношаговым многостадийным численным методам. Формулы для M -стадийного метода типа Розенброка в монографии [43] записываются следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{i=1}^M p_i K_i, \quad K_i = \left(I - ha \frac{\partial f(t_k, x_k)}{\partial x}\right)^{-1} h f\left(t_k + \gamma_i h, x_k + \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{il} K_l\right),$$

где p_i , a , γ_i и β_{il} — числовые параметры, $\beta_{10} = 0$.

В монографии [45] рассмотрено более общее семейство методов, которые также являются обобщением методов типа Розенброка. Их называют методами Розенброка–Ваннера. Правило выбора числовых параметров, обеспечивающее согласование с разложением решения в ряд Тейлора, теоремы о сходимости, описание различных модификаций методов типа Розенброка читатель может найти в обзоре [44] и монографиях [43, 45].

Метод типа Розенброка (3) при $a = 1/2$ не только обладает свойством А-устойчивости, но и имеет второй порядок сходимости, в то время как метод Эйлера (2) имеет лишь первый порядок сходимости. Методы типа Розенброка рекомендуются для решения жестких систем ОДУ [43, 45].

3. Методы типа Розенброка для решения СДУ

Перейдем к задаче Коши для СДУ и сначала рассмотрим линейное уравнение

$$dx(t) = \lambda x(t) dt + \sigma dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \lambda, \sigma \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

где $x(t)$ — случайный процесс, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, случайная величина x_0 не зависит от $w(t)$.

Приближенное решение уравнения (7) можно найти с помощью метода Эйлера–Маруямы [30] — самого простого численного метода для СДУ:

$$x_{k+1} = x_k + h\lambda x_k + \sqrt{h}\sigma \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где в дополнение к ранее введенным обозначениям ξ_k — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение для всех k . При условии $\lambda < 0$ точное решение СДУ (7) — процесс Оринштейна–Уленбека — имеет предельное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/(2|\lambda|)$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E x(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} E x^2(t) = \frac{\sigma^2}{2|\lambda|},$$

где E означает математическое ожидание. Но это свойство не выполняется для решения стохастического разностного уравнения (8) ни для какого h [43].

Для приближенного решения СДУ Стратоновича в 1986 г. Т.А. Авериной и С.С. Артемьевым построено семейство методов типа Розенброка [46]. Эти методы успешно применяются на протяжении многих лет для решения стохастических задач, математические модели которых заданы СДУ. Так, например, в [47] рассмотрена модель фазового перехода первого рода с образованием дефектов, их накоплением и изменением в кристаллической решетке, а работа [48] изучает модель фазового перехода на начальной стадии формирования капель в объеме пара с фиксированным зарядом на каплях. Монография [34] содержит множество примеров применения методов типа Розенброка в самых разных областях. Эти методы прошли апробацию на задачах фильтрации сигналов в условиях помех [49, 50].

Самый простой численный метод типа Розенброка для СДУ (7) обобщает метод Эйлера–Маруямы [43]:

$$x_{k+1} = x_k + \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)^{-1} (h\lambda x_k + \sqrt{h}\sigma\xi_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

и решение стохастического разностного уравнения (9) имеет предельное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/(2|\lambda|)$ при условии $\lambda < 0$ для любого h . Это свойство метода типа Розенброка называется асимптотической несмещенностю [43], оно обобщает понятие А-устойчивости.

Отметим, что уравнение (7) не просто является модельным для изучения свойств численных методов решения СДУ, но и может быть основой для описания реальных явлений [2, 13, 14].

Рассмотрим общий случай векторного нелинейного СДУ Ито

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (10)$$

где $x(t)$ — n -мерный случайный процесс, $w(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, случайный вектор x_0 не зависит от $w(t)$, $f(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ — векторная и матричная функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения задачи Коши. СДУ Ито (10) соответствует СДУ Стратоновича

$$dx(t) = g(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) \circ dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (11)$$

где $g(t, x)$ — векторная функция:

$$g(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{.l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{.l}(t, x), \quad (12)$$

а $\sigma_{.l}(t, x)$ — столбец матричной функции $\sigma(t, x)$ с номером l .

Метод Эйлера–Маруямы для приближенного решения СДУ Ито (10) имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, x_k) \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где ξ_k — случайные векторы, все компоненты $\xi_k = [\xi_{1k} \dots \xi_{sk}]^\top$ которых имеют стандартное нормальное распределение и независимы в совокупности для всех k . В 1994 г. С.С. Артемьевым рассмотрено семейство обобщенных методов типа Розенброка [51]

$$x_{k+1} = x_k + \left(I - ha \frac{\partial f(t_k, x_k)}{\partial x}\right)^{-1} (h f(t_k, x_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, x_k) \xi_k), \quad (14)$$

и доказано, что методы являются асимптотически устойчивыми в среднеквадратическом смысле при $a \geq 1/2$. Отличие методов (13) и (14) состоит в регуляризирующем множителе, как и в случае численных методов (2) и (3) для ОДУ, причем формулы (2) и (3), очевидно, получаются из (13) и (14) при нулевой матрице $\sigma(t, x)$. Далее применяется метод из этого семейства при $a = 1/2$:

$$x_{k+1} = x_k + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} (h f(t_k, x_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, x_k) \xi_k). \quad (15)$$

Именно метод (13) выбирает большинство авторов для моделирования траекторий решения СДУ, что следует из приведенного во введении обзора. Этот же обзор показывает, что следующий по частоте применения — метод Мильштейна [31]. Приведем его для СДУ Стратоновича (11):

$$x_{k+1} = x_k + h g(t_k, x_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, x_k) \xi_k + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma(t_k, x_k) \xi_k^2, \quad (16)$$

где

$$\frac{\partial \sigma(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma(t_k, x_k) \xi_k^2 = \sum_{j_1, j_2=1}^s \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma_{\cdot j_2}(t_k, x_k) \xi_{j_1 k} \xi_{j_2 k}.$$

В статье [46] рассмотрен метод типа Розенброка для решения СДУ Стратоновича (11), который обладает высокой точностью и хорошими свойствами устойчивости,

$$x_{k+1} = x_k + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial g(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} \left(h g(t_k, x_k) + \sqrt{h} \sigma(t_k, x_k) \xi_k + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma(t_k, x_k) \xi_k^2 \right), \quad (17)$$

где $\partial g(t, x)/\partial x$ — матрица Якоби, а все остальные обозначения введены выше.

Метод типа Розенброка (17) входит в семейство двухстадийных методов типа Розенброка для решения СДУ Стратоновича [34, 46]. Эти методы, как и численные методы решения ОДУ, обобщают методы типа Рунге–Кутты:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + p_1 K_1 + p_2 K_2 + \sqrt{h} (q_{11} G_0 + q_{12} G_1 + q_{13} G_2) \xi_k, \\ G_0 &= \sigma(t_k, x_k), \\ K_1 &= \left(I - ha \frac{\partial g(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} \left(h g(t_k, x_k) + q_1 \sqrt{h} G_0 \xi_k + \frac{q_2 h}{2} \Xi \right), \\ G_1 &= \sigma \left(x_k + \alpha_1 K_1 + q_3 \sqrt{h} G_0 \xi_k + \frac{q_4 h}{2} \Xi \right), \\ K_2 &= \left(I - ha \frac{\partial g(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} \left[h g \left(t_k, x_k + \alpha_2 K_1 + q_5 \sqrt{h} G_0 \xi_k + \frac{q_6 h}{2} \Xi \right) + q_7 \sqrt{h} G_1 \xi_k + \frac{q_8 h}{2} \Xi \right], \\ G_2 &= \sigma \left(x_k + \alpha_3 K_1 + \alpha_4 K_2 + q_9 \sqrt{h} G_1 \xi_k + \frac{q_{10} h}{2} \Xi \right), \quad \Xi = \frac{\partial \sigma(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma(t_k, x_k) \xi_k^2, \end{aligned}$$

где $p_1, p_2, a, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ и q_1, \dots, q_{13} — числовые параметры.

Правило выбора числовых параметров для согласования с разложением решения в ряд, который является аналогом ряда Тейлора для случайных процессов, теоремы о сходимости, а также различные варианты методов типа Розенброка содержатся в монографиях [34, 43].

4. Модифицированный метод типа Розенброка для решения СДУ

Метод Мильштейна (16) основан на следующем соотношении, которое представляет собой часть разложения точного решения СДУ Стратоновича (11) в ряд Тейлора в окрестности точки t_k [32]:

$$x_{k+1} = x_k + hg(t_k, x_k) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma_{\cdot j_2}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}, \quad (18)$$

где

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} w_{j_1}(\tau) d\tau, \quad I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau_1} dw_{j_2}(\tau_2) \circ dw_{j_1}(\tau_1).$$

В этих выражениях $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)}$ — случайная величина (стохастический интеграл), имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $h = t_{k+1} - t_k$, т. е.

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} = \sqrt{h} \xi_{j_1 k}. \quad (19)$$

Для случайной величины $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$ (повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности) простая моделирующая формула реализуется только при условии $j_1 = j_2$:

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_1 j_1)} = \frac{h}{2} \xi_{j_1 k}^2, \quad (20)$$

если же $j_1 \neq j_2$, то в методе (16) полагается

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)} \approx \frac{h}{2} \xi_{j_1 k} \xi_{j_2 k}, \quad (21)$$

но это довольно грубая аппроксимация повторного стохастического интеграла [31]

$$\mathbb{E}\left(I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}\right)^2 = \frac{h^2}{2}, \quad \mathbb{E}\left(\frac{h}{2} \xi_{j_1 k} \xi_{j_2 k}\right)^2 = \frac{h^2}{4}.$$

Более точную аппроксимацию можно получить с помощью различных подходов. Самый очевидный из них — численное интегрирование. Фактически, моделирование случайной величины $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$ эквивалентно решению системы двух СДУ Стратоновича:

$$dx(t) = dw_{j_2}(t), \quad dy(t) = x(t) \circ dw_{j_1}(t), \quad x(t_k) = y(t_k) = 0, \quad I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)} = y(t_{k+1}),$$

и это решение можно получить приближенно, например методом Эйлера–Маруямы. Такой способ применялся еще в [31], а затем дополнительно исследовался, например, в [52].

Более эффективный подход состоит в применении метода Фурье, он основан на представлении винеровского процесса в виде функционального ряда со случайными коэффициентами. Результатом является представление повторного стохастического интеграла Стратоновича в виде ряда случайных величин. Можно показать [37], что числовые коэффициенты такого ряда — это коэффициенты разложения функции Хевисайда $1(\tau_2 - \tau_1)$ на квадрате $[t_k, t_{k+1}]^2$ в обобщенный ряд Фурье по некоторой полной ортонормированной системе функций, заданной на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. В частности, подобные ряды случайных величин получены относительно полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша и Хаара [31, 36, 43, 53]. Для аппроксимации $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$ достаточно взять частичную сумму ряда случайных величин, а соотношение (21) — это и есть такая аппроксимация со среднеквадратической ошибкой $\varepsilon = h^2/4$.

Введение дополнительных слагаемых в частичную сумму позволяет уменьшить ошибку аппроксимации. Один из таких вариантов наиболее известен, он был предложен в [31]:

$$\begin{aligned} I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)} \approx & \frac{h}{2} \xi_{j_1 k} \xi_{j_2 k} + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m \frac{\mu_{j_1 k i} \xi_{j_2 k} - \xi_{j_1 k} \mu_{j_2 k i}}{i} + \\ & \frac{h}{2\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\nu_{j_1 k i} \mu_{j_2 k i} - \mu_{j_1 k i} \nu_{j_2 k i}}{i} + h \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i^2} \right\}^{\frac{1}{2}} (\mu_{j_1 k 0} \xi_{j_2 k} - \xi_{j_1 k} \mu_{j_2 k 0}), \quad (22) \end{aligned}$$

где случайные величины ξ_{jk} , μ_{jki} при $i = 0, 1, \dots, m$ и ν_{jki} при $i = 1, \dots, m$ имеют стандартное нормальное распределение и независимы в совокупности для всех k и j , а m — заданное натуральное число, от которого зависит среднеквадратическая ошибка аппроксимации случайной величины $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$

$$\varepsilon_m = \frac{h^2}{12} - \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i^2}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = 0,$$

и эта ошибка даже при минимальном m в три раза меньше, чем среднеквадратическая ошибка аппроксимации, соответствующая формуле (21).

Еще один подход к аппроксимации детально описан в [54, 55], там же проведено сравнение с другими подходами, в том числе и не описанными в этой статье.

Хотя в работах [2, 15, 19] методом Мильштейна называют метод (16), правильнее под методом Мильштейна понимать метод (18) с учетом (19), (21) и (22) [31, 32, 36]. Можно предложить его обобщение, а именно следующую модификацию метода типа Розенброка:

$$x_{k+1} = x_k + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial g(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} \times \quad (23)$$

$$\left(hg(t_k, x_k) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma_{\cdot j_2}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)} \right), \quad (24)$$

где также используются формулы (19), (21) и (22).

Более точная аппроксимация случайных величин $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$ для всех j_1, j_2 обеспечивает методу Мильштейна (18) более высокий порядок сильной сходимости по сравнению с методом Эйлера–Маруямы (13), о чём упоминается во введении. Аналогичное свойство справедливо для метода типа Розенброка (23). Данное свойство далее иллюстрируется на примере моделирования вращательной диффузии.

Замечание 1. Метод Мильштейна (18) записан для СДУ Стратоновича (11). Соответствующий метод Мильштейна для СДУ Ито (10) имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma_{\cdot j_2}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_2 j_1)}, \quad (25)$$

где вместо случайной величины $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_2 j_1)}$ используется $I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_2 j_1)}$ (повторный стохастический интеграл Ито второй кратности):

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_2 j_1)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau_1} dw_{j_2}(\tau_2) dw_{j_1}(\tau_1),$$

связанный с системой двух СДУ Ито:

$$dx(t) = dw_{j_2}(t), \quad dy(t) = x(t) dw_{j_1}(t), \quad x(t_k) = y(t_k) = 0, \quad I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_2 j_1)} = y(t_{k+1}).$$

При $j_1 = j_2$ указанные случайные величины удовлетворяют соотношению

$$I_{[t_k, t_{k+1}]}^{*(j_1 j_1)} = I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1 j_1)} + \frac{h}{2},$$

а при $j_1 \neq j_2$ совпадают с вероятностью 1. Фактически имеется два варианта метода Мильштейна: для решения СДУ Стратоновича — (18) и для решения СДУ Ито — (25), они порождают эквивалентные приближенные решения.

Для метода типа Розенброка (23) также можно указать эквивалентную форму

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_k + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial g(t_k, x_k)}{\partial x} \right)^{-1} \times \\ \left(h f(t_k, x_k) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_1)} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}(t_k, x_k)}{\partial x} \sigma_{\cdot j_2}(t_k, x_k) I_{[t_k, t_{k+1}]}^{(j_2 j_1)} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

однако в ней, тем не менее, используется матрица Якоби $\partial g(t, x)/\partial x$, соответствующая СДУ Стратоновича.

Замечание 2. Моделирующие формулы для случайных величин, имеющих нормальное распределение, используют случайные величины с равномерным распределением на интервале $(0, 1)$. Для моделирования последних рекомендуется применять методы, описанные в [56, 57].

Замечание 3. Применение формулы (22) в методе (23) не столь принципиально. Вместо нее можно воспользоваться другими соотношениями, описанными, например, в [36, 38, 43, 54, 55].

Замечание 4. Методы (18) и (23) (или (25) и (26)) имеет смысл применять только для приближенного решения СДУ с мультипликативным шумом для некоммутативного случая. Поясним это на примере векторного линейного СДУ Стратоновича:

$$dx(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^s C_j x(t) \circ dw_j(t), \quad (27)$$

где A и C_j — числовые квадратные матрицы порядка n , $w_j(t)$ — компоненты s -мерного векторного винеровского процесса $\omega(t)$.

При условии $[C_{j_1}, C_{j_2}] = C_{j_1}C_{j_2} - C_{j_2}C_{j_1} = 0$ для всех $j_1, j_2 = 1, \dots, s$ ($j_1 \neq j_2$) методы (18) и (25) совпадают с (16), а методы (23) и (26) совпадают с (17). Аналогичная ситуация может возникать для нелинейных СДУ. Тогда говорят, что рассматривается коммутативный случай (см., например, [15, 19]), иначе — некоммутативный случай.

5. Вычислительный эксперимент

Оценим погрешность аппроксимации первого интеграла $M(t, x) = e^{-2(\alpha^2 - \mu)t} |x|^2 = \text{const}$ для векторного линейного СДУ Ито, описывающего вращательную диффузию в \mathbb{R}^3 [58], при условии $t \in [0, 1]$:

$$dx(t) = -\mu x(t) dt + \alpha(C_1 x(t) dw_1(t) + C_2 x(t) dw_2(t) + C_3 x(t) dw_3(t)), \quad (28)$$

где

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы, μ и α — числовые параметры.

Результат сравнения уравнения (28) с уравнением (10) показывает, что $n = s = 3$ и

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix}, \quad f(t, x) = -\mu \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & -x_0 \\ -x_1 & x_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} = \left(I + \frac{h}{2} \mu I \right)^{-1} = \frac{2}{2 + h\mu} I.$$

Для решения $x(t)$ рассматриваемого уравнения справедлива следующая формула [58]:

$$M(t, x(t)) = e^{-2(\alpha^2 - \mu)t} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) = x_1^2(0) + x_2^2(0) + x_3^2(0), \quad t \geq 0. \quad (29)$$

В работе [61] доказано, что сильную сходимость численных методов можно изучать на СДУ с первым интегралом. Примеры таких СДУ с мультиплекативным шумом приведены в [59, 60], однако они относятся к коммутативному случаю и поэтому на них тестировать методы (18) и (23) нецелесообразно. Рассматриваемый здесь пример соответствует некоммутативному случаю

$$[\alpha C_1, \alpha C_2] = -\alpha^2 C_3, \quad [\alpha C_2, \alpha C_3] = -\alpha^2 C_1, \quad [\alpha C_3, \alpha C_1] = -\alpha^2 C_2.$$

Отметим, что кососимметрическая матрица $\alpha^{-1}\sigma(t, x)$ определяет оператор векторного умножения в правом ортонормированном базисе (C_1, C_2, C_3 — базисные матрицы в пространстве кососимметрических операторов). Это означает, что

$$\sigma(t, x(t)) dw(t) = \alpha x(t) \times dw(t),$$

т. е. $dx(t) = -\mu x(t) dt + \alpha x(t) \times dw(t)$.

Для применения некоторых из представленных в статье численных методов необходимо привести заданное СДУ Ито к СДУ Стратоновича с помощью соотношения (12):

$$dx(t) = (\alpha^2 - \mu)x(t) dt + \alpha(C_1 x(t) \circ dw_1(t) + C_2 x(t) \circ dw_2(t) + C_3 x(t) \circ dw_3(t)),$$

или $dx(t) = (\alpha^2 - \mu)x(t) dt + \alpha x(t) \times dw(t)$, т. е.

$$g(t, x) = (\alpha^2 - \mu) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} = \left(I - \frac{h}{2} (\alpha^2 - \mu) I \right)^{-1} = \frac{2}{2 - h(\alpha^2 - \mu)} I,$$

где I — единичная матрица третьего порядка.

Далее приведены результаты статистической обработки траекторий решения, полученных методом Эйлера–Маруямы (13), методом типа Розенброка (15), методом Мильштейна (18) и методом типа Розенброка (23).

Выбраны следующие шаги численного интегрирования: $h = 0.1; 0.05; 0.025; 0.0125$, а параметр m в формуле (22) равен 8. В таблицах 1–6 указана оценка среднего отклонения ε от многообразия (29):

$$\varepsilon = E|M(T, x_T) - |x_0|^2|,$$

вычисленная как среднее арифметическое по всем траекториям (число таких траекторий 10^4), где x_T — приближенное решение в точке $t = T = 1$. Отметим, что существуют специальные численные методы для СДУ, решение которых принадлежит некоторому многообразию [61–64]. Достаточно, например, модифицировать [61] описанные методы и получить нулевое отклонение от многообразия даже для метода Эйлера–Маруямы, но здесь важно оценить именно это отклонение как характеристику точности.

Соответствие таблиц и параметров:

- табл. 1 : $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/2$ (устойчивое решение);
- табл. 2 : $\alpha = 1$ и $\mu = 2$ (устойчивое решение);
- табл. 3 : $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/4$ ($g(t, x) \equiv 0$);
- табл. 4 : $\alpha = 1/4$ и $\mu = 0$ ($f(t, x) \equiv 0$);
- табл. 5 : $\alpha = 1/2$ и $\mu = -1/2$ (неустойчивое решение);
- табл. 6 : $\alpha = 1$ и $\mu = -1$ (неустойчивое решение).

Таблица 1. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/2$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Метод (13)	1.814982	1.269783	0.890726	0.627526
Метод (15)	1.727952	1.238847	0.879729	0.623626
Метод (18)	0.389675	0.186659	0.090029	0.044983
Метод (23)	0.373858	0.182869	0.089119	0.044765

Таблица 2. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1$ и $\mu = 2$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Метод (13)	8.915621	5.699048	3.782215	2.570750
Метод (15)	7.181850	5.141892	3.596692	2.507324
Метод (18)	8.838162	3.496738	1.556017	0.738822
Метод (23)	7.522905	3.244581	1.501398	0.725925

Таблица 3. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/4$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Метод (13)	1.729984	1.208150	0.883649	0.621233
Метод (15)	1.688589	1.194640	0.877991	0.619220
Методы (18) и (23)	0.285260	0.141264	0.069451	0.035263

Таблица 4. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1/4$ и $\mu = 0$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Методы (13) и (15)	0.433893	0.309639	0.218341	0.151870
Метод (18)	0.019270	0.009739	0.004899	0.002470
Метод (23)	0.021221	0.010669	0.005325	0.002700

Таблица 5. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1/2$ и $\mu = -1/2$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Метод (13)	1.750907	1.227669	0.888082	0.621353
Метод (15)	1.617880	1.175123	0.866387	0.613415
Метод (18)	0.944424	0.496905	0.255070	0.129796
Метод (23)	0.155028	0.078069	0.038819	0.019807

Таблица 6. Отклонение приближенного решения от многообразия при $\alpha = 1$ и $\mu = -1$

Методы	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
Метод (13)	6.574993	4.742061	3.441462	2.461077
Метод (15)	5.603613	4.320991	3.279061	2.393793
Метод (18)	4.857543	2.870230	1.579615	0.831410
Метод (23)	1.715920	0.889603	0.434497	0.217555

Для расчетов при условии $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/4$ характерно то, что результаты для методов (18) и (23) совпадают, так как

$$\left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} = I \quad (\alpha^2 - \mu = 0, g(t, x) \equiv 0).$$

Этот тест соответствует диффузии на сфере [62], остальные тесты более сложные — им соответствует диффузия на динамическом многообразии (сфере, радиус которой меняется) [58].

При условии $\alpha = 1/4$ и $\mu = 0$ в отличие от остальных тестов меньшую погрешность показывает метод Мильштейна (18), это проявляется при условии $\mu \in [0, \alpha^2]$, когда для произвольного t и каждой точки $x \in \mathbb{R}^3$ ($x \neq 0$) векторы $f(t, x)$ и $g(t, x)$ направлены в противоположные стороны. Результаты для методов (13) и (15) совпадают, поскольку

$$\left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} = I \quad (\mu = 0, f(t, x) \equiv 0).$$

На рисунке показаны многообразия: сфера $|x| = |x_0| = \sqrt{14}$ (начальная сфера), соответствующая значению $t = t_0 = 0$, и сфера $|x| = e^{\alpha^2 - \mu}|x_0| = \sqrt{14}e^{\alpha^2 - \mu}$ (конечная сфера), соответствующая значению $t = T = 1$. Левой части рисунка отвечают параметры $\alpha = 1/2$ и $\mu = 1/2$ (радиус начальной сферы больше радиуса конечной сферы), а правой части рисунка — параметры $\alpha = 1/2$ и $\mu = -1/2$ (радиус начальной сферы меньше радиуса конечной сферы). Изображенные траектории соответствуют шагу $h = 0.025$, для них выбраны следующие обозначения: \times для метода Эйлера–Маруямы (13), $+$ для метода типа Розенброка (15), \blacksquare для метода Мильштейна (18) и \blacklozenge для метода типа Розенброка (23).

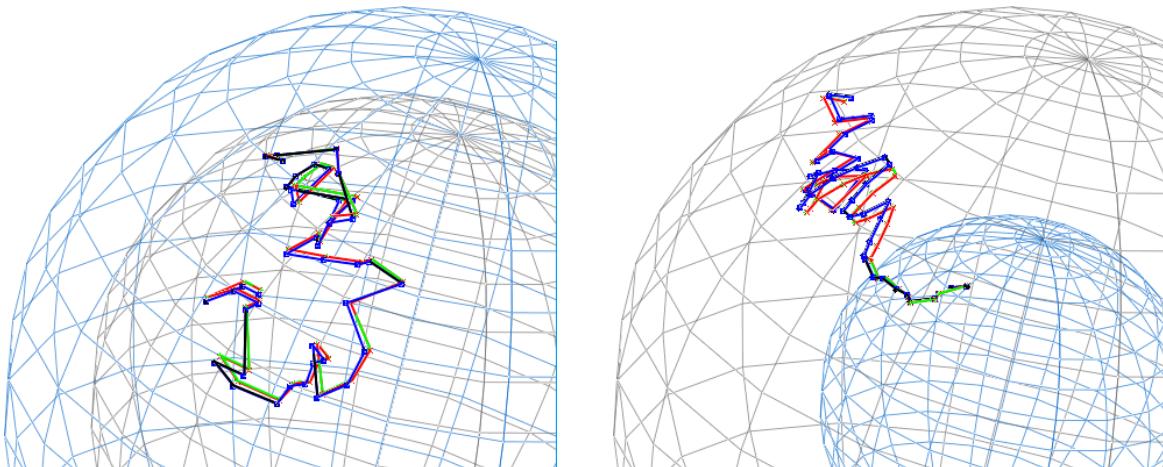


Рис. Траектории, полученные различными численными методами, начальное и конечное многообразия

В большинстве тестов самую высокую точность показывает метод типа Розенброка (23). Методу Эйлера–Маруямы (13) ожидаемо соответствует самая низкая точность. Методы типа Розенброка эффективнее при больших шагах численного интегрирования, причем особенно это заметно для неустойчивых решений.

6. Заключение

В статье сделан обзор публикаций за последние несколько лет, в которых описываются математические модели, включающие СДУ, с приложениями в различных областях. Для решения СДУ исследователи выбирают в основном самый простой в реализации численный метод Эйлера–Маруямы, невысокая точность которого особенно заметна при решении СДУ с мультипликативным шумом. Эта статья показывает, каким образом можно улучшить характеристики численного метода и увеличить точность расчетов, не слишком увеличивая сложность реализации.

Основной результат статьи — новый вариант метода типа Розенброка для СДУ, который имеет лучшие свойства устойчивости, чем методы Эйлера–Маруямы и Мильштейна, а также более высокий порядок сильной сходимости, чем метод Эйлера–Маруямы. Высокая точность этого метода особенно проявляется на СДУ с мультипликативным шумом для некоммутативного случая.

В качестве примера рассмотрена вращательная диффузия на динамическом многообразии, которая обобщает диффузию на сфере с фиксированным радиусом. Рассмотрены устойчивый случай (диффузия на сфере с убывающим радиусом), неустойчивый случай (диффузия на сфере с возрастающим радиусом), граница устойчивости (диффузия на сфере с постоянным радиусом). На этом примере продемонстрированы преимущества предложенного метода.

Литература

1. Geurts B.J., Holm D.D., Luesink E. Lyapunov exponents of two stochastic Lorenz systems // J. Stat. Phys. — 2020. — Vol. 179. — P. 1343–1365. — DOI: 10.1007/s10955-019-02457-3.
2. Waeber S., Yarom A. Stochastic gravity and turbulence // J. High Energ. Phys. — 2021. — Vol. 2021. — Article № 185. — DOI: 10.1007/JHEP12(2021)185.
3. Hirano S. Source time functions of earthquakes based on a stochastic differential equation // Sci. Rep. — 2022. — Vol. 12. — Article № 3936. — DOI: 10.1038/s41598-022-07873-2.
4. Engel A., Parker S.E. Correspondence between open bosonic systems and stochastic differential equations // Eur. Phys. J. Plus. — 2023. — Vol. 138. — Article № 578. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-04205-9.
5. Long G.B., Ou J.W., Zheng Y.G. Power spectrum density of stochastic oscillating accretion disk // J. Astrophys. Astron. — 2016. — Vol. 37. — Article № 10. — DOI: 10.1007/s12036-016-9372-2.
6. Haba Z. Stochastic inflation with quantum and thermal noise // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Vol. 78. — Article № 596. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6078-4.
7. Moloto K.D., Engelbrecht N.E., Strauss R.D. et al. Numerical integration of stochastic differential equations: A parallel cosmic ray modulation implementation on Africa’s fastest computer // Adv. Space Res. — 2019. — Vol. 63, iss. 1. — P. 626–639. — DOI: 10.1016/j.asr.2018.08.048.
8. Cresson J., Nottale L., Lehner T. Stochastic modification of Newtonian dynamics and induced potential — Application to spiral galaxies and the dark potential // J. Math. Phys. — 2021. — Vol. 62, iss. 7. — Article № 072702. — DOI: 10.1063/5.0037265.

9. Singh P., Yeong H.C., Zhang H. et al. Stochastic stability and dynamics of a two-dimensional structurally nonlinear airfoil in turbulent flow // Meccanica. — 2016. — Vol. 51. — P. 2665–2688. — DOI: 10.1007/s11012-016-0445-8.
10. Gao S., Kang M., Li L., Liu X. Estimation of state-of-charge based on unscented Kalman particle filter for storage lithium-ion battery // J. Eng. — 2019. — Vol. 2019, iss. 16. — P. 1858–1863. — DOI: 10.1049/joe.2018.8895.
11. Tasaka N., Satoh S., Hatanaka T., Yamada K. Stochastic stabilization of rigid body motion of a spacecraft on $SE(3)$ // Int. J. Control. — 2021. — Vol. 94, № 5. — P. 1166–1173. — DOI: 10.1080/00207179.2019.1637544.
12. Кудрявцева И.А., Рыбаков К.А. Сравнительный анализ фильтров частиц для стохастических систем с непрерывным и дискретным временем // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2022. — № 5. — С. 29–39. Перевод: Kudryavtseva I.A., Rybakov K.A. Comparative analysis of particle filters for stochastic systems with continuous and discrete time // J. Comput. Syst. Sci. Int. — 2022. — Vol. 61. — P. 741–750. — DOI: 10.1134/S1064230722050112.
13. Zhang X., Yuan R. A stochastic chemostat model with mean-reverting Ornstein–Uhlenbeck process and Monod–Haldane response function // Appl. Math. Comput. — 2021. — Vol. 394. — Article № 125833. — DOI: 10.1016/j.amc.2020.125833.
14. Hening A., Nguyen D.H. Stochastic Lotka–Volterra food chains // J. Math. Biol. — 2018. — Vol. 77. — P. 135–163. — DOI: 10.1007/s00285-017-1192-8.
15. Zhou B., Han B., Jiang D. et al. Stationary distribution, extinction and probability density function of a stochastic vegetation–water model in arid ecosystems // J. Nonlinear Sci. — 2022. — Vol. 32. — Article № 30. — DOI: 10.1007/s00332-022-09789-7.
16. Krikštolaitis R., Mozgeris G., Petrauskas E., Rupšys P. A statistical dependence framework based on a multivariate normal copula function and stochastic differential equations for multivariate data in forestry // Axioms. — 2023. — Vol. 12, № 5. — Article № 457. — DOI: 10.3390/axioms12050457.
17. Dumont G., Northoff G., Longtin A. A stochastic model of input effectiveness during irregular gamma rhythms // J. Comput. Neurosci. — 2016. — Vol. 40. — P. 85–101. — DOI: 10.1007/s10827-015-0583-3.
18. Liu X., Li Q., Pan J. A deterministic and stochastic model for the system dynamics of tumor-immune responses to chemotherapy // Physica A Stat. Mech. Appl. — 2018. — Vol. 500. — P. 162–176. — DOI: 10.1016/j.physa.2018.02.118.
19. Wang Y., Qi K., Jiang D. An HIV latent infection model with cell-to-cell transmission and stochastic perturbation // Chaos Solit. Fractals. — 2021. — Vol. 151. — Article № 111215. — DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111215.
20. Cai S., Cai Y., Mao X. A stochastic differential equation SIS epidemic model with two correlated Brownian motions // Nonlinear Dyn. — 2019. — Vol. 97. — P. 2175–2187. — DOI: 10.1007/s11071-019-05114-2.
21. Zhang W., Meng X., Dong Y. Periodic solution and ergodic stationary distribution of stochastic SIRI epidemic systems with nonlinear perturbations // J. Syst. Sci. Complex. — 2019. — Vol. 32. — P. 1104–1124. — DOI: 10.1007/s11424-018-7348-9.
22. Xu X., Wang G., Hu J., Lu Y. Study on stochastic differential game model in network attack and defense // Secur. Commun. Netw. — 2020. — Vol. 2020. — Article № 3417039. — DOI: 10.1155/2020/3417039.
23. Lefebvre M. Computer virus propagation modelled as a stochastic differential game // Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti. — 2020. — Vol. 98, № 1. — Article № A3. — DOI: 10.1478/AAPP.981A3.

24. **Dipple S., Choudhary A., Flaminio J. et al.** Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities // Appl. Netw. Sci. — 2020. — Vol. 5. — Article № 17. — DOI: 10.1007/s41109-020-00259-1.
25. **Lee M.-K., Kim J.-H.** Closed-form approximate solutions for stop-loss and Russian options with multiscale stochastic volatility // AIMS Math. — 2023. — Vol. 8, № 10. — P. 25164–25194. — DOI: 10.3934/math.20231284.
26. **Hata H., Liu N.-L., Yasuda K.** Expressions of forward starting option price in Hull–White stochastic volatility model // Decisions Econ. Finan. — 2022. — Vol. 45. — P. 101–135. — DOI: 10.1007/s10203-021-00343-w.
27. **Ghosh M., Das P., Das P.** A comparative study of deterministic and stochastic dynamics of rumor propagation model with counter-rumor spreader // Nonlinear Dyn. — 2023. — Vol. 111. — P. 16875–16894. — DOI: 10.1007/s11071-023-08768-1.
28. **Bergeot B., Vergez C.** Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments // Nonlinear Dyn. — 2022. — Vol. 107. — P. 3291–3312. — DOI: 10.1007/s11071-021-07104-9.
29. **Panteleev A.V., Kolessa A.A.** Application of the tomtit flock metaheuristic optimization algorithm to the optimal discrete time deterministic dynamical control problem // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, № 9. — Article № 301. — DOI: 10.3390/a15090301.
30. **Maruyama G.** Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo. — 1955. — Vol. 2, № 4. — P. 48–90.
31. **Мильштейн Г.Н.** Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.
32. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1992.
33. **Rößler A.** Runge–Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 48. — P. 922–952. — DOI: 10.1137/09076636X.
34. **Аверина Т.А.** Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
35. **Averina T.** Conditional optimization of algorithms for estimating distributions of solutions to stochastic differential equations // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, № 4. — Article № 586. — DOI: 10.3390/math12040586.
36. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2018. — № 4. — С. А.1–А.1073.
37. **Kuznetsov D.F.** Strong approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and semilinear SPDEs (third Edition) // Differ. Uravn. Protsesy Upr. — 2023. — № 1. — С. А.1–А.947. — DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.110.
38. **Rybakov K.A.** Spectral representations of iterated stochastic integrals and their application for modeling nonlinear stochastic dynamics // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, № 19. — Article № 4047. — DOI: 10.3390/math11194047.
39. **Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.** SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Itô SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // Differ. Uravn. Protsesy Upr. — 2021. — № 1. — С. 93–422.
40. **Рыбаков К.А.** Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем // Моделирование и анализ данных. — 2023. — Т. 13, № 3. — С. 79–95. — DOI: 10.17759/mda.2023130306.

41. Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
42. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J. — 1963. — Vol. 5. — P. 329–330.
43. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
44. Lang J. Rosenbrock–Wanner methods: Construction and mission // Rosenbrock–Wanner-Type Methods. Theory and Applications / T. Jax et al. — Springer, 2021. — P. 1–17. — DOI: 10.1007/978-3-030-76810-2_1.
45. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Springer, 1996.
46. Аверина Т.А., Артемьев С.С. Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 288, № 4. — С. 777–780. Перевод: Averina T.A., Artemiev S.S. A new family of numerical methods for solving stochastic differential equations // Soviet Math. Dokl. — 1986. — Vol. 3, № 3. — P. 736–738.
47. Zmievskaya G.I., Averina T.A., Bondareva A.L. Numerical solution of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich in an amorphization crystal lattice model // Appl. Numer. Math. — 2015. — Vol. 93, № 7. — P. 15–29. — DOI: 10.1016/J.APNUM.2014.05.006.
48. Averina T.A., Zmievskaya G.I. Numerical modeling of the initial fluctuation condensation stage with charge drops // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — 2016. — Vol. 158. — Article № 012010. — DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012010.
49. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 377–391. Перевод: Rybakov K.A. Solving approximately an optimal nonlinear filtering problem for stochastic differential systems by statistical modeling // Numer. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 6, № 4. — P. 324–336. — DOI: 10.1134/S1995423913040071.
50. Averina T.A., Rybakov K.A. Maximum cross section method in optimal filtering of jump-diffusion random processes // Proc. 15th Inter. Asian School-Seminar “Optimization Problems of Complex Systems” (IEEE OPCS). Novosibirsk, Russia, August 26–30, 2019. — 2019. — P. 8–11. — DOI: 10.1109/OPCS.2019.8880234.
51. Артемьев С.С. Устойчивость численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журнал. — 1994. — Т. 35, № 6. — С. 1210–1214. Перевод: Artem'ev S.S. Stability of numerical methods for solving stochastic differential equations // Sib. Math. J. — 1994. — Vol. 35, № 6. — P. 1070–1074. — DOI: 10.1007/BF02104707.
52. Li C.W., Liu X.Q. Approximation of multiple stochastic integrals and its application to stochastic differential equations // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. — 1997. — Vol. 30, № 2. — P. 697–708. — DOI: 10.1016/S0362-546X(96)00253-2.
53. Рыбаков К.А. Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2023. — № 1. — С. 137–150. — DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.109.
54. Mrongowius J., Rößler A. On the approximation and simulation of iterated stochastic integrals and the corresponding Lévy areas in terms of a multidimensional Brownian motion // Stoch. Anal. Appl. — 2022. — Vol. 40, № 3. — P. 397–425. — DOI: 10.1080/07362994.2021.1922291.
55. Kastner F., Rößler A. An analysis of approximation algorithms for iterated stochastic integrals and a Julia and MATLAB simulation toolbox // Numer. Algor. — 2023. — Vol. 93, № 1. — P. 27–66. — DOI: 10.1007/s11075-022-01401-z.
56. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Изд. центр “Академия”, 2006.

57. **Mikhailov G.A., Marchenko M.A.** Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2002. — Vol. 17, № 1. — P. 113–124. — DOI: 10.1515/rnam-2002-0107.
58. **Карачанская Е.В.** Случайные процессы с инвариантами. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2014.
59. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. of the 2017 Inter. Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (IEEE SIBIRCON). Novosibirsk, Russia, September 18–22, 2017. — 2017. — P. 34–37. — DOI: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109832.
60. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2018. — Vol. 33, № 1. — P. 1–13. — DOI: 10.1515/rnam-2018-0001.
61. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 243–259. Перевод: Averina T.A., Rybakov K.A. A modification of numerical methods for stochastic differential equations with first integrals // Numer. Anal. Appl. — 2019. — Vol. 12, № 3. — P. 203–218. — DOI: 10.1134/S1995423919030017.
62. **Burrage K., Burrage P.M., Lythe G.** Effective numerical methods for simulating diffusion on a spherical surface in three dimensions // Numer. Algor. — 2022. — Vol. 91, № 4. — P. 1577–1596. — DOI: 10.1007/s11075-022-01315-w.
63. **Armstrong J., King T.** Curved schemes for stochastic differential equations on, or near, manifolds // Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2022. — Vol. 478. — Article № 20210785. — DOI: 10.1098/rspa.2021.0785.
64. **Schwarz S., Herrmann M., Sturm A. et al.** Efficient random walks on Riemannian manifolds // Found. Comput. Math. — 2023. — DOI: 10.1007/s10208-023-09635-6.

Поступила в редакцию 4 января 2024 г.
После исправления 28 февраля 2024 г.
Принята к печати 4 марта 2024 г.

Литература в транслитерации

1. **Geurts B.J., Holm D.D., Luesink E.** Lyapunov exponents of two stochastic Lorenz 63 systems // J. Stat. Phys. — 2020. — Vol. 179. — P. 1343–1365. — DOI: 10.1007/s10955-019-02457-3.
2. **Waeber S., Yarom A.** Stochastic gravity and turbulence // J. High Energ. Phys. — 2021. — Vol. 2021. — Article № 185. — DOI: 10.1007/JHEP12(2021)185.
3. **Hirano S.** Source time functions of earthquakes based on a stochastic differential equation // Sci. Rep. — 2022. — Vol. 12. — Article № 3936. — DOI: 10.1038/s41598-022-07873-2.
4. **Engel A., Parker S.E.** Correspondence between open bosonic systems and stochastic differential equations // Eur. Phys. J. Plus. — 2023. — Vol. 138. — Article № 578. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-04205-9.
5. **Long G.B., Ou J.W., Zheng Y.G.** Power spectrum density of stochastic oscillating accretion disk // J. Astrophys. Astron. — 2016. — Vol. 37. — Article № 10. — DOI: 10.1007/s12036-016-9372-2.
6. **Haba Z.** Stochastic inflation with quantum and thermal noise // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Vol. 78. — Article № 596. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6078-4.
7. **Moloto K.D., Engelbrecht N.E., Strauss R.D. et al.** Numerical integration of stochastic differential equations: A parallel cosmic ray modulation implementation on

- Africa's fastest computer // *Adv. Space Res.* — 2019. — Vol. 63, iss. 1. — P. 626–639. — DOI: 10.1016/j.asr.2018.08.048.
- 8. **Cresson J., Nottale L., Lehner T.** Stochastic modification of Newtonian dynamics and induced potential — Application to spiral galaxies and the dark potential // *J. Math. Phys.* — 2021. — Vol. 62, iss. 7. — Article № 072702. — DOI: 10.1063/5.0037265.
 - 9. **Singh P., Yeong H.C., Zhang H. et al.** Stochastic stability and dynamics of a two-dimensional structurally nonlinear airfoil in turbulent flow // *Meccanica*. — 2016. — Vol. 51. — P. 2665–2688. — DOI: 10.1007/s11012-016-0445-8.
 - 10. **Gao S., Kang M., Li L., Liu X.** Estimation of state-of-charge based on unscented Kalman particle filter for storage lithium-ion battery // *J. Eng.* — 2019. — Vol. 2019, iss. 16. — P. 1858–1863. — DOI: 10.1049/joe.2018.8895.
 - 11. **Tasaka N., Satoh S., Hatanaka T., Yamada K.** Stochastic stabilization of rigid body motion of a spacecraft on $SE(3)$ // *Int. J. Control.* — 2021. — Vol. 94, № 5. — P. 1166–1173. — DOI: 10.1080/00207179.2019.1637544.
 - 12. **Kudryavceva I.A., Rybakov K.A.** Sravnitel'nyi analiz fil'trov chastic dlya stokhasticheskikh sistem s nepreryvnym i diskretnym vremenem // *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. — 2022. — № 5. — S. 29–39. Perevod: Kudryavtseva I.A., Rybakov K.A. Comparative analysis of particle filters for stochastic systems with continuous and discrete time // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* — 2022. — Vol. 61. — P. 741–750. — DOI: 10.1134/S1064230722050112.
 - 13. **Zhang X., Yuan R.** A stochastic chemostat model with mean-reverting Ornstein–Uhlenbeck process and Monod–Haldane response function // *Appl. Math. Comput.* — 2021. — Vol. 394. — Article № 125833. — DOI: 10.1016/j.amc.2020.125833.
 - 14. **Hening A., Nguyen D.H.** Stochastic Lotka–Volterra food chains // *J. Math. Biol.* — 2018. — Vol. 77. — P. 135–163. — DOI: 10.1007/s00285-017-1192-8.
 - 15. **Zhou B., Han B., Jiang D. et al.** Stationary distribution, extinction and probability density function of a stochastic vegetation–water model in arid ecosystems // *J. Nonlinear Sci.* — 2022. — Vol. 32. — Article № 30. — DOI: 10.1007/s00332-022-09789-7.
 - 16. **Krikštolaitis R., Mozgeris G., Petrauskas E., Rupšys P.** A statistical dependence framework based on a multivariate normal copula function and stochastic differential equations for multivariate data in forestry // *Axioms*. — 2023. — Vol. 12, № 5. — Article № 457. — DOI: 10.3390/axioms12050457.
 - 17. **Dumont G., Northoff G., Longtin A.** A stochastic model of input effectiveness during irregular gamma rhythms // *J. Comput. Neurosci.* — 2016. — Vol. 40. — P. 85–101. — DOI: 10.1007/s10827-015-0583-3.
 - 18. **Liu X., Li Q., Pan J.** A deterministic and stochastic model for the system dynamics of tumor-immune responses to chemotherapy // *Physica A Stat. Mech. Appl.* — 2018. — Vol. 500. — P. 162–176. — DOI: 10.1016/j.physa.2018.02.118.
 - 19. **Wang Y., Qi K., Jiang D.** An HIV latent infection model with cell-to-cell transmission and stochastic perturbation // *Chaos Solit. Fractals*. — 2021. — Vol. 151. — Article № 111215. — DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111215.
 - 20. **Cai S., Cai Y., Mao X.** A stochastic differential equation SIS epidemic model with two correlated Brownian motions // *Nonlinear Dyn.* — 2019. — Vol. 97. — P. 2175–2187. — DOI: 10.1007/s11071-019-05114-2.
 - 21. **Zhang W., Meng X., Dong Y.** Periodic solution and ergodic stationary distribution of stochastic SIRI epidemic systems with nonlinear perturbations // *J. Syst. Sci. Complex*. — 2019. — Vol. 32. — P. 1104–1124. — DOI: 10.1007/s11424-018-7348-9.
 - 22. **Xu X., Wang G., Hu J., Lu Y.** Study on stochastic differential game model in network attack and defense // *Secur. Commun. Netw.* — 2020. — Vol. 2020. — Article № 3417039. — DOI: 10.1155/2020/3417039.

23. **Lefebvre M.** Computer virus propagation modelled as a stochastic differential game // Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti. — 2020. — Vol. 98, № 1. — Article № A3. — DOI: 10.1478/AAPP.981A3.
24. **Dipple S., Choudhary A., Flaminio J. et al.** Using correlated stochastic differential equations to forecast cryptocurrency rates and social media activities // Appl. Netw. Sci. — 2020. — Vol. 5. — Article № 17. — DOI: 10.1007/s41109-020-00259-1.
25. **Lee M.-K., Kim J.-H.** Closed-form approximate solutions for stop-loss and Russian options with multiscale stochastic volatility // AIMS Math. — 2023. — Vol. 8, № 10. — P. 25164–25194. — DOI: 10.3934/math.20231284.
26. **Hata H., Liu N.-L., Yasuda K.** Expressions of forward starting option price in Hull–White stochastic volatility model // Decisions Econ. Finan. — 2022. — Vol. 45. — P. 101–135. — DOI: 10.1007/s10203-021-00343-w.
27. **Ghosh M., Das P., Das P.** A comparative study of deterministic and stochastic dynamics of rumor propagation model with counter-rumor spreader // Nonlinear Dyn. — 2023. — Vol. 111. — P. 16875–16894. — DOI: 10.1007/s11071-023-08768-1.
28. **Bergeot B., Vergez C.** Analytical prediction of delayed Hopf bifurcations in a simplified stochastic model of reed musical instruments // Nonlinear Dyn. — 2022. — Vol. 107. — P. 3291–3312. — DOI: 10.1007/s11071-021-07104-9.
29. **Panteleev A.V., Kolessa A.A.** Application of the tomtit flock metaheuristic optimization algorithm to the optimal discrete time deterministic dynamical control problem // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, № 9. — Article № 301. — DOI: 10.3390/a15090301.
30. **Maruyama G.** Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo. — 1955. — Vol. 2, № 4. — P. 48–90.
31. **Mil'shtein G.N.** Chislennoe integrirovaniye stokhasticheskikh differencial'nykh uravnenii. — Sverdlovsk: Izd-vo Ural'skogo un-ta, 1988.
32. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1992.
33. **Rößler A.** Runge–Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 48. — P. 922–952. — DOI: 10.1137/09076636X.
34. **Averina T.A.** Statisticheskoe modelirovanie reshenii stokhasticheskikh differencial'nykh uravnenii i sistem so sluchainoi strukturoi. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2019.
35. **Averina T.** Conditional optimization of algorithms for estimating distributions of solutions to stochastic differential equations // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, № 4. — Article № 586. — DOI: 10.3390/math12040586.
36. **Kuznetsov D.F.** Stokhasticheskie differencial'nye uravneniya: teoriya i praktika chislennogo resheniya. S programmami v srede MATLAB // Diff. uravn. i proc. upravl. — 2018. — № 4. — S. A.1–A.1073.
37. **Kuznetsov D.F.** Strong approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and semilinear SPDEs (third Edition) // Differ. Uravn. Protsesy Upr. — 2023. — № 1. — S. A.1–A.947. — DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.110.
38. **Rybakov K.A.** Spectral representations of iterated stochastic integrals and their application for modeling nonlinear stochastic dynamics // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, № 19. — Article № 4047. — DOI: 10.3390/math11194047.
39. **Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.** SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Itô SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // Differ. Uravn. Protsesy Upr. — 2021. — № 1. — S. 93–422.

40. **Rybakov K.A.** Algoritmicheskoe obespechenie chislenno-spektral'nykh metodov modelirovaniya stokhasticheskikh dinamicheskikh sistem // Modelirovanie i analiz dannykh. — 2023. — T. 13, № 3. — C. 79–95. — DOI: 10.17759/mda.2023130306.
41. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
42. **Rosenbrock H.H.** Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Comput. J. — 1963. — Vol. 5. — P. 329–330.
43. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
44. **Lang J.** Rosenbrock–Wanner methods: Construction and mission // Rosenbrock–Wanner-Type Methods. Theory and Applications / T. Jax et al. — Springer, 2021. — P. 1–17. — DOI: 10.1007/978-3-030-76810-2_1.
45. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Springer, 1996.
46. **Averina T.A., Artem'ev S.S.** Novoe semeistvo chislennykh metodov resheniya stokhasticheskikh differencial'nykh uravnenii // Doklady AN SSSR. — 1986. — T. 288, № 4. — S. 777–780. Perevod: Averina T.A., Artemiev S.S. A new family of numerical methods for solving stochastic differential equations // Soviet Math. Dokl. — 1986. — Vol. 3, № 3. — P. 736–738.
47. **Zmievskaya G.I., Averina T.A., Bondareva A.L.** Numerical solution of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich in an amorphization crystal lattice model // Appl. Numer. Math. — 2015. — Vol. 93, № 7. — P. 15–29. — DOI: 10.1016/J.APNUM.2014.05.006.
48. **Averina T.A., Zmievskaya G.I.** Numerical modeling of the initial fluctuation condensation stage with charge drops // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — 2016. — Vol. 158. — Article № 012010. — DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012010.
49. **Rybakov K.A.** Priblizhennoe reshenie zadachi optimal'noi nelineinoi fil'tracii dlya stokhasticheskikh differencial'nykh sistem metodom statisticheskikh ispytanii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2013. — T. 16, № 4. — S. 377–391. Perevod: Rybakov K.A. Solving approximately an optimal nonlinear filtering problem for stochastic differential systems by statistical modeling // Numer. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 6, № 4. — P. 324–336. — DOI: 10.1134/S1995423913040071.
50. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Maximum cross section method in optimal filtering of jump-diffusion random processes // Proc. 15th Inter. Asian School-Seminar “Optimization Problems of Complex Systems” (IEEE OPCS). Novosibirsk, Russia, August 26–30, 2019. — 2019. — P. 8–11. — DOI: 10.1109/OPCS.2019.8880234.
51. **Artem'ev S.S.** Ustoichivost' chislennykh metodov resheniya stokhasticheskikh differencial'nykh uravnenii // Sib. mat. zhurnal. — 1994. — T. 35, № 6. — S. 1210–1214. Perevod: Artem'ev S.S. Stability of numerical methods for solving stochastic differential equations // Sib. Math. J. — 1994. — Vol. 35, № 6. — P. 1070–1074. — DOI: 10.1007/BF02104707.
52. **Li C.W., Liu X.Q.** Approximation of multiple stochastic integrals and its application to stochastic differential equations // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. — 1997. — Vol. 30, № 2. — P. 697–708. — DOI: 10.1016/S0362-546X(96)00253-2.
53. **Rybakov K.A.** Osobennosti razlozheniya kratnykh stokhasticheskikh integralov Stratonovicha s primeneniem funktsii Uolsha i Khaara // Diff. uravn. i proc. upravl. — 2023. — № 1. — S. 137–150. — DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.109.
54. **Mrongowius J., Rößler A.** On the approximation and simulation of iterated stochastic integrals and the corresponding Lévy areas in terms of a multidimensional Brownian motion // Stoch. Anal. Appl. — 2022. — Vol. 40, № 3. — P. 397–425. — DOI: 10.1080/07362994.2021.1922291.

55. **Kastner F., Rößler A.** An analysis of approximation algorithms for iterated stochastic integrals and a Julia and MATLAB simulation toolbox // Numer. Algor. — 2023. — Vol. 93, № 1. — P. 27–66. — DOI: 10.1007/s11075-022-01401-z.
56. **Mikhailov G.A., Voitishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — M.: Izd. centr “Akademiya”, 2006.
57. **Mikhailov G.A., Marchenko M.A.** Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2002. — Vol. 17, № 1. — P. 113–124. — DOI: 10.1515/rnam-2002-0107.
58. **Karachanskaya E.V.** Sluchainye processy s invariantami. — Khabarovsk: Izd-vo Tikhookeanskogo gos. un-ta, 2014.
59. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. of the 2017 Inter. Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (IEEE SIBIRCON). Novosibirsk, Russia, September 18–22, 2017. — 2017. — P. 34–37. — DOI: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109832.
60. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2018. — Vol. 33, № 1. — P. 1–13. — DOI: 10.1515/rnam-2018-0001.
61. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Modifikaciya chislennykh metodov resheniya stokhasticheskikh differencial'nykh uravnenii s pervym integralom // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2019. — T. 22, № 3. — S. 243–259. Perevod: Averina T.A., Rybakov K.A. A modification of numerical methods for stochastic differential equations with first integrals // Numer. Anal. Appl. — 2019. — Vol. 12, № 3. — P. 203–218. — DOI: 10.1134/S1995423919030017.
62. **Burrage K., Burrage P.M., Lythe G.** Effective numerical methods for simulating diffusion on a spherical surface in three dimensions // Numer. Algor. — 2022. — Vol. 91, № 4. — P. 1577–1596. — DOI: 10.1007/s11075-022-01315-w.
63. **Armstrong J., King T.** Curved schemes for stochastic differential equations on, or near, manifolds // Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2022. — Vol. 478. — Article № 20210785. — DOI: 10.1098/rspa.2021.0785.
64. **Schwarz S., Herrmann M., Sturm A. et al.** Efficient random walks on Riemannian manifolds // Found. Comput. Math. — 2023. — DOI: 10.1007/s10208-023-09635-6.

