УДК 608, 614, 53.04, 53.09

О СТОЛКНОВЕНИИ УДАРНИКА С МЕМБРАНОЙ

Г. П. Черепанов

Нью-Йоркская академия наук, Нью-Йорк, США
E-mail: genacherepanov@hotmail.com

Исследуется задача о столкновении ударника с мембраной при следующих предположениях: броня представляет собой мембрану с нулевой жесткостью на изгиб и большим модулем Юнга при растяжении; передняя часть ударника имеет форму параболоида; соударение ударника с мембраной рассматривается в квазистатической постановке; разрыв мембраны происходит при некотором предельном натяжении поверхности в вершине параболоида. Установлено, что броня является безопасной, если кинетическая энергия ударника не превышает некоторого максимального значения для этой брони, определенного теоретически или экспериментально.

Ключевые слова: ударник, броня, критическая кинетическая энергия ударника.

DOI: 10.15372/PMTF20210511

Введение. С появлением новых сверхпрочных сверхлегких материалов [1] значительно возрос интерес к обеспечению прочности бронежилетов. Новые ультратонкие композиты с прочностью на разрыв, в 200 раз большей, чем у конструкционной стали, обеспечивают надежную защиту. В данной работе на основе точных расчетов при моделировании соударения ударника с бронированной оболочкой задаются необходимые условия защиты брони.

Допущения, принимаемые при моделировании. Наиболее важным предположением является то, что рассматриваемая броня представляет собой мембрану, т. е. оболочку с нулевой жесткостью на изгиб, подобную поверхностной пленке жидкости. Это предположение справедливо в случае бронежилета из графена вследствие его очень малой толщины и очень большого модуля Юнга при растяжении, превышающего модуль Юнга для конструкционной стали приблизительно в 200 раз. Эти свойства позволяют не учитывать процесс распространения динамической волны при реальном времени действия и при реальных размерах бронежилетов, а значит, удар можно считать квазистатическим. Считается, что ударник имеет форму усеченного параболоида. Предполагается, что в момент удара он является абсолютно жестким, а затем учитывается изменение его формы.

В результате получаем контактную задачу о жестком параболоиде, вершина которого прижата к плоской мембране, растянутой за счет сильного натяжения. Предполагается, что линейный размер площадки контакта мал или сравним с радиусом кривизны параболоида в его вершине. Обозначим через α угол между прямолинейной траекторией ударника и плоскостью мембраны.

В области контакта D поверхность параболоида совпадает с поверхностью мембраны, представляющей собой эллиптический параболоид:

$$z = \frac{x^2}{d(1+\cos\alpha)} + \frac{y^2}{d(1-\cos\alpha)}. \tag{1}$$

Здесь d — диаметр кривизны ударника в вершине; $z = 0$ — плоскость мембраны до удара; $y = 0$ — плоскость, в которой находится траектория ударника и которая перпендикулярна плоскости, где находится мембрана в начальном состоянии; $Oxyz$ — прямоугольная декартова система координат, начало которой находится в вершине, а ось z перпендикулярна плоскости мембраны.

Сила сопротивления N направлена вдоль оси z, напряжение сдвига в области контакта пренебрежимо мало, поэтому им можно пренебречь. Требуется определить форму и размер неизвестной области контакта D в плоскости (x, y).

Смещение w оболочки мембраны удовлетворяет уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p}{\gamma}\,\theta, \tag{2}$$

где γ — сила натяжения оболочки мембраны; p — давление на параболоид в области D, где $\theta = 1$ (вне области D $\theta = 0$).

Внутри области D смещение w направлено вдоль оси z. С использьзованием уравнений (1), (2) находим

$$p = \frac{4\gamma}{d\sin^2\alpha}.$$

В случае если траектория ударника перпендикулярна плоскости оболочки (нормальный удар), причем $\alpha = \pi/2$, имеем

$$z = \frac{x^2+y^2}{d}, \qquad p = \frac{4\gamma}{d}.$$

В случае нормального удара задача является осесимметричной. При этом область контакта представляет собой круг радиусом R, который зависит от глубины проникания пули и находится в результате решения задачи.

Определение неизвестной области контакта D. Данная контактная задача является нелинейной краевой задачей с заранее неизвестной границей. Для таких задач в общем случае отсутствуют теоремы существования и единственности, поэтому лишь небольшое число этих задач было решено аналитически и изучено с использованием комплексных переменных, аналитического продолжения, теоремы Римана и метода функциональных уравнений. Метод функциональных уравнений был предложен в работе [2], а затем использован автором при аналитическом решении многих задач с искомыми границами в теории упругости, гидродинамике, теориях пластичности и теплопроводности, фильтрации, вязкоупругости, механике разрушения (см., например, [3, 4]). Введем комплексную переменную

$$\xi = x + iy. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) вне области D имеет вид

$$w = \operatorname{Re} f(\xi),$$

где $f(\xi)$ — аналитическая функция, которую необходимо найти. Производная этой функции равна

$$f'(\xi) = \frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4}$$

Функции $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$ непрерывны на искомом контуре C_D области контакта D, поскольку нормальная и касательная производные от смещения мембраны на этом контуре должны совпадать с соответствующими значениями для параболоида.

С использованием уравнений (1), (4) получаем уравнение на неизвестном контуре C_D физической плоскости

$$f'(\xi) = \frac{2x}{d(1+\cos\alpha)} - i\,\frac{2y}{d(1-\cos\alpha)}, \qquad \xi \in C_D. \tag{5}$$

С помощью конформного отображения

$$\xi = \omega(\zeta) \tag{6}$$

преобразуем внешность единичной окружности $|\zeta| \geqslant 1$ на параметрической плоскости комплексной переменной ζ в область, расположенную вне неизвестной области D физической плоскости.

Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять условию $\omega(\zeta) \to \infty$ при $\zeta \to \infty$, а ось x должна быть действительной осью плоскости ζ. Согласно теореме Римана таким образом однозначно определяется аналитическая функция $\omega(\zeta)$.

Уравнения (3), (6) можно записать в виде

$$2x = \omega(\zeta) + \overline{\omega(\zeta)}, \qquad 2iy = \omega(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)}. \tag{7}$$

Используя уравнения (5), (7), получаем следующую краевую задачу для внешности единичной окружности $|\zeta| = 1$ на параметрической ζ-плоскости:

$$d\sin^2\alpha G(\zeta) + 2\cos\alpha\omega(\zeta) = 2\,\overline{\omega(\zeta)}. \tag{8}$$

Здесь

$$G(\zeta) = f'(\omega(\zeta)), \qquad |\zeta| = 1. \tag{9}$$

Из краевых условий (8), (9) необходимо найти аналитические функции $\omega(\zeta)$ и $G(\zeta)$, имеющие полюс первого порядка на бесконечности. Для решения этой задачи применим метод функциональных уравнений [2–4]. Сначала аналитически продолжается уравнение (8) с единичной окружности на всю ζ-плоскость. В результате получаем следующее функциональное уравнение на ζ-плоскости:

$$d\sin^2\alpha\, G(\zeta) + 2\cos\alpha\,\omega(\zeta) = 2\bar{\omega}(\zeta^{-1}). \tag{10}$$

Функции $\omega(\zeta)$ и $G(\zeta)$ имеют простые полюсы на бесконечности. Уравнение (10) может быть выполнено при использовании только первых двух членов разложений Тейлора этих функций:

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + c_1/\zeta, \qquad \bar{\omega}(\zeta^{-1}) = \bar{c}_0/\zeta + \bar{c}_1\zeta; \tag{11}$$

$$G(\zeta) = \frac{2}{d\sin^2\alpha}\Big(\bar{c}_1\zeta - c_0\zeta\cos\alpha + \frac{\bar{c}_0 - c_1\cos\alpha}{\zeta}\Big). \tag{12}$$

Здесь константы c_0, c_1 должны быть действительными, поскольку ось x является действительной осью на плоскости ζ. При $\zeta \to \infty$ функция $G(\zeta)$ должна быть ограничена, следовательно,

$$c_1 = c_0\cos\alpha. \tag{13}$$

Из уравнения равновесия мембраны следует

$$f'(\zeta) = \frac{N}{2\pi\gamma\zeta}, \qquad \zeta \to \infty. \tag{14}$$

Здесь N — эквивалентная сила реакции мембраны, равная силе сопротивления, действующей на ударник.

Используя уравнения (12), (13), получаем

$$G(\zeta) = \frac{2c_0}{d\zeta}. \tag{15}$$

Из уравнений (11), (14) следует

$$G(\zeta) = \frac{N}{2\pi\gamma c_0 \zeta}, \qquad \zeta \to \infty, \tag{16}$$

из уравнений (15), (16) находим

$$c_0^2 = \frac{dN}{4\pi\gamma}.$$

Таким образом, искомое решение функционального уравнения (10) имеет вид

$$\omega(\zeta) = z = x + iy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{dN}{\pi\gamma}}\left(\zeta + \frac{\cos\alpha}{\zeta}\right), \qquad G(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\sqrt{\frac{N}{\pi\gamma d}}.$$

При $|\zeta| = 1$, т. е. при $\zeta = \mathrm{e}^{i\theta}$, получаем

$$x = R\cos\theta\,(1 + \cos\alpha), \qquad y = R\sin\theta\,(1 - \cos\alpha), \tag{17}$$

где

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{dN}{\pi\gamma}}.$$

Согласно параметрическому уравнению (17) искомый контур области контакта представляет собой эллипс:

$$\frac{x^2}{(1+\cos\alpha)^2} + \frac{y^2}{(1-\cos\alpha)^2} = R^2.$$

Его большая ось ориентирована в направлении начальной траектории ударника. При $\alpha = \pi/2$ ударник движется перпендикулярно мембране и область контакта представляет собой круг:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Это наиболее важный частный случай, поскольку при этом имеет место максимальный импульс удара ударника.

Метод функциональных уравнений. Метод функциональных уравнений может быть использован при решении широкого класса линейных или нелинейных краевых задач для искомой аналитической функции $g(\zeta)$. Пусть

$$B\{g(\zeta), \overline{g(\zeta)}\,\} = 0, \qquad |\zeta| = 1. \tag{18}$$

Здесь $B(g, \bar{g})$ — некоторая аналитическая функция двух переменных g и $\bar{g}$. Функциональное уравнение, соответствующее этому граничному условию, имеет вид

$$B\{g(\zeta), \bar{g}(\zeta^{-1})\,\} = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) является аналитическим продолжением уравнения (18) на всю комплексную плоскость ζ.

В ряде работ используется ряд Тейлора в качестве решения краевой задачи для уравнения (18) без построения соответствующего функционального уравнения (19).

Метод функциональных уравнений аналогичен методу Винера — Хопфа, который используется при решении некоторых смешанных краевых задач математической физики. В настоящее время все известные аналитические решения двумерных задач о кручении, плоском напряженном состоянии и плоской деформации для идеально упругопластических материалов получены или могут быть получены с использованием метода функциональных уравнений. Например, этот метод был использован для решения классической упругопластической задачи для тонкой или очень толстой пластины с круглым отверстием, находящимся внутри зоны пластичности [3–5].

Данный метод может быть применен также в случае тонких или очень толстых пластин с отверстием эллиптической или более сложной формы, которое находится внутри зоны пластичности.

Нормальный удар. Приведем решение задачи при угле падения ударника $\alpha = \pi/2$. В этом случае очевидно, что ударник может нанести максимальный урон. Задача является осесимметричной, поэтому вместо уравнения (2) имеем уравнение равновесия мембраны

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\Big(\rho\,\frac{dw}{d\rho}\Big) = \frac{p}{\gamma}\,\theta, \tag{20}$$

где ρ — радиус.

Следует отметить, что прогиб нерастяжимой мембраны происходит вследствие ее смещения в горизонтальной плоскости. Решая уравнение (20), получаем следующие уравнения:

$$w = \begin{cases} \rho^2/d, & \rho \leqslant R, \\ (R^2/d)(1 + 2\ln(\rho/R)), & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Функция $w(\rho)$ и ее производная непрерывны на границе зоны контакта:

$$\rho \leqslant R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{dN}{\pi\gamma}}.$$

Уравнение движения ударника имеет вид

$$m\,\frac{dV}{dt} = -N, \quad V = \delta\,\frac{dw_0}{dt}, \quad w_0 = \frac{R^2}{d} = \frac{N}{4\pi\gamma}, \quad t \geqslant 0. \tag{21}$$

Здесь m, V — масса и скорость ударника; t — время с момента удара при $t = 0$; δ — некоторая постоянная. Предполагается, что скорость ударника прямо пропорциональна скорости вертикального смещения границы области контакта $\rho = R$. Из анализа размерностей следует, что в данной модели это единственная величина, которая связана со скоростью ударника и может оказывать влияние на процесс соударения.

В результате решения уравнения (21) получаем

$$N = \frac{\delta m V_0}{\tau}\,\sin\frac{t}{\tau}, \quad V = V_0\cos\frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta m}{\pi\gamma}}, \quad 0 < \frac{t}{\tau} < \pi$$

(V_0 — начальная скорость ударника). Время удара равно $\pi\tau$, следовательно, при $t > \pi\tau$ ударник либо проникает в мембрану, либо отскакивает от нее.

Максимальное значение силы сопротивления

$$N = \delta m V_0/\tau = 2V_0\sqrt{\pi\delta m\gamma}$$

достигается при $t = \pi\tau/2$. Максимальная сила сопротивления мембраны равна

$$N_F = 2V_0\sqrt{\pi\delta m\gamma}.$$

Таким образом, если

$$K = mV_0^2/2 < K_F = N_F^2/(8\pi\delta\gamma)$$

(K_F — предельная кинетическая энергия ударника, при которой он проникает в мембрану), мембрана выдержит удар и ударник не проникнет внутрь. Неразрушающая кинетическая энергия ударника является основной характеристикой безопасности бронежилета.

Анализ полученного решения показывает, что результаты расчетов могут быть использованы при оценке прочности бронежилетов из любых других материалов.

Заключение. В работе выполнена оценка безопасности бронежилета. Показано, что основной характеристикой безопасности является предельная величина кинетической энергии ударника. Поскольку деформация ударника не учитывается, полученная оценка является верхней оценкой безопасности бронежилета.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д., Баимова Ю. А., Мулюков Р. Р.** Механические свойства, устойчивость, коробление графеновых листов и углеродных нанотрубок (обзор) // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 5. С. 175–189.
2. **Cherepanov G. P.** On a method of the solution of elastic-plastic problems // J. Appl. Math. Mech. 1963. V. 27, N 3. P. 428–435.
3. **Cherepanov G. P.** The buckling of membranes with holes under extension // J. Appl. Math. Mech. 1963. V. 27, N 2. P. 243–256.
4. **Cherepanov G. P.** Invariant integrals in physics. Cham: Springer, 2019.
5. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.

Поступила в редакцию 18/V 2021 г.,
после доработки — 3/VI 2021 г.
Принята к публикации 26/VII 2021 г.