

УДК 532.5.013.2 + 532.593 + 532.529

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ И ИЗЛУЧЕНИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА В УСЛОВИЯХ АНОМАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОСТИ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Кедринский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: kedr@hydro.nsc.ru

Предложено уравнение пульсации одиночной полости в аномально сжимаемой равновесной по давлению пузырьковой жидкости, состояние которой описывается уравнением Ляхова. В равновесном случае это уравнение существенно упрощается. Выполнен численный анализ особенностей динамики пузырька и акустических потерь (профиля и амплитуды волны излучения, которая генерируется на стенке пузырька со стороны жидкости). Показано, что по мере увеличения объемной концентрации газа  $k_0$  в равновесной пузырьковой среде степень сжатия полости стационарной ударной волной понижается, а ее колебания существенно уменьшаются и уже при  $k_0 = 3\%$  исчезают. При этом полость в процессе сжатия асимптотически выходит на равновесное состояние, которое не зависит от значения  $k_0$ , а определяется только амплитудой ударной волны. Профиль волны излучения принимает форму “солитона”, амплитуда которого существенно меньше, а ширина существенно больше по сравнению с соответствующими параметрами в однофазной жидкости.

Ключевые слова: динамика, излучение, одиночный пузырек, аномальная сжимаемость.

**Введение.** Несмотря на то что теоретические исследования пузырьковых сред проводятся в течение длительного времени, до сих пор не удается построить “коллективный” потенциал скорости, который позволил бы вывести уравнение пульсации отдельного пузырька в системе взаимодействующих пузырьков. Например, в таких моделях, как модель Иорданского — Когарко — Вингардена (ИКВ-модель), это взаимодействие учитывается косвенно, через поле давления [1–3]. Основная особенность ИКВ-модели состоит в том, что пузырьковая среда рассматривается как однородная, в которой определены осредненные плотность, давление и скорость. Состояние среды в каждый момент времени описывается системой соотношений, включающих уравнения состояния для смеси, жидкого и газообразного компонентов, которые замыкаются кинетическим уравнением — уравнением Рэлея для одиночного пузырька, в правой части которого давление на бесконечности заменяется средним давлением в среде [4]. Это означает, что, по сути, в ИКВ-модели и ее численных аналогах пузырьки отсутствуют, а учитывается особое свойство рассматриваемой среды — пульсационный характер изменения состояния и своеобразная перекачка энергии волнового поля в кинетическую и внутреннюю энергию среды и обратно. При этом, если возникает необходимость, модель позволяет предсказать, что происходит с лю-

бым пузырьком в системе в любой точке исследуемого пространства. Такое представление о взаимодействии поля и среды оказалось адекватным реальным физическим процессам, происходящим не только в искусственно созданных пузырьковых системах при их взаимодействии с ударными волнами [4–6], но и в жидких средах с природными микронеоднородностями, в которых при динамическом нагружении волнами (фазами) разрежения развиваются кавитационные процессы [7].

По-видимому, одну из первых попыток построить “коллективный” потенциал предпринял Р. М. Гарипов [8]. Исследованию простейшей схемы взаимодействия двух пузырьков и излучаемых ими волн давления посвящена работа [9], в которой сделан вывод о существенной роли сжимаемости жидкой фазы. Этот вывод достаточно очевиден, поскольку в [9] рассматривалось излучение пузырьков. Показано, что некоторые специальные комбинации начальных радиусов двух пузырьков и начальных давлений газа в них приводят к генерации меньшим пузырьком высоких импульсов давления с амплитудами, в шесть раз превышающими амплитуду излучения одиночного пузырька. Данный эффект исчезает, если пузырьки имеют одинаковый размер. Можно предположить, что механизм этого явления обусловлен пересжатием меньшего пузырька ударной волной, генерируемой большим пузырьком. Модель распространения возмущений, учитывающая сжимаемость несущей фазы, т. е. соответствующая обеим (высоко- и низкочастотной) ветвям дисперсионной кривой, предложена в работе [10]. Заметим, что хотя двухфазная модель косвенно учитывает “коллективную” пульсацию пузырьков через поле среднего давления, состояния обеих фаз при этом “существуют” как бы раздельно. Таким образом, пульсации пузырька под действием среднего давления и его потери на излучение рассматриваются в несущей однофазной среде. В такой ситуации необходимо выяснить, все ли преимущества модели осреднения учтены. Как известно, пузырьковая среда представляет собой гомогенную систему, обладающую важной физической особенностью — аномальной сжимаемостью, которая проявляется в том, что возмущения распространяются с аномально низкими скоростями. Возникает вопрос: должна ли эта особенность проявляться и в поведении “коллективного” пузырька в такой системе? В данной работе построена модель, описывающая динамику и излучение одиночного пузырька в условиях аномальной сжимаемости пузырьковой жидкости. Выполнены численные оценки особенностей его поведения в такой среде.

**Постановка задачи.** Рассматривается динамика одиночного пузырька в сжимаемой пузырьковой жидкости. Течение потенциальное,  $u = -\nabla\varphi$ , потенциал скорости в сжимаемой пузырьковой жидкости имеет стандартный вид

$$\varphi = \Phi(t - r/c_b)/r, \quad (1)$$

где  $c_b^2 = c_l^2/(1 + k_0\bar{B})$  — квадрат скорости звука в невозмущенной пузырьковой среде;  $k_0$  — объемная концентрация газовой фазы;  $\bar{B} = nB/p_0$ ,  $n$ ,  $B$  — константы в уравнении состояния жидкого компонента. Тогда массовая скорость определяется выражением

$$u = \Phi/r^2 + \Phi'/(c_b r), \quad (2)$$

где штрих означает производную по  $\zeta = t - r/c_b$ , а интеграл Коши — Лагранжа с учетом (1) принимает вид

$$\Phi' = r(\omega + u^2/2) \quad (3)$$

( $\omega = \int dp/\rho$  — энтальпия). Введя функцию  $\Omega = \omega + u^2/2$ , из уравнений (2), (3) можно найти выражения для  $\Phi$  и ее производной:

$$\Phi = r^2(u - \Omega/c_b), \quad \Phi' = r^2(u_t - \Omega_t/c_b) = r^2[u_t - (\omega_t + uu_t)/c_b]. \quad (4)$$

Здесь  $\Phi_t = \Phi'$ . Из законов сохранения

$$u_r + \frac{2u}{r} = -\frac{1}{c_b^2} \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial r} = -\frac{du}{dt}$$

найдем производные  $u_t$  и  $\omega_t$ :

$$\frac{du}{dt} + \frac{2u^2}{r} + \frac{u}{c_b^2} \frac{d\omega}{dt} = u_t, \quad \omega_t = u \frac{du}{dt} + \frac{d\omega}{dt}.$$

Подставляя эти производные в (4), с учетом (3) получим

$$r \left(1 - \frac{2u}{c_b}\right) \frac{du}{dt} + \frac{3}{2} u^2 \left(1 - \frac{4u}{3c_b}\right) = \omega + \frac{r}{c_b} \left(1 - \frac{u}{c_b} + \frac{u^2}{c_b^2}\right) \frac{d\omega}{dt}. \quad (5)$$

Если на стенке полости  $r = R$ ,  $u = \dot{R}$ ,  $\omega = H$ , то уравнение (5) принимает вид

$$R \left(1 - \frac{2\dot{R}}{c_b}\right) \ddot{R} + \frac{3\dot{R}^2}{2} \left(1 - \frac{4\dot{R}}{3c_b}\right) = H + \frac{R}{c_b} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_b} + \frac{\dot{R}^2}{c_b^2}\right) \frac{dH}{dt}. \quad (6)$$

Для того чтобы определить энтальпию  $H$  на стенке полости, будем считать, что вне полости выполняется условие равновесного состояния пузырьковой среды по давлению. Тогда уравнение состояния в форме уравнения Ляхова [11]

$$\rho_0/\rho = k(p/p_0)^{-1/\gamma} + (1-k)P^{-1/n},$$

где  $P = 1 + n(p - p_0)/(\rho_l c_l^2)$  порядка единицы, для изотермического случая при условии равновесности фаз по давлению ( $pk = p_0 k_0$ ) принимает вид

$$\rho_0/\rho = k_0(p_0/p)^2 + 1 - k_0(p_0/p).$$

Энтальпия на стенке полости определяется интегралом

$$H = \frac{1}{\rho_0} \int_{p_\infty}^{p(R)} \frac{\rho_0}{\rho} dp = \frac{1}{\rho_0} \int_{p_\infty}^{p(R)} \left[ k_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^2 + 1 - k_0 \frac{p_0}{p} \right] dp,$$

и, следовательно,

$$H = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho_l(1 - k_0)} + \frac{p_0 k_0}{\rho_l(1 - k_0)} \left[ \frac{p_0}{p_\infty} - \frac{p_0}{p(R)} - \ln \frac{p(R)}{p_\infty} \right].$$

В этом выражении вторым членом можно пренебречь. В результате получаем

$$H = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho_l(1 - k_0)}.$$

С учетом производной от энтальпии уравнение пульсации полости (6) в пузырьковой среде окончательно принимает вид

$$R \left(1 - \frac{2\dot{R}}{c_b}\right) \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4\dot{R}}{3c_b}\right) = \frac{p(R)}{\rho_l(1 - k_0)} \left[ 1 - 3\gamma \left( \frac{\dot{R}}{c_b} - \frac{\dot{R}^2}{c_b^2} + \frac{\dot{R}^3}{c_b^3} \right) \right] - \frac{p_\infty}{\rho_l(1 - k_0)}. \quad (7)$$

Очевидно, для малых значений объемной концентрации  $k_0$  пузырьковой среды, в которой находится исследуемая сферическая полость, внешнее давление  $p_\infty$  можно считать не зависящим от  $k_0$ , а установление равновесия по давлению в этой среде — мгновенным. Акустические потери (излучение) учитываются членом

$$P^* = -\frac{3\gamma p(R)}{\rho_l(1 - k_0)} \left( \frac{\dot{R}}{c_b} - \frac{\dot{R}^2}{c_b^2} + \frac{\dot{R}^3}{c_b^3} \right),$$

входящим в правую часть уравнения (7). Роль акустических поправок  $\dot{R}/c_b$  в левой части уравнения легко определить следующим образом. Умножив обе части равенства на  $2R^2$ , левую часть уравнения (7) можно привести к виду

$$\frac{d}{dR} R^3 \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\dot{R}}{c_b}\right),$$

что позволяет выписать первый интеграл уравнения (7). Решение уравнения (7) без учета потерь на излучение (пренебрегается членом с производной  $dH/dt$ ) показывает, что приведенные выше поправки влияют только на период пульсации пузырька. Заметим, что по аналогии с постановкой задачи о взаимодействии двух одинаковых пузырьков, рассмотренной в [9], в первом приближении можно найти потенциал в окрестности центрального из  $N$  пузырьков, равномерно распределенных в узлах решетки из кубических элементов. Первый интеграл уравнения пульсации пузырька в такой решетке в несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{d}{dR} R^3 \dot{R}^2 \left(1 + \alpha N \frac{R}{l}\right) = 2R^2 \frac{p(R) - p_\infty}{\rho_l},$$

где  $\alpha < 1$ ;  $l$  — параметр элемента решетки, связанный с объемной концентрацией соотношением  $k_0 = (R_0/l)^3 4\pi/3$ . Несложно сделать вывод, что результатом взаимодействия пузырьков является уменьшение частоты их пульсации с ростом  $k_0$ .

**Результаты численного анализа.** Ниже приведены результаты расчета динамики относительного радиуса пузырька  $y = R/R_0$ , его радиальной скорости  $y_\tau = dy/d\tau$  и излучения  $P^*$  (акустических потерь) как функции безразмерного времени  $\tau = t\sqrt{p_0/\rho_l}/R_0$ , выполненного для амплитуды внешнего стационарного давления  $p_\infty = 10$  МПа при гидростатическом давлении  $p_0 = 0,1$  МПа и начальном радиусе пузырька  $R_0$ . На рис. 1 представлены результаты расчета динамики и профиля излучения пузырька в однофазной жидкости. Отметим, что профиль волны излучения определяется в основном первой пульсацией радиальной скорости (динамикой ускорения стенки полости). Ввод незначительного количества газовой фазы ( $k_0 = 0,01$  %) приводит к существенному изменению параметров излучения (рис. 2). При этом амплитуда давления уменьшается почти в два раза.

Дальнейшее увеличение объема газовой фазы (до 0,1 %) приводит к уменьшению степени и увеличению времени сжатия до минимального радиуса (рис. 3). Этот результат

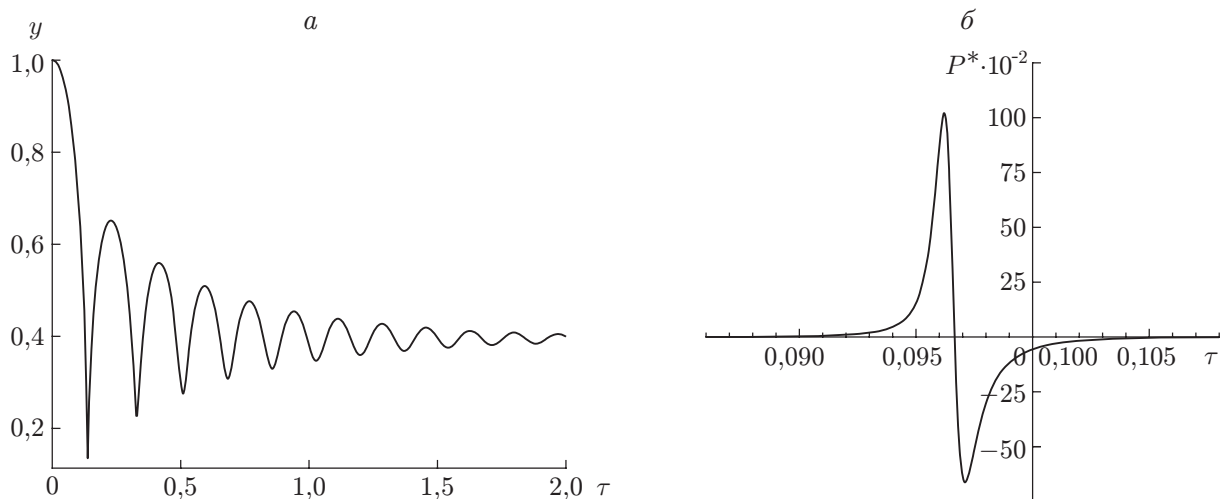


Рис. 1. Динамика (а) и профиль излучения (б) одиночного пузырька в однофазной жидкости при  $k_0 = 0$

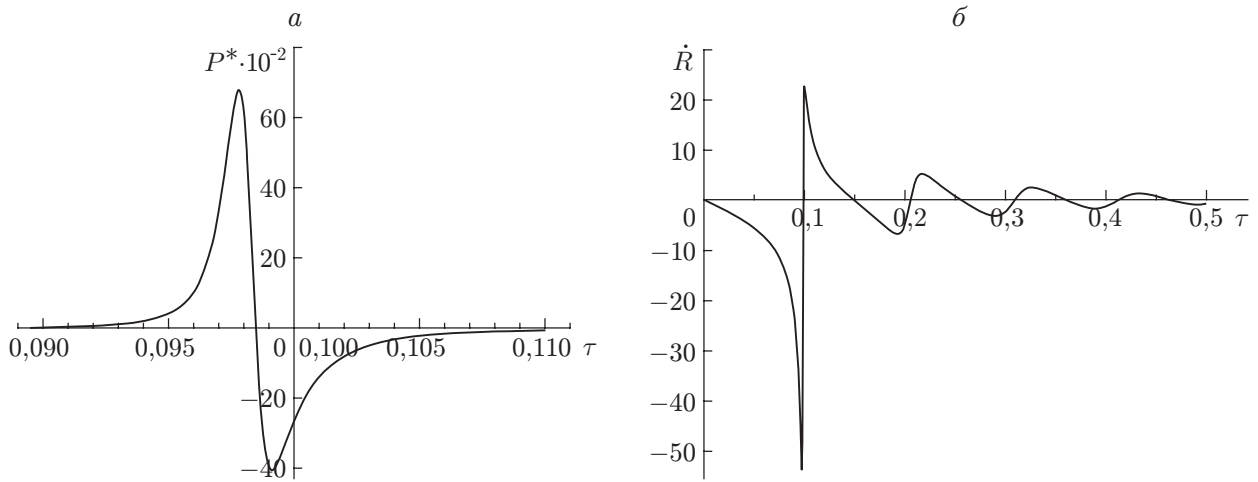


Рис. 2. Профиль излучения (а) и радиальная скорость расширения (б) одиночного пузырька в равновесной пузырьковой жидкости при  $k_0 = 0,01 \%$

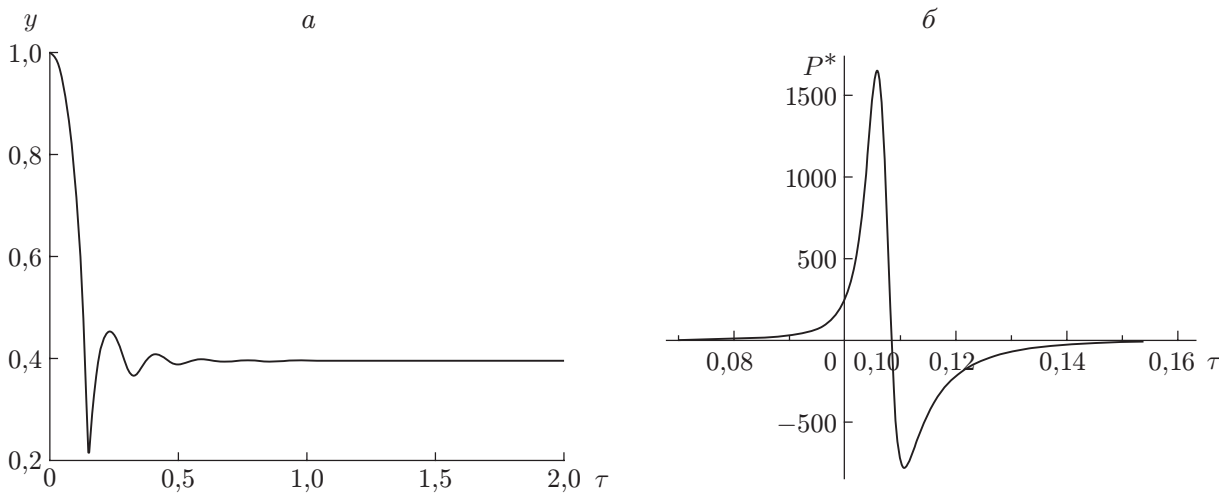


Рис. 3. Динамика (а) и профиль излучения (б) одиночного пузырька при  $k_0 = 0,1 \%$

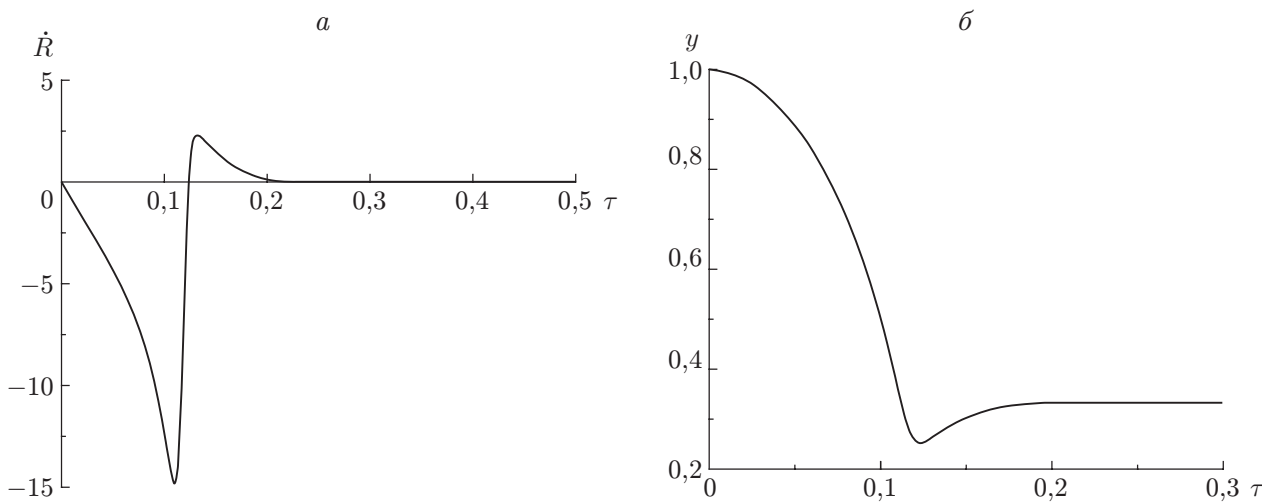


Рис. 4. Радиальная скорость (а) и динамика (б) одиночного пузырька при  $k_0 = 0,5 \%$

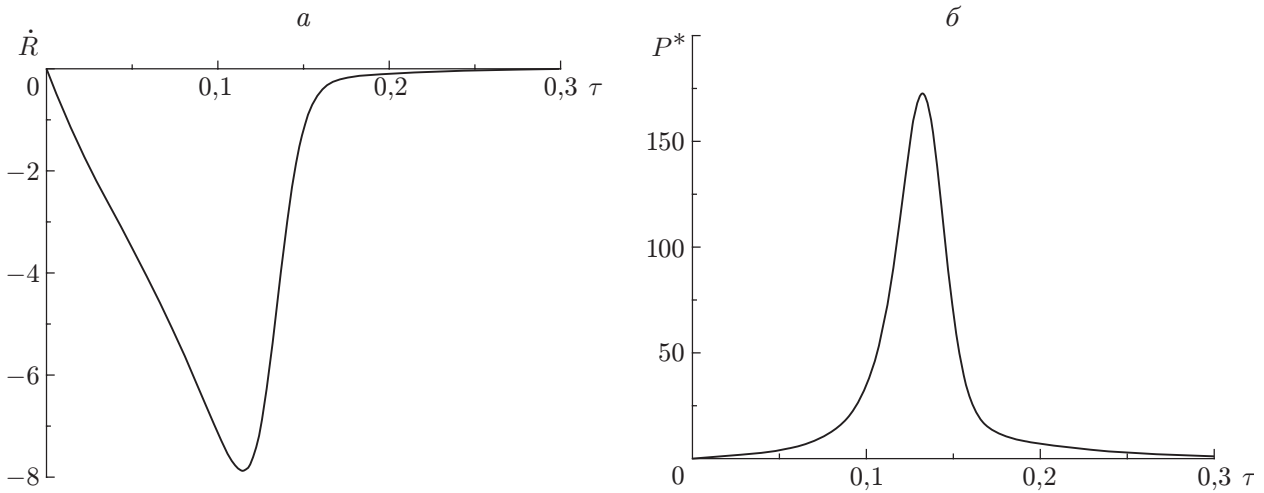


Рис. 5. Радиальная скорость (а) и профиль излучения (б) одиночного пузырька при  $k_0 = 3\%$

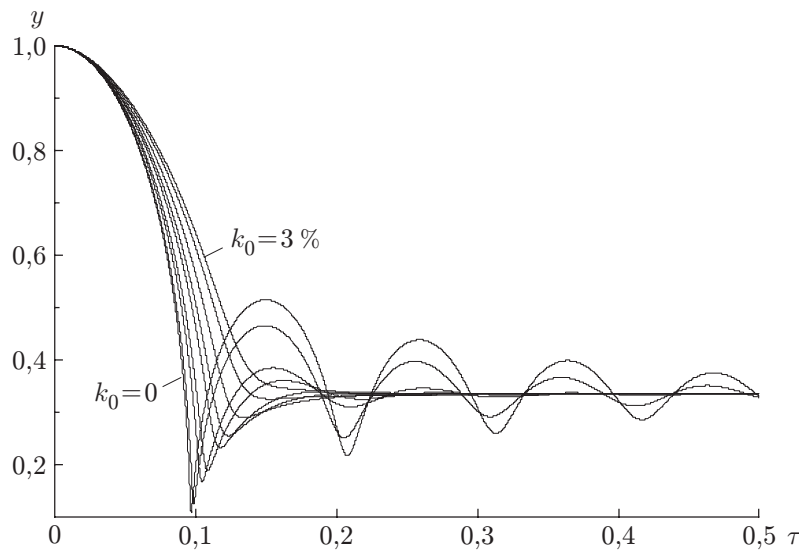


Рис. 6. Динамика одиночного пузырька в равновесной пузырьковой жидкости при  $k_0 = 0; 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0\%$

очевиден: пульсации “взаимодействующих” пузырьков становятся более низкочастотными. Увеличение объемной доли газа приводит к уменьшению числа пульсаций, в результате чего пузырек быстрее выходит на равновесное состояние (рис. 3). На рис. 4 показаны радиальная скорость и динамика одиночного пузырька в равновесной пузырьковой жидкости при  $k_0 = 0,5\%$ . Из зависимостей, представленных на рис. 4, следует, что при повышении концентрации газовой фазы в окружающей жидкости до значения  $k_0 = 0,5\%$  пузырек совершает только одну пульсацию. При  $k_0 = 3\%$  затухающие колебания исчезают и пузырек уже на стадии первого сжатия асимптотически выходит на равновесное состояние (рис. 5). Несложно видеть, что при этом значении  $k_0$  профиль излучения принимает форму “солитона”, амплитуда которого меньше соответствующего значения для однофазной жидкости примерно в 50 раз (см. рис. 5). При этом динамика пузырька без пересжатия (инерционные члены не “работают”) описывается функцией, которая асимп-

тотически стремится к равновесному состоянию. Заметим, что это состояние не зависит от значения  $k_0$ , а определяется только внешним давлением. На рис. 6 показан график схлопывания пузырька под действием ударной волны с постоянным профилем при амплитуде, равной 10 МПа, и значениях  $k_0 = 0 \div 3 \cdot 10^{-2}$ . Согласно результатам численного анализа начиная со значений  $k_0 \approx 3\%$  в процессе адиабатического сжатия исследуемой полости наступает своеобразный порог, когда устанавливается динамическое равновесие между излучением и инерцией присоединенной массы (см. рис. 5), уменьшение которой в энергетическом балансе “компенсируется” ростом акустических потерь. Возникает своего рода режим безынерционного сжатия (“неограниченной кумуляции”) до значения радиуса полости, соответствующего равновесному состоянию.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что предложенная модель позволяет анализировать динамику пузырька в аномально сжимаемой жидкости, а также исследовать особенности структуры и параметры его излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
2. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331–1333.
3. **Van Wijngaarden L.** On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 465–474.
4. **Кедринский В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1968. № 4. С. 29–34.
5. **Накоряков В. Е.** Волновая динамика газо- и парожидкостных сред / В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, И. Р. Шрейбер. М.: Энергоатомиздат, 1990.
6. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1987.
7. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
8. **Гарипов Р. М.** Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками (обзор) // ПМТФ. 1973. № 6. С. 3–24.
9. **Fujikawa S., Takahira H.** A theoretical study on the interaction between two spherical bubbles and radiated pressure waves in a liquid // J. Acoust. 1986. V. 61. P. 188–199.
10. **Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.** Двухволновая модель распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа // ПМТФ. 1979. № 6. С. 119–127.
11. **Ляхов Г. М.** Ударные волны в многокомпонентных средах // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1959. № 1. С. 46–49.

*Поступила в редакцию 30/X 2006 г.*