

УДК 532.51

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВОГО СТЕКАНИЯ ПЛЕНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

С использованием полных уравнений Навье — Стокса проведен теоретический анализ процесса стекания вязких пленок по гладкой поверхности. Определены границы области применимости асимптотического и интегрального подходов к описанию волн на стекающих пленках. В широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Капицы рассчитаны различные нелинейные волновые режимы стекания и исследована их устойчивость. Показано, что при малых числах Капицы результаты асимптотического подхода становятся неприменимыми практически для всех чисел Рейнольдса. При больших числах Капицы существенное различие между решением, полученным с использованием асимптотического метода, и расчетом с помощью уравнений Навье — Стокса наблюдается начиная с умеренных чисел Рейнольдса. При больших числах Рейнольдса отсутствует зависимость длины волны нейтральных возмущений от расхода жидкости и фазовая скорость нейтральных возмущений близка к скорости свободной поверхности. Из расчетов нелинейных волновых режимов при умеренных числах Рейнольдса следует наличие внутренних вихревых зон. Показано, что существует лишь несколько семейств стационарно бегущих решений (при расчете по интегральной модели получено счетное множество различных семейств таких решений).

Ключевые слова: вязкое течение пленок, волны, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование пленочных течений начато в работе [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса в случае свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой стенке, и в работе [2], где экспериментально рассмотрены основные волновые режимы стекания пленок и предложен интегральный подход к их теоретическому изучению. В работах [3, 4] с использованием асимптотического метода исследована линейная устойчивость безволнового стекания пленок по отношению к возмущениям свободной поверхности. Показано, что в случае вертикальной стенки при всех числах Рейнольдса существуют неустойчивые возмущения. Большое количество последующих теоретических работ посвящено анализу нелинейных волн на стекающих пленках. Исследования проводились либо с использованием нелинейного эволюционного уравнения для толщины пленки (см., например, [5–11]), полученного из асимптотического разложения исходных уравнений Навье — Стокса, либо в рамках интегрального подхода (см., например, [9–14]). Показано, что существует счетное множество различных однопараметрических семейств стационарно бегущих решений, ответвляющихся друг от друга (для каждого семейства

параметром является длина волны или волновое число нелинейного решения). Анализ линейной устойчивости различных решений позволил выделить два семейства волн. Только для этих семейств существует диапазон длин волн, где нелинейные решения устойчивы. Существует лишь несколько теоретических работ, в которых волновое стекание пленок рассматривается на основе уравнений Навье — Стокса. В [15] в результате численного решения уравнений Орра — Зоммерфельда получены данные по линейной устойчивости безволнового стекания при больших числах Рейнольдса ($Re > 100$). В [16, 17] с использованием уравнений Навье — Стокса выполнен расчет, в результате которого получена эволюция различных начальных возмущений на поверхности стекающих пленок. Исследования проводились при небольших числах Рейнольдса. Основной целью данной работы является исследование различных волновых режимов стекания пленок с использованием полных уравнений Навье — Стокса.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Система нелинейных уравнений. Стеkanie пленки вдоль наклонной плоскости описывается системой уравнений Навье — Стокса в прямоугольных координатах с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon Re} \left(3 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{3 \operatorname{tg} \theta}{Re} + \frac{\varepsilon}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u = v = 0, \quad y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} &= 0, \quad y = H(x, t), \\ P = P_a + \frac{2\varepsilon}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} - \frac{(3 \operatorname{Fi})^{1/3} \varepsilon^2}{Re^{5/3}} \frac{\partial^2 H / \partial x^2}{[1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2]^{3/2}}, \quad y = H(x, t), \\ v &= \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y = H(x, t). \end{aligned}$$

Здесь $H(x, t)$ — локальная толщина пленки; u, v — компоненты вектора скорости вдоль осей x, y соответственно; P — давление в жидкости; P_a — атмосферное давление; t — время; θ — угол наклона оси x , отсчитываемый от вертикали. Уравнения записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами (с верхним индексом “*”) следующим образом:

$$\begin{aligned} x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad t = \frac{u_0 t^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, \quad P = \frac{P^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0}, \\ \operatorname{Re} = \frac{u_0 H_0}{\nu} = \frac{g \cos \theta H_0^3}{3\nu^2}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L}, \quad \operatorname{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g \cos \theta \nu^4}. \end{aligned}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; L — период волны; Re — число Рейнольдса; Fi — пленочное число.

Используя преобразование координат $t_1 = t, x_1 = x - ct, \eta = y/H(x - ct, t)$ (c — фазовая скорость; в новых переменных область течения известна: $\eta \in [0, 1]$), получим

общую систему уравнений в следующем виде (нижний индекс 1 при новых переменных времени и координаты опускается):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_t \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[3 + \eta_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] - \eta_y \frac{\partial uv}{\partial \eta} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial u^2}{\partial \eta}; \quad (2.1)$$

$$\eta_y \frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{3 \text{tg } \theta}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] - \\ - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_t \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial uv}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v^2}{\partial \eta} \right); \quad (2.2)$$

$$v(t, x, \eta) = -H(t, x)u(t, x, \eta)\eta_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(H \int_0^\eta u(t, x, \eta') d\eta' \right); \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H(t, x) \int_0^1 (u(t, x, \eta') - c) d\eta' \right) = 0; \quad (2.4)$$

$$u(t, x, \eta) = 0, \quad \eta = 0; \quad (2.5)$$

$$P - P_a = \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} - \varepsilon^2 \text{We} \frac{\partial^2 H / \partial x^2}{[1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2]^{3/2}}, \quad \eta = 1; \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \varepsilon^2 H \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right] + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \eta = 1. \quad (2.7)$$

Здесь $\text{We} = (3\text{Fi})^{1/3} / \text{Re}^{5/3}$ — число Вебера; $\eta_x = -(\eta \partial H / \partial x) / H$; $\eta_y = 1 / H$; $\eta_t = -\eta (\partial H / \partial t - c \partial H / \partial x) / H$; $\eta_{x\eta} = -(\partial H / \partial x) / H$; $\eta_{x\xi} = -(\eta_x / H) \partial H / \partial x - (\eta \partial^2 H / \partial x^2) / H$. Ниже находятся стационарные решения системы (2.1)–(2.7) ($H_b(x)$, $u_b(x, \eta)$, $v_b(x, \eta)$, $P_b(x, \eta)$) и исследуется их линейная устойчивость. Одно из решений (тривиальное) легко записать:

$$H_b^0(x) = 1, \quad u_b^0(x, \eta) = 1,5(2\eta - \eta^2), \\ v_b^0(x, \eta) = 0, \quad P_b^0(x, \eta) = P_a + 3 \text{tg } \theta (1 - \eta) / \text{Re}. \quad (2.8)$$

Другие стационарные решения могут быть построены только численно. Из уравнений (2.1)–(2.7) следует, что течение определяется тремя независимыми величинами: θ , Fi , Re . Пространственный период волны L является внутренним параметром. При численном построении стационарных решений использовался спектральный метод [18], разработанный для анализа пленочного стекания вдоль гофрированной поверхности:

$$u_b(x, \eta) = \frac{1}{2} U_1(x) + \sum_{m=2}^M U_m(x) T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1,$$

$$U_m(x) = U_m^0 + \sum_{\substack{n=-N/2+1 \\ n \neq 0}}^{N/2-1} U_m^n \exp(2\pi i n x), \quad (U_m^{-n})^* = U_m^n, \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева; знак “*” обозначает комплексное сопряжение.

Следует отметить, что в отличие от алгоритма [18] в рассматриваемом случае к гармоникам U_m^n в качестве неизвестных добавляются гармоники в разложении толщины пленки $H_b(x)$. При заданных $M(N-1)$ значениях вещественной и мнимой частей гармоник U_m^n , а также при $N-1$ значениях гармоник H^n скорость $v_b(x, \eta)$ однозначно определяется из уравнения (2.3), давление $P_b(x, \eta)$ — из уравнений (2.2) и (2.6). Численный алгоритм стартует с начального приближения гармоник U_m^n, H^n (например, с тривиального решения (2.8) в окрестности нейтральной кривой), которое затем уточняется методом Ньютона с использованием уравнения (2.1) в пространстве (n, m) и уравнения (2.4):

$$H_b(x) = (1 - c \langle H_b(x) \rangle) / \int_0^1 (u_b(x, \eta') - c) d\eta'.$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ — среднее по длине волны. Фазовая скорость c определяется из условия симметрии относительно сдвига начала отсчета координаты x . В разложении толщины пленки фазу одной из гармоник можно считать известной и вместо нее в качестве неизвестной рассматривать скорость c . Матрица Якоби рассчитывается с помощью конечно-разностной схемы. Базисные функции автоматически не удовлетворяют граничным условиям (2.5), (2.7). Как следствие имеется $(M+3)(N-1)$ нелинейных алгебраических уравнений для определения $(M+1)(N-1)$ неизвестных величин, т. е. система переопределена. В данной работе отбрасываются $2(N-1)$ уравнений, соответствующих двум последним (малым) полиномам Чебышева в разложении уравнения (2.1), и вместо них используются граничные условия (2.5), (2.7). При отладке процедуры счета проверялись другие способы уменьшения количества уравнений. При достаточно хорошей аппроксимации функции $u(x, \eta)$ во всех случаях результаты практически совпадают. В расчетах N и M варьировались таким образом, чтобы выполнялись условия $|U_m^{N/2-1}| / \sup |U_m^n| < 10^{-3}$ при всех m и $|U_M^n| / \sup |U_m^n| < 10^{-3}$ при всех n . Незначительное различие решений при различных N и M (в случае удовлетворительной аппроксимации поля скорости) является дополнительным подтверждением корректности процедуры счета.

2.2. Устойчивость стационарных решений. Подставляя в уравнения (2.1)–(2.7) выражения

$$\begin{aligned} H &= H_b(x) + \hat{H}(x) \exp(-\gamma t) + \text{к.с.}, & u &= u_b(x, \eta) + \hat{u}(x, \eta) \exp(-\gamma t) + \text{к.с.}, \\ v &= v_b(x, \eta) + \hat{v}(x, \eta) \exp(-\gamma t) + \text{к.с.}, & P &= P_b(x, \eta) + \hat{P}(x, \eta) \exp(-\gamma t) + \text{к.с.}, \\ \eta_x &= \bar{\eta}_x + \hat{\eta}_x, & \eta_y &= \bar{\eta}_y + \hat{\eta}_y, & \eta_t &= \bar{\eta}_t + \hat{\eta}_t, & \eta_{x\eta} &= \bar{\eta}_{x\eta} + \hat{\eta}_{x\eta}, & \eta_{x\xi} &= \bar{\eta}_{x\xi} + \hat{\eta}_{x\xi}, \\ \hat{\eta}_x &= -\bar{\eta}_x \frac{\hat{H}}{H_b} - \frac{\eta}{H_b} \frac{d\hat{H}}{dx}, & \hat{\eta}_y &= -\bar{\eta}_y \frac{\hat{H}}{H_b}, & \hat{\eta}_t &= -\bar{\eta}_t \frac{\hat{H}}{H_b} - \frac{\eta}{H_b} \left(-\gamma \hat{H} - c \frac{d\hat{H}}{dx} \right), \\ \hat{\eta}_{x\eta} &= -\bar{\eta}_{x\eta} \frac{\hat{H}}{H_b} - \frac{1}{H_b} \frac{d\hat{H}}{dx}, & \hat{\eta}_{x\xi} &= -\bar{\eta}_{x\xi} \frac{\hat{H}}{H_b} - \frac{1}{H_b} \left(\hat{\eta}_x \frac{dH_b}{dx} + \bar{\eta}_x \frac{d\hat{H}}{dx} + \eta \frac{d^2\hat{H}}{dx^2} \right) \end{aligned}$$

(здесь к.с. — комплексно-сопряженная к возмущению величина; величины с чертой получены при подстановке стационарного решения) и линеаризуя эти уравнения, получим систему уравнений на собственные значения с периодическими (или постоянными в случае исследования устойчивости тривиального решения) по координате x коэффициентами:

$$a_1^1(x) \hat{H} + a_2^1(x) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^1(x) \int_0^1 \hat{u} d\eta' + a_4^1(x) \frac{d}{dx} \int_0^1 \hat{u} d\eta' = \gamma \hat{H}; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
& a_1^2(x, \eta) \hat{H} + a_2^2(x, \eta) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^2(x, \eta) \frac{d^2\hat{H}}{dx^2} + a_4^2(x, \eta) \hat{u} + a_5^2(x, \eta) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + a_6^2(x, \eta) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + \\
& + a_7^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + a_8^2(x, \eta) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} + a_9^2(x, \eta) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial \eta} + a_{10}^2(x, \eta) \hat{v} + a_{11}^2(x, \eta) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} + \\
& + \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + a_{12}^2(x, \eta) \frac{\partial \hat{P}}{\partial \eta} = \gamma [b_1^2(x, \eta) \hat{H} + \hat{u}]; \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\hat{u} = 0, \quad \eta = 0; \quad (2.11)$$

$$a_1^4(x) \hat{H} + a_2^4(x) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^4(x) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + a_4^4(x) \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + a_5^4(x) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1; \quad (2.12)$$

$$a_1^5(x, \eta) \hat{H} + a_2^5(x, \eta) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^5(x, \eta) \hat{u} + a_4^5(x) \int_0^\eta \hat{u} d\eta' + a_5^5(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta \hat{u} d\eta' + \hat{v} = 0; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
& a_1^6(x, \eta) \hat{H} + a_2^6(x, \eta) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^6(x, \eta) \frac{d^2\hat{H}}{dx^2} + \int_\eta^1 \left(a_4^6(x, \eta') \hat{u} + a_5^6(x, \eta') \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + a_6^6(x, \eta') \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta'} + \right. \\
& + a_7^6(x, \eta') \hat{v} + a_8^6(x, \eta') \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + a_9^6(x, \eta') \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta'} + a_{10}^6 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + a_{11}^6(x, \eta') \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta'^2} + a_{12}^6(x, \eta') \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial \eta'} \Big) d\eta' + \\
& + \frac{1}{H_b(x)} \hat{P}(x, \eta) \Big|_{\eta=1} - \frac{\hat{P}(x, \eta)}{H_b(x)} = \gamma \left(b_1^6(x, \eta) \hat{H} + \varepsilon^2 \int_\eta^1 \hat{v} d\eta' \right); \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\hat{P}(x, \eta) \Big|_{\eta=1} = a_1^7(x) \hat{H} + a_2^7(x) \frac{d\hat{H}}{dx} + a_3^7(x) \frac{d^2\hat{H}}{dx^2} + a_4^7(x) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}.$$

Коэффициенты a_j^i , b_j^i в уравнениях (2.9)–(2.14) являются вещественными функциями и выражаются через решение стационарной задачи:

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= \frac{d}{dx} \int_0^1 (u_b - c) d\eta', & a_2^1 &= \int_0^1 (u_b - c) d\eta', & a_3^1 &= \frac{dH_b}{dx}, & a_4^1 &= H_b, \\
a_1^2 &= -\frac{\bar{\eta}_t}{H_b} \frac{\partial u_b}{\partial \eta} - \frac{\bar{\eta}_x}{H_b} \frac{\partial P_b}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left\{ 2 \frac{\bar{\eta}_y^2}{H_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left[2 \frac{\bar{\eta}_x^2}{H_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\bar{\eta}_x}{H_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial x \partial \eta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\bar{\eta}_{x\xi}}{H_b} + 3 \frac{\bar{\eta}_x \bar{\eta}_{x\eta}}{H_b} \right) \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \right] \right\} - \frac{\bar{\eta}_y}{H_b} \frac{\partial (u_b v_b)}{\partial \eta} - \frac{\bar{\eta}_x}{H_b} \frac{\partial u_b^2}{\partial \eta}, \\
a_2^2 &= -\frac{\eta}{H_b} \frac{\partial P_b}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} \left[2 \frac{\bar{\eta}_x \eta}{H_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\eta}{H_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial x \partial \eta} + 2 \left(\frac{\bar{\eta}_{x\eta} \eta}{H_b} + \frac{\bar{\eta}_x}{H_b} \right) \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \right] - \frac{\eta}{H_b} (2u_b - c) \frac{\partial u_b}{\partial \eta}, \\
a_3^2 &= \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} \frac{\eta}{H_b} \frac{\partial u_b}{\partial \eta}, & a_4^2 &= \bar{\eta}_y \frac{\partial v_b}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial u_b}{\partial x} + 2 \bar{\eta}_x \frac{\partial u_b}{\partial \eta}, & a_5^2 &= 2u_b, \\
a_6^2 &= \bar{\eta}_t - \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} (\bar{\eta}_{x\xi} + \bar{\eta}_x \bar{\eta}_{x\eta}) + \bar{\eta}_y v_b + 2 \bar{\eta}_x u_b, & a_7^2 &= -\frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}}, \\
a_8^2 &= -\frac{\varepsilon \eta_x^2}{\operatorname{Re}} - \frac{\eta_y^2}{\varepsilon \operatorname{Re}}, & a_9^2 &= -\frac{2\varepsilon \bar{\eta}_x}{\operatorname{Re}},
\end{aligned}$$

$$a_{10}^2 = \bar{\eta}_y \frac{\partial u_b}{\partial \eta}, \quad a_{11}^2 = \bar{\eta}_y u_b, \quad a_{12}^2 = \bar{\eta}_x, \quad b_1^2 = -\frac{\eta}{H_b} \frac{\partial u_b}{\partial \eta},$$

$$a_1^4 = (1 - K^2) \varepsilon^2 \frac{\partial v_b}{\partial x} \Big|_{\eta=1}, \quad K = \varepsilon \frac{dH_b}{dx},$$

$$a_2^4 = \left[- (1 - K^2) \varepsilon^2 \frac{\partial v_b}{\partial \eta} - 2\varepsilon K \left(\frac{\partial u_b}{\partial \eta} + \varepsilon^2 H_b \frac{\partial v_b}{\partial x} - \varepsilon K \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \right) + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \right] \Big|_{\eta=1},$$

$$a_3^4 = 1 - K^2, \quad a_4^4 = (1 - K^2) \varepsilon^2 H_b, \quad a_5^4 = -\varepsilon K (1 - K^2) + 4\varepsilon K,$$

$$a_1^5 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta u_b d\eta', \quad a_2^5 = \int_0^\eta u_b d\eta' - u_b \eta, \quad a_3^5 = \bar{\eta}_x H_b, \quad a_4^5 = \frac{dH_b}{dx}, \quad a_5^5 = H_b,$$

$$a_1^6 = \int_\eta^1 \left(-\frac{\varepsilon^2 \bar{\eta}_t}{H_b} \frac{\partial v_b}{\partial \eta'} - \frac{\bar{\eta}_y}{H_b} \frac{\partial P_b}{\partial \eta'} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left\{ 2 \frac{\bar{\eta}_y^2}{H_b} \frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \left[2 \frac{\bar{\eta}_x^2}{H_b} \frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2 \frac{\bar{\eta}_x}{H_b} \frac{\partial^2 v_b}{\partial x \partial \eta'} + \left(\frac{\bar{\eta}_x \xi}{H_b} + 3 \frac{\bar{\eta}_x \bar{\eta}_x \eta}{H_b} \right) \frac{\partial v_b}{\partial \eta'} \right] \right\} - \frac{\varepsilon^2 \bar{\eta}_y}{H_b} \frac{\partial v_b^2}{\partial \eta'} - \frac{\varepsilon^2 \bar{\eta}_x}{H_b} \frac{\partial (u_b v_b)}{\partial \eta'} \right) d\eta',$$

$$a_2^6 = \frac{\varepsilon^3}{\text{Re} H_b} \int_\eta^1 \left(2\bar{\eta}_x \eta' \frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 v_b}{\partial x \partial \eta'} + 2(\bar{\eta}_x \eta \eta' + \bar{\eta}_x) \frac{\partial v_b}{\partial \eta'} \right) d\eta' - \frac{\varepsilon^2}{H_b} \int_\eta^1 \left(\eta' \frac{\partial ((u_b - c)v_b)}{\partial \eta'} \right) d\eta',$$

$$a_3^6 = \frac{\varepsilon^3}{\text{Re} H_b} \frac{1}{\eta} \int_\eta^1 \eta' \frac{\partial v_b}{\partial \eta'} d\eta', \quad a_4^6 = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \bar{\eta}_x \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \right), \quad a_5^6 = \varepsilon^2 v_b, \quad a_6^6 = \varepsilon^2 \bar{\eta}_x v_b,$$

$$a_7^6 = \varepsilon^2 \left(2\bar{\eta}_y \frac{\partial v_b}{\partial \eta} + \frac{\partial u_b}{\partial x} + \bar{\eta}_x \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \right), \quad a_8^6 = \varepsilon^2 (u_b - c),$$

$$a_9^6 = \varepsilon^2 \bar{\eta}_t - \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} (\bar{\eta}_x \xi + \bar{\eta}_x \bar{\eta}_x \eta) + \varepsilon^2 (2\bar{\eta}_y v_b + \bar{\eta}_x u_b), \quad a_{10}^6 = -\frac{\varepsilon^3}{\text{Re}},$$

$$a_{11}^6 = -\frac{\varepsilon}{\text{Re}} \bar{\eta}_y^2 - \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} \bar{\eta}_x^2, \quad a_{12}^6 = -\frac{2\varepsilon^3}{\text{Re}} \bar{\eta}_x, \quad b_1^6 = -\frac{\varepsilon^2}{H_b} \int_\eta^1 \left(\eta' \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \right) d\eta',$$

$$a_1^7 = -\frac{2\varepsilon}{\text{Re} H_b} \frac{\bar{\eta}_y}{1 - K^2} \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1},$$

$$a_2^7 = \frac{3\varepsilon^3 K \text{We}}{(1 + K^2)^{5/2}} \left(\frac{d^2 H_b}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^2 f}{dx^2} \right) + \frac{8\varepsilon^2 K}{\text{Re}} \frac{\bar{\eta}_y}{(1 - K^2)^2} \frac{\partial v_b}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1},$$

$$a_3^7 = -\frac{\varepsilon^2 \text{We}}{(1 + K^2)^{3/2}}, \quad a_4^7 = \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \bar{\eta}_y \frac{1 + K^2}{1 - K^2}.$$

Из теоремы Флоке следует, что ограниченные по координате x решения системы (2.9)–(2.14) представляются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{H}_n \exp(2\pi i n x) \\ \frac{1}{2} \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{u}_{1n} \exp(2\pi i n x) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(2\eta - 1) \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{u}_{mn} \exp(2\pi i n x) \\ \frac{1}{2} \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{v}_{1n} \exp(2\pi i n x) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(2\eta - 1) \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{v}_{mn} \exp(2\pi i n x) \\ \frac{1}{2} \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{P}_{1n} \exp(2\pi i n x) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(2\eta - 1) \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{P}_{mn} \exp(2\pi i n x) \end{pmatrix} \exp(2\pi i Q x).$$

Здесь вещественный параметр $Q \in [0, 1]$. После подстановки этих выражений в уравнения (2.9)–(2.14) задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида:

$$A\hat{x} = \gamma B\hat{x}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{H}_n \\ \hat{u}_{mn} \\ \hat{v}_{mn} \\ \hat{P}_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Матрицы A и B , имеющие размерность $[(3M + 1)(N - 1), (3M + 1)(N - 1)]$, строились численно. Последовательно задавались различные единичные векторы возмущений и рассчитывались столбцы матриц A и B . Так же как и при расчете нелинейных стационарных решений, отбрасываются $2(N - 1)$ уравнений, соответствующих двум последним (малым) полиномам Чебышева в разложении уравнения (2.10), и вместо них используются граничные условия (2.11), (2.12).

Для получения ответа на вопрос об устойчивости решения $(H_b(x), u_b(x, \eta), v_b(x, \eta), P_b(x, \eta))$ необходимо проанализировать $(3M + 1)(N - 1)$ собственных чисел для каждого значения параметра Q . Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю. Следует выделить возмущения с нулевым значением параметра Q . Такие возмущения имеют тот же период, что и исходное решение. Неустойчивость по отношению к данному классу возмущений означает невозможность реализации такого режима в эксперименте. Решения, неустойчивые по отношению к возмущениям с $Q \neq 0$, могут наблюдаться в эксперименте на определенных участках течения, когда возмущения не успели развиться или искусственно подавлены.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Устойчивость безволнового стекания пленки вдоль гладкой стенки. В работе [3] с использованием разложения по малому параметру решалось уравнение Ора — Зоммерфельда для пленки, стекающей вдоль наклонной плоскости. Установлено, что при $\text{Re} > (\text{Re}_{cr})_B$ все возмущения с длиной волны $\lambda^* > (\lambda_{neut}^*)_B$ (величины с индексом “*” являются размерными) неустойчивы и нарастают во времени (возмущения с $\lambda^* < (\lambda_{neut}^*)_B$ затухают во времени). Для критического числа Рейнольдса $(\text{Re}_{cr})_B$, при превышении которого начинается волнообразование, и для длины волны нейтрального возмущения $(\lambda_{neut}^*)_B$ в работе [3] получены соотношения

$$(\text{Re}_{cr})_B = \frac{5}{6} \text{tg } \theta, \quad \frac{2\pi H_0}{(\lambda_{neut}^*)_B} \sqrt{\frac{5 \text{We}}{18}} = \sqrt{1 - \frac{5 \text{tg } \theta}{6 \text{Re}}}.$$

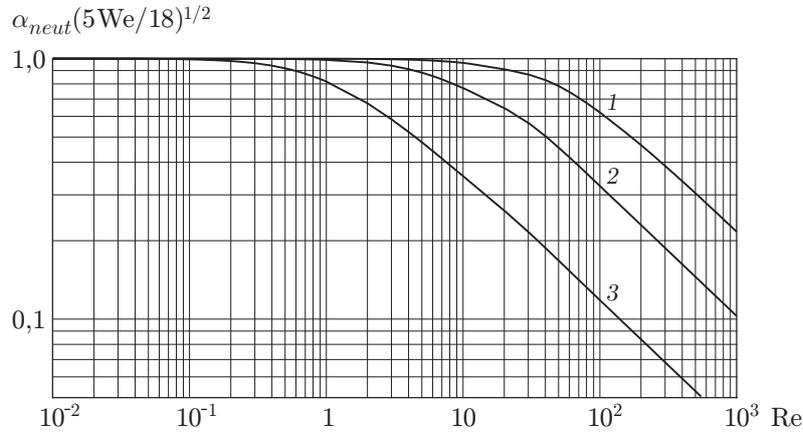


Рис. 1. Волновые числа нейтральных возмущений при стекании пленки вдоль вертикальной стенки, полученные при расчете по уравнению Навье — Стокса: 1 — $Fi^{1/11} = 10$; 2 — $Fi^{1/11} = 5$; 3 — $Fi^{1/11} = 2$

На рис. 1 представлены результаты расчетов устойчивости ($\alpha_{neut} \equiv 2\pi H_0/\lambda_{neut}^*$) безволнового стекания пленки на основе линейаризованных уравнений Навье — Стокса (2.9)–(2.14) в случае вертикальной стенки ($\theta = 0$). Расчеты проведены для трех значений пленочного числа Fi . Значение $Fi^{1/11} = 10$ близко к соответствующему числу для воды или криогенной жидкости (азота на линии насыщения при атмосферном давлении), значения $Fi^{1/11} = 5, 2$ соответствуют водному раствору спирта и глицерина (см., например, [10]). Результаты, представленные на рис. 1, легко сопоставить с расчетами по асимптотической теории [3] ($(\alpha_{neut})_B \sqrt{5We/18} = 1$ при всех значениях Re и Fi). Расчеты устойчивости проведены также для углов наклона плоскости течения $\theta = 45, 80^\circ$. Полученные критические значения числа Рейнольдса Re_{cr} , соответствующие началу волнообразования, совпадают с вычисленными по асимптотической теории [3]. При $Re < Re_{cr}$ все возмущения затухающие и вещественные части всех собственных значений задачи (2.15) больше нуля (во всем диапазоне значений параметра Q). При $Re > Re_{cr}$ (по крайней мере, до значения $Re = 1000$) и при $Q < Q_{neut}$ в спектре собственных значений всегда существует единственная неустойчивая мода, длина волны которой равна L/Q . При $Q > Q_{neut}$ вещественные части всех собственных значений задачи (2.15) больше нуля и возмущения затухают во времени.

Отметим, что в проведенных расчетах число полиномов Чебышева M в аппроксимации возмущений варьировалось в широком диапазоне (от 10 до 50). Зависимости длины волны нейтрального возмущения от числа Рейнольдса, представленные на рис. 1, получены при $M = 25$ (во всем диапазоне значений Re) и при дальнейшем увеличении M не меняются. При больших числах Рейнольдса зависимости на рис. 1 для каждого значения Fi имеют асимптоту (прямая линия в логарифмических координатах).

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

В окрестности критического числа волнообразования результаты расчетов устойчивости безволнового стекания по линейаризованным уравнениям Навье — Стокса согласуются с результатами, полученными с использованием асимптотической теории [3]. Область, в которой эти результаты согласуются, существенно уменьшается с уменьшением значения пленочного числа. В случае стекания пленки вдоль вертикальной стенки длина волны нейтрального возмущения в этой области с ростом числа Рейнольдса уменьшается: $\lambda_{neut}^* \sim \sqrt{\sigma/(\rho g Re)}$, и все более короткие возмущения становятся неустойчивыми. Фазовая скорость нейтрального возмущения в этой области близка к удвоенной скорости на поверхности пленки.

При больших числах Рейнольдса из полученных зависимостей следует, что длина волны нейтрального возмущения определяется только физическими свойствами жидкости и углом наклона плоскости течения ($\lambda_{neut}^* = C\sqrt{\sigma/(\rho g)}$, $C = C(\theta, Fi^{1/11})$) и не зависит от расхода жидкости. При этом фазовая скорость нейтральных возмущений близка к скорости свободной поверхности.

3.2. Нелинейные волновые режимы, ответвляющиеся от тривиального решения, и их устойчивость при стекании пленки вдоль гладкой вертикальной поверхности. Вдоль линии потери устойчивости тривиального решения происходит ответвление стационарно бегущих волновых решений системы (2.1)–(2.7) (в дальнейшем первое семейство волн). При рассмотрении этих решений ограничимся случаем вертикальной стенки. В задаче имеется два внешних параметра: число Капицы $Ka = Fi^{1/11}$ и Re/Ka . Длина волны (или волновое число) является одной из внутренних характеристик решения для семейства нелинейных волн. В дальнейшем, как правило, длина волны отнесена к длине волны нейтрального возмущения при соответствующих значениях Ka и Re .

На рис. 2 представлены результаты расчетов нелинейных волн и их устойчивости при $Ka = 10$, $Re/Ka = 10$. Аналогичные расчеты выполнены при $Re/Ka = 1,0; 0,1$.

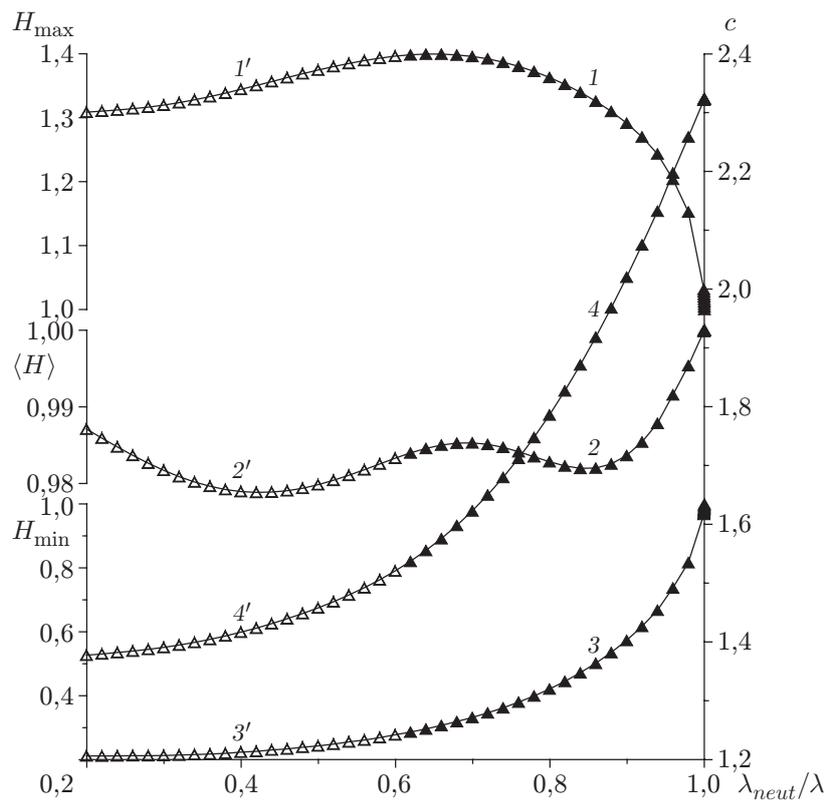


Рис. 2. Основные волновые характеристики нелинейных решений первого семейства и области устойчивости этих решений, полученные при расчете по уравнениям Навье — Стокса при $Ka = 10$, $Re = 100$:

1–4 — решение, устойчивое по отношению к возмущениям с периодом λ , равным периоду нелинейного решения; 1'–4' — решение, неустойчивое по отношению к возмущениям с периодом λ , равным периоду нелинейного решения; 1–3, 1'–3' — толщина пленки ($1, 1'$ — максимальная H_{max} ; $2, 2'$ — средняя $\langle H \rangle$; $3, 3'$ — минимальная H_{min}); 4, 4' — фазовая скорость c

Во всех случаях ветвление происходит в “мягком” режиме и решения продолжают в область линейной неустойчивости тривиального решения вплоть до малых значений волнового числа $\alpha/\alpha_{neut} = 0,2$. Средняя толщина пленки близка к единице во всем диапазоне параметров, амплитуда волн чрезвычайно мала при значении $Re/Ka = 0,1$. При $Ka = 10$ длинные волны первого семейства неустойчивы по отношению к возмущениям с периодом, равным периоду нелинейного решения (возмущения с $Q = 0$ в задаче (2.9)–(2.14)). При исследовании устойчивости решения по отношению к возмущениям с $Q = 0$ спектр собственных значений состоит из одного нулевого значения (следствие трансляционной симметрии), нескольких вещественных собственных значений и большого числа пар комплексно-сопряженных корней. При изменении волнового числа изменяется спектр собственных значений, при этом могут появляться новые комплексно-сопряженные пары корней либо комплексно-сопряженная пара превращается в два вещественных корня. При потере устойчивости волн первого семейства (см. рис. 2) зависимость вещественной части комплексно-сопряженной пары собственных значений от λ_{neut}/λ проходит через нуль. На рис. 3 представлены характерные профили решений этого семейства при $Re = 100$, $Ka = 10$, а также линии равного уровня функции тока $\Psi(x, \eta)$ в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны:

$$\Psi(x, \eta) = \int_0^{\eta} (u - c) H d\eta'.$$

Следует отметить наличие вихря в структуре функции тока при этом значении числа Рейнольдса.

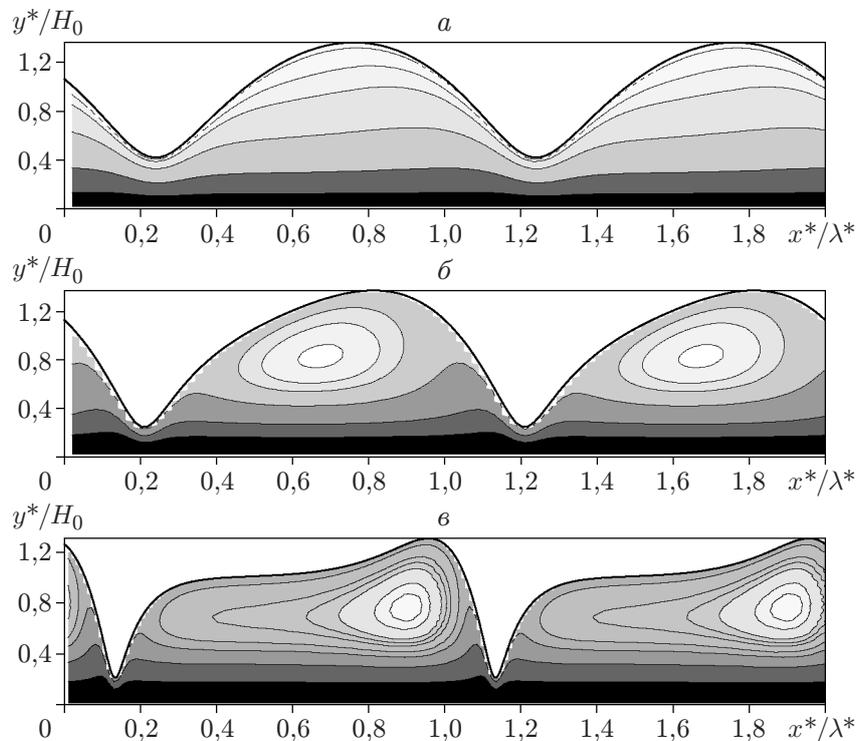


Рис. 3. Профиль толщины для решений первого семейства и линии равного уровня функции тока в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, при $Ka = 10$, $Re = 100$:

a — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,8$; $б$ — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,5$; $в$ — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,2$

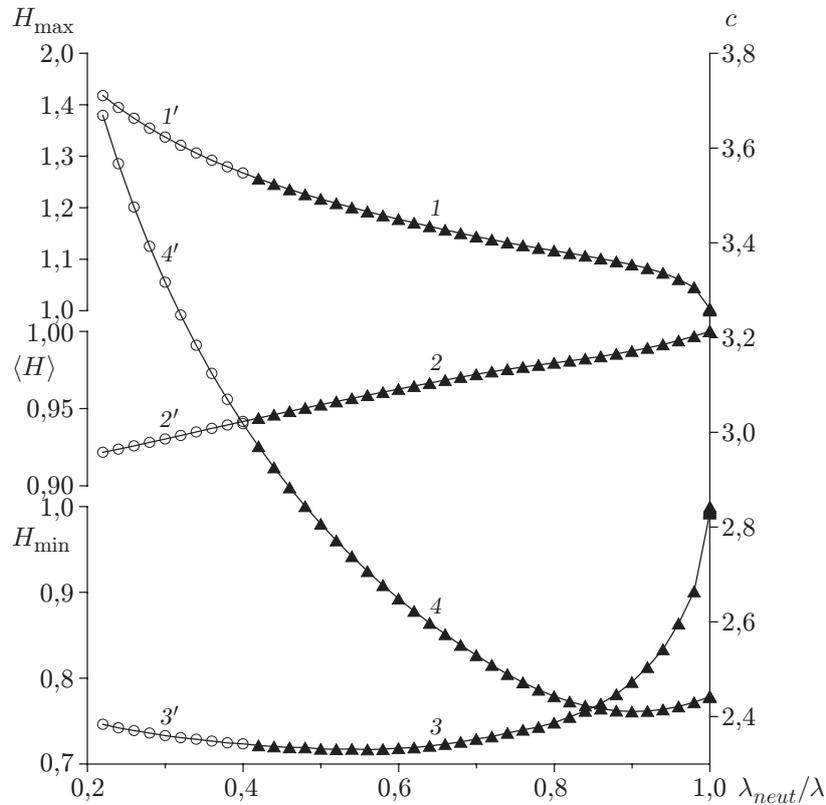


Рис. 4. Основные волновые характеристики нелинейных решений первого семейства и области устойчивости этих решений, полученные при расчете по уравнениям Навье — Стокса при $Ka = 2$, $Re = 2$:

1–4 — решение, устойчивое по отношению к возмущениям с периодом λ , равным периоду нелинейного решения; 1'–4' — решение не исследовано; 1–3, 1'–3' — толщина пленки (1, 1' — максимальная H_{\max} ; 2, 2' — средняя $\langle H \rangle$; 3, 3' — минимальная H_{\min}); 4, 4' — фазовая скорость c

На рис. 4 представлены результаты расчетов нелинейных волн и их устойчивости при $Ka = 2$, $Re / Ka = 1$. Аналогичные расчеты выполнены при $Re / Ka = 10, 0; 0,1$. В этом случае также ветвление происходит в “мягком” режиме и решения продолжают существовать в области линейной неустойчивости тривиального решения. На рис. 5 представлены характерные волновые профили при $Re = 20$, $Ka = 2$, а также линии равного уровня функции тока $\Psi(x, \eta)$ в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны. При расчете длинных волн в случае $Ka = 2$ необходимо использовать большое число фурье-гармоник. Устойчивость решений по отношению к возмущениям с $Q = 0$ исследована только до сравнительно небольших чисел $\lambda_{neut} / \lambda \approx 0,4$. При $Ka = 2$ неустойчивых решений не обнаружено (за исключением случая, когда $Re = 0,2$). Следует отметить качественное различие профилей длинных волн первого семейства при $Ka = 10$ и $Ka = 2$: в первом случае это волны-вмятины, во втором — волны-возвышения с крутым передним фронтом. Кроме того, при $Re / Ka = 10$, $Ka = 2$ внутри гребня волны при уменьшении волнового числа появляется вихрь (см. рис. 5) и дальнейшее уменьшение волнового числа требует очень большого числа фурье-гармоник. Расчет длинных волн-вмятин с вихрем при $Ka = 10$ не вызывает затруднений.

На рис. 6 представлены волновые характеристики, рассчитанные при увеличении параметра Re / Ka . Расчеты начинались с решений первого семейства, полученных при

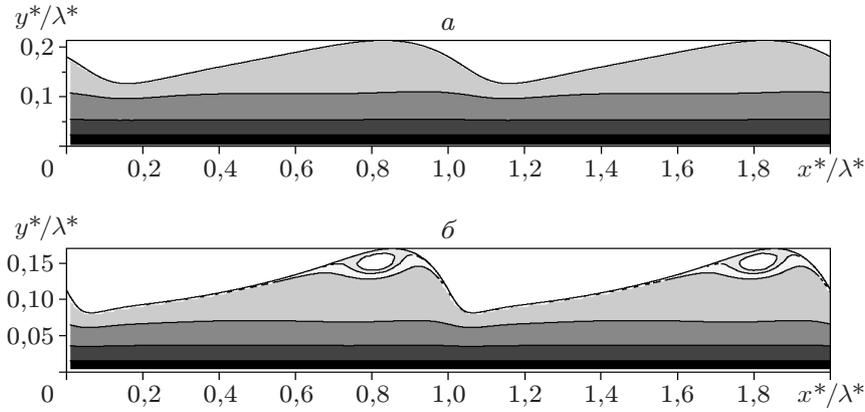


Рис. 5. Профиль толщины для решений первого семейства и линии равного уровня функции тока в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, при $Ka = 2$, $Re = 20$:
a — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,78$; *б* — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,56$

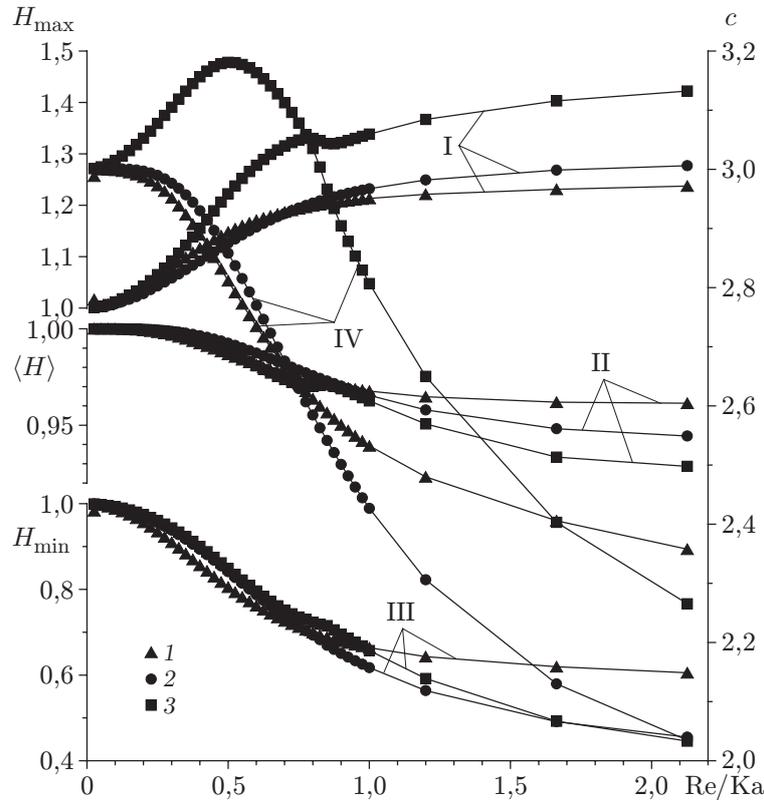


Рис. 6. Основные волновые характеристики нелинейных решений, рассчитанные по уравнениям Навье — Стокса при $Ka = 10$:
 I–III — толщина пленки (I — максимальная H_{max} ; II — средняя $\langle H \rangle$; III — минимальная H_{min}); IV — фазовая скорость c ; 1 — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,8$; 2 — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,6$; 3 — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,4$

$Re / Ka = 0,1$. В экспериментах [2] сформулирован критерий начала волнообразования на поверхности стекающих пленок $Re / Ka > 0,61$. Из представленных на рис. 6 данных следует, что в окрестности значения $Re / Ka = 0,61$ скорость изменения основных волновых характеристик максимальная. При больших значениях Re / Ka безразмерные максимальная и минимальная толщины пленки стремятся к постоянному значению.

Таким образом, при одном и том же наборе параметров (например, $\lambda_{neut}/\lambda = 0,4$, $Re / Ka = 1$, $Ka = 10$) решения можно получить разными способами: 1) изменяя волновое число при $Re / Ka = const$; 2) изменяя параметр Re / Ka при фиксированном значении λ_{neut}/λ . Возникает вопрос о единственности решений. С использованием простого эволюционного уравнения (справедливого при малых числах Рейнольдса) данный вопрос рассматривался в [6, 9], в рамках интегральной модели — в [13, 14]. Показано, что в обоих случаях существуют особые линии $\lambda(Q)$, на которых решение первого семейства с длиной волны λ теряет устойчивость по отношению к возмущениям с данным значением Q . Среди этих особых линий существуют линии, на которых вещественное собственное значение меняет знак при всех значениях $Q \in [0; 0,5]$. При рациональных значениях Q вдоль таких линий ответвляются новые семейства стационарно бегущих периодических решений. Таким образом, для этих моделей существует счетное множество различных семейств стационарно бегущих решений. При рассмотрении нелинейных волн с использованием уравнений Навье — Стокса такое вырождение отсутствует. При конечных значениях $Q \neq 1/2$ не найдено линий, на которых одновременно обращаются в нуль вещественная и мнимая части какого-либо собственного значения. При $Q = 1/2$ спектр собственных значений задачи (2.9)–(2.14) состоит из вещественных и комплексно-сопряженных пар чисел. В этом случае при переходе через нуль вещественного собственного значения происходит ветвление (с удвоением периода) нового семейства стационарно бегущих решений (рис. 7).

На рис. 8,а представлен профиль решения для второго семейства нелинейных волн, ответвившегося от кривой 1 на рис. 7 при $Re / Ka = 1$. В отличие от длинной волны первого семейства (волна-вмятина на рис. 3) в данном случае это волна-возвышение, кроме того, на переднем фронте имеется “рябь”. При волновых числах, превышающих значение, соответствующее значению $Re / Ka = 2$ на кривой 1 (см. рис. 7), появляются волны другого типа (см. рис. 8,б), которые не получаются непрерывным продолжением волн-возвышений или волн-вмятин при изменении параметра Re / Ka (см. рис. 8,в). Таким образом, при $Ka = 10$ из уравнений Навье — Стокса следует существование различных типов длинных волн и соответственно различных семейств решений. На плоскости параметров ($Re / Ka, \lambda_{neut}/\lambda$) имеется сложная взаимосвязь между этими семействами. На-

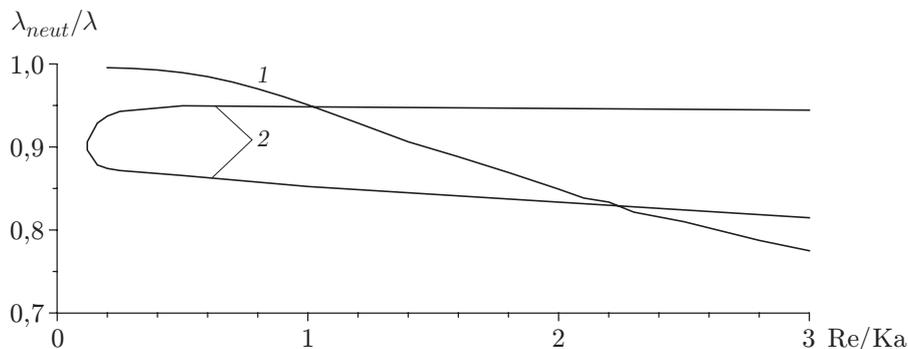


Рис. 7. Линии, по которым от решений первого семейства ответвляются новые стационарно бегущие режимы с удвоенным периодом:

1 — $Ka = 10$; 2 — $Ka = 2$

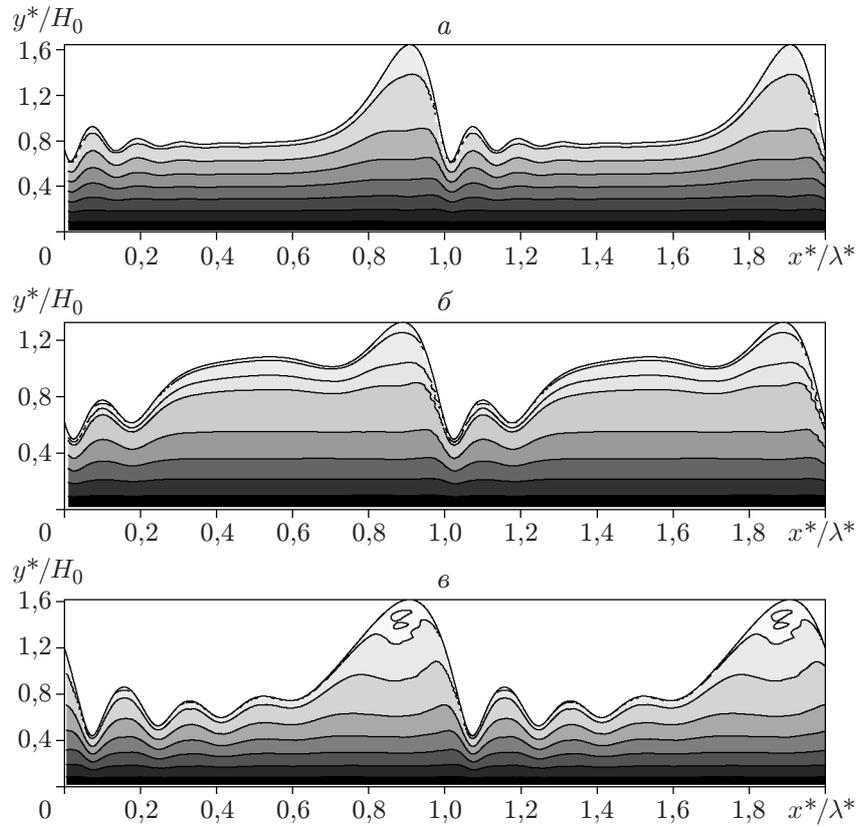


Рис. 8. Профиль толщины и линии равного уровня функции тока при $Ka = 10$:
 а — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,22$, $Re = 10$; б — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,2$, $Re = 20$; в — $\lambda_{neut}/\lambda = 0,26$, $Re = 24,1$

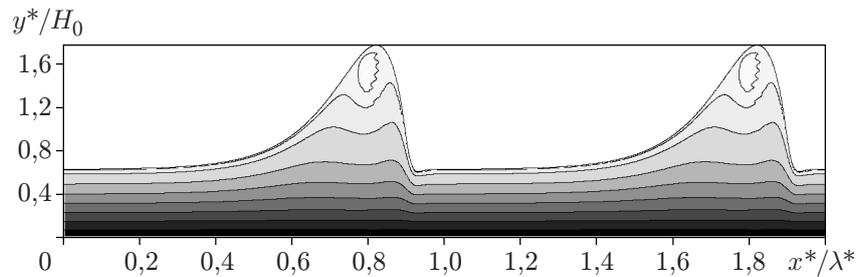


Рис. 9. Профиль толщины и линии равного уровня функции тока в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, при $Ka = 2$, $\lambda_{neut}/\lambda = 0,32$, $Re = 4,6$ (решение продолжено от волны первого семейства при увеличении Re (начиная с $Re = 0,2$) и при $\lambda_{neut}/\lambda = \text{const}$)

пример, при $Re/Ka = 1$ волны-возвышения могут быть получены либо ответвлением от кривой 1 на рис. 7 и продолжением по параметру λ_{neut}/λ , либо ответвлением от волн первого семейства, рассчитанных при увеличении Re/Ka (начиная с $Re/Ka = 0,1$) и при $\lambda_{neut}/\lambda = \text{const}$.

При $Ka = 2$ ситуация упрощается. Различных типов длинных волн в расчетах не обнаружено. Новые решения, отвечающие с удвоением периода на верхней части кривой 2 на рис. 7, вырождаются в решения первого семейства на нижней части кривой 2 на рис. 7. Таким образом, при $Ka = 2$ неединственность семейств стационарно бегущих решений существует лишь в небольшом диапазоне значений волнового числа. Отметим отсутствие

осциллирующий на переднем фронте длинных волн решений, полученных продолжением от волны первого семейства, при увеличении Re (начиная с $Re = 0,2$) и при $\lambda_{neut}/\lambda = \text{const}$, $Ka = 2$ (рис. 9).

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Расчеты нелинейных волновых режимов и их устойчивости по уравнениям Навье — Стокса имеют ряд отличий от соответствующих расчетов по интегральной модели. Ответвление новых семейств стационарно бегущих решений возможно только с удвоением их периода. Как следствие существует лишь несколько семейств стационарно бегущих решений. В расчетах по интегральной модели получено счетное множество различных семейств таких решений.

При больших числах Рейнольдса из найденных решений следует существование внутренней вихревой зоны, перемещающейся с фазовой скоростью волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nusselt W. Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Z. VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
3. Benjamin T. B. Wave formation in laminar flow down on inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 554–574.
4. Yih C. S. Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 321–334.
5. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–33.
6. Цвелодуб О. Ю. Солитоны на стекающей пленке при умеренных расходах жидкости // ПМТФ. 1980. № 3. С. 64–66.
7. Chang H.-C. Wave evolution on a falling film // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 103–136.
8. Nguyen L. T., Balakotaiah V. Modeling and experimental studies of wave evolution on free falling viscous films // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 2236–2256.
9. Chang H.-C. Complex wave dynamics on thin films / H.-C. Chang, E. A. Demekhin. N. Y.: Elsevier, 2002.
10. Алексеенко С. В. Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
11. Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Observations of solitary wave dynamics of film flows // J. Fluid Mech. 2001. V. 435. P. 191–215.
12. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
13. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 3. С. 63–67.
14. Trifonov Yu. Ya., Tsvlodub O. Yu. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. 1. Waves of the first family and their stability // J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 531–554.
15. Chin R. W., Abernathy F. H., Bertschy J. R. Gravity and shear wave stability of free surface flows. 1. Numerical calculations // J. Fluid Mech. 1986. V. 168. P. 501–513.
16. Salamon T. R., Armstrong R. C., Brown R. A. Traveling waves on inclined films: numerical analysis by the finite-element method // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 2202–2220.
17. Bach P., Villadsen J. Simulation of the vertical flow of a thin wavy film using a finite element method // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 2. P. 815–827.
18. Trifonov Yu. Ya. Viscous liquid film flows over a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. P. 1139–1161.