

УДК 532.5+519.63

## ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН С ПЛОСКИМ БЕРЕГОВЫМ СКЛОНОМ

О. И. Гусев<sup>\*,\*\*</sup>, Г. С. Хакимзянов<sup>\*,\*\*</sup>, Л. Б. Чубаров<sup>\*,\*\*</sup>,  
Д. Дутых<sup>\*\*\*,\*\*\*\*</sup>

\* Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090 Новосибирск, Россия

\*\* Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

\*\*\* Университет Гренобль-Альпы, 38058 Гренобль, Франция

\*\*\*\* Университет Савойи Монблан, 73000 Шамбери, Франция

E-mails: gusev\_oleg.igor@mail.ru, khak@ict.nsc.ru, chubarovster@gmail.com, denys.dutykh@gmail.com

Приведены результаты исследования влияния дисперсии на высоту наката и характеристики отраженных от берегового склона поверхностных волн. Расчеты выполнены в рамках нелинейных дисперсионной и бездисперсионной моделей мелкой воды с использованием предложенных граничных условий на подвижной линии уреза. На примере задачи с параметрами, близкими к характеристикам одной из камчатских бухт, показано, что при накате уединенных волн на плоские береговые склоны максимальные значения заплесков и амплитуд отраженных волн при использовании бездисперсионной модели завываются на 10–20 %.

Ключевые слова: поверхностные волны, линия уреза, заплеск на берег, нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды, краевые условия на линии уреза, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20210411

**Введение.** На Всероссийской конференции “Нелинейные волны — 2021”, посвященной 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В. М. Тешукова, была представлена работа [1], в которой выполнена оценка силового воздействия длинных поверхностных волн на объекты ответственного назначения в виде частично погруженных в воду тел (плавающие атомные электростанции, хранилища больших объемов сжиженного газа). Поскольку в некоторых случаях такие объекты целесообразно размещать в цунамиопасных прибрежных водах, при их проектировании и эксплуатации необходимо учитывать возможность катастрофического силового воздействия длинных поверхностных волн. В последнее вре-

---

Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий и программы “Инвестиции в будущее” (№ ANR-18-EURE-0016 — Solar Academy) Национального исследовательского агентства Франции, п. 2 “Метод решения” выполнен при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-00127).

© Гусев О. И., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б., Дутых Д., 2021

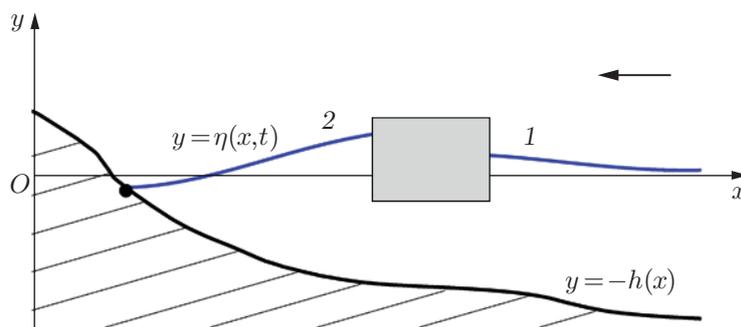


Рис. 1. Положение свободной границы  $y = \eta(x, t)$  в момент времени, когда набегающая волна (1) прошла за полупогруженную конструкцию и возникла отраженная от берега волна (2):

точка — точка уреза, движущаяся по береговому склону  $y = -h(x)$ , стрелка — направление движения набегающей волны

мья исследования в этом направлении ведутся более активно. Наряду с лабораторными экспериментами [2, 3] и аналитическими методами для определения характеристик взаимодействия волн с большими полупогруженными телами широко используются методы численного моделирования. Большое внимание уделяется исследованию максимальных заплесков на тело, характеристик отраженных от него и прошедших за него волн (на рис. 1 отраженная от берега волна показана линией 2). Однако силовое воздействие на тело отраженных от берега волн, которое в некоторых случаях по крайней мере сравнимо с воздействием набегающей волны (линия 1 на рис. 1), исследовано недостаточно.

В работе [4] приведены постановки задач о взаимодействии длинных поверхностных волн с полупогруженными телами в рамках иерархии моделей, в которую включены модели мелкой воды, в частности полностью нелинейная дисперсионная SGN-модель (Serge — Green — Naghdi) второго длинноволнового приближения [5], а также бездисперсионная NSW-модель (nonlinear shallow water equations) мелкой воды первого приближения.

Практическая значимость иерархического подхода состоит не только в повышении степени достоверности результатов моделирования с использованием моделей “старших” приближений, но и в существенной экономии вычислительных ресурсов при выполнении многовариантных расчетов за счет использования менее затратных алгоритмов на основе “младших” моделей, в случаях когда они обеспечивают необходимую точность.

Как известно, решение задач о накате волн на берег существенно осложняет подвижность линии уреза — границы между водой и сушей. Эта граница заранее неизвестна и должна определяться в ходе расчета вместе с другими искомыми величинами. Для расчета взаимодействия волн с берегом в рамках моделей мелкой воды наибольшее распространение получил метод сквозного счета в фиксированной области с неподвижными границами [6] с использованием различных процедур “улавливания” подвижной линии уреза [7–9]. Этот метод позволяет путем анализа вычисленных значений полной глубины приближенно определять положение границы вода — суша.

При использовании метода, в котором явно выделяется линия уреза, уравнения мелкой воды решаются только в области, занятой водой, а численные алгоритмы должны учитывать изменение во времени области решения, вызванное подвижностью линии уреза (см., например, работы [10, 11]). В рамках дисперсионных моделей мелкой воды этот метод ранее не применялся вследствие трудности постановки численных краевых условий на подвижной линии уреза и отсутствия доказательства необходимости учитывать дисперсию волн при их накате на берег, поскольку считается, что в случае длинных волн дисперси-

онные эффекты могут проявляться только при длительном распространении [12]. Однако в работе [13] на примере процесса взаимодействия цунами Тохоку (2011 г.) с волнозащитными сооружениями вблизи г. Сома (Япония) показано, что моделирование воздействия возникшего ондулярного бора на прибрежные волнорезы невозможно без учета дисперсии.

При определенных условиях возможно обрушение волн, набегающих на берег. Среди работ, посвященных изучению этого явления, отметим работы [14, 15], в которых предложены оригинальные нелинейно-дисперсионные модели и численные алгоритмы, позволяющие воспроизводить процесс обрушения волн вблизи берега с высокой точностью.

В настоящей работе для расчета наката поверхностных волн на берег в рамках одномерной SGN-модели используется метод явного выделения подвижной точки уреза. С помощью методики, применявшейся ранее для NSWЕ-уравнений [16], получены формулы для расчета траектории движения точки уреза и ее скорости. Оценивается влияние дисперсии волн на процесс их заплеска на плоский откос и формирование отраженных от него волн. Для этого сравниваются результаты расчетов с использованием SGN-модели и бездисперсионной NSWЕ-модели.

Моделирование наката на берег рассмотрим как самостоятельную методическую задачу, не связанную с моделированием силового воздействия волн на полупогруженные конструкции, поэтому в качестве набегающих на берег (прошедших за тело) волн будем использовать “модельные” уединенные волны определенной амплитуды.

**1. Постановка задачи для SGN-уравнений.** Рассмотрим ограниченный свободной поверхностью и непроницаемым дном слой несжимаемой невязкой жидкости, находящейся в гравитационном поле. Декартову систему координат  $Oxy$  выберем таким образом, чтобы уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имело вид  $y = 0$ , а известная функция  $y = -h(x)$  задавала рельеф дна и прилегающей суши. Будем полагать, что поверхностные волны распространяются по нормали к прямолинейной береговой линии. При указанных допущениях задача о накате волн на берег решается в рамках моделей мелкой воды в одномерном приближении.

В SGN-модели искомыми величинами являются осредненная по вертикали скорость  $u(x, t)$  и полная глубина  $H = \eta + h$ , где  $t$  — время;  $\eta(x, t)$  — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня. Кроме того, искомой является абсцисса  $x_0(t)$  точки уреза при  $t > 0$ , при этом

$$\dot{x}_0(t) = U(t) = u(x_0(t), t) \quad (1)$$

( $U(t)$  — скорость движения точки уреза).

Будем полагать, что волна движется по акватории справа налево и при накате точка уреза перемещается по береговому склону, находящемуся в левой части области. Таким образом, SGN-уравнения необходимо решать в области  $\Omega(t) = (x_0(t), l)$  с подвижной левой границей, на которой ставится краевое условие

$$H(x_0(t), t) = 0. \quad (2)$$

На неподвижной правой границе  $x = l$  задается условие непротекания, а в области  $\Omega(0)$  — начальные условия

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_{00}, l],$$

где  $x_{00} = x_0(0)$  — известное положение точки уреза в начальный момент времени.

Пусть гладкое невырожденное преобразование координат

$$x = x(q, t), \quad x(0, t) = x_0(t), \quad x(1, t) = l \quad (3)$$

взаимно однозначно отображает единичный отрезок  $\bar{Q} = [0, 1]$  на  $\bar{\Omega}(t) = [x_0(t), l]$ ,  $J$  — якобиан этого преобразования,  $J(q, t) = x_q(q, t) \geq J_0$ ,  $J_0 = \text{const} > 0$ . В координатах  $q, t$  система одномерных уравнений SGN-модели имеет вид [5]

$$(JH)_t + [(u - x_t)H]_q = 0; \quad (4)$$

$$(JHu)_t + [(u - x_t)Hu + gH^2/2]_q = gHh_q + \varphi_q - \psi h_q; \quad (5)$$

$$(k\varphi_q)_q - 6\varphi \left[ \frac{2J}{H^3} \frac{r-3}{r} + \left( \frac{h_q}{JH^2r} \right)_q \right] = F, \quad (6)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $\varphi$  — дисперсионная составляющая проинтегрированного по глубине давления в SGN-модели;  $\psi$  — дисперсионная составляющая давления на дне:

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HR + \frac{\varphi_q h_q}{J^2} \right), \quad r = 4 + \frac{h_q^2}{J^2}, \quad R = -g \frac{\eta_q h_q}{J^2} + u^2 \frac{1}{J} \left( \frac{h_q}{J} \right)_q,$$

$$k = \frac{4}{JHr}, \quad F = \left( g \frac{\eta_q}{J} + \frac{R h_q}{Jr} \right)_q - \frac{6RJ}{Hr} + 2 \frac{u_q^2}{J}.$$

В расщепленной системе уравнений (4)–(6) искомыми величинами являются скорость  $u(q, t)$ , полная глубина  $H(q, t)$ , положение точки уреза  $x_0(t)$  и дисперсионная составляющая давления  $\varphi(q, t)$ .

Переход в новую систему координат позволяет решать задачу в области  $Q$  с неподвижными границами. Аналогом условия (2) является краевое условие

$$H(0, t) = 0, \quad (7)$$

из которого следуют два крайевых условия

$$\varphi(0, t) = 0; \quad (8)$$

$$\left( k\varphi_q - \frac{6h_q}{JH^2r} \varphi \right) \Big|_{q=0} = \dot{U}(t) + \left( \frac{1}{J} g\eta_q + \frac{R}{Jr} h_q \right) \Big|_{q=0}, \quad (9)$$

используемые по отдельности на последовательных этапах численного алгоритма решения уравнения (6). На правой границе  $q = 1$  используются условие непротекания  $u(1, t) = 0$  и следующее из него краевое условие для дисперсионной составляющей  $\varphi$ :

$$\left( k\varphi_q - \frac{6h_q}{JH^2r} \varphi \right) \Big|_{q=1} = \left( \frac{1}{J} g\eta_q + \frac{R}{Jr} h_q \right) \Big|_{q=1}.$$

Бездисперсионные NSWE-уравнения мелкой воды следуют из уравнений (4), (5), если в последних положить  $\varphi \equiv 0$  и  $\psi \equiv 0$ .

**2. Метод решения.** Для численного решения задачи о накате волн на берег используется модифицированный вариант схемы предиктор-корректор [5], предназначенной для численного исследования течений жидкости с поверхностными волнами в акваториях с неподвижными границами. В этой схеме система уравнений гиперболического типа (4), (5) и уравнение (6) решаются поочередно как на шаге предиктор, так и на шаге корректор с использованием в правых частях и выражениях для коэффициентов разностных уравнений значений сеточных функций, вычисленных на предыдущих этапах вычислительного алгоритма. Модифицированная схема может быть использована для решения задач в области с подвижной границей, совпадающей с точкой уреза.

2.1. *Закон движения точки уреза.* Предположим, что в момент времени  $t = t^n$  адаптивная сетка  $\{x_j^n\}$  ( $j = 0, \dots, N$ ), скорость  $u_j^n$ , свободная граница  $\eta_j^n$ , дисперсионная составляющая давления  $\varphi_j^n$  и положение точки уреза известны, при этом  $x_0^n = x_0(t^n)$ ,  $u_0^n = U(t^n)$ ,  $H_0^n = 0$ . Для определения этих величин на следующем временном слое  $t^{n+1} = t^n + \tau$  сначала вычисляются новое положение точки уреза  $x_0(t^{n+1})$  и ее скорость  $U(t^{n+1})$ . При этом используются краевое условие (7), его следствия  $H_t(0, t) = 0$ ,

$H_{tt}(0, t) = 0$  и предположения, что уравнения (4), (5) выполняются во всей вычислительной области вплоть до левой границы  $q = 0$ , а начальные данные для этих уравнений заданы при  $t = t^n$  в виде функций непрерывного аргумента  $q$ :

$$u(q, t^n) = u^n(q), \quad H(q, t^n) = H^n(q), \quad q \in \bar{Q}. \quad (10)$$

Вид выражений для траектории движения точки уреза  $x_0(t)$  и ее скорости  $U(t)$  зависит от угла наклона свободной границы в точке ее пересечения с береговым склоном. В случае строгого неравенства (режим 1)

$$H_q^n(0) > 0 \quad (11)$$

закон движения точки уреза однозначно определяется из условия (2) [16], при этом траекторию  $x = x_0(t)$  точки уреза можно искать при  $t \geq t^n$  в виде степенного ряда по времени

$$x_0(t) = x_0^n + x_{01}(t - t^n) + x_{02}(t - t^n)^2/2 + x_{03}(t - t^n)^3/6 + O((t - t^n)^4). \quad (12)$$

Тогда из равенства (1) следует

$$U(t) = x_{01} + x_{02}(t - t^n) + x_{03}(t - t^n)^2/2 + O((t - t^n)^3), \quad (13)$$

откуда получаем  $x_{01} = U(t^n) = u_0^n$ , т. е. коэффициент  $x_{01}$  равен значению известной скорости жидкости в точке уреза в момент времени  $t = t^n$ .

Используя методику [16], остальные коэффициенты  $x_{0k}$  ( $k \geq 2$ ) также можно выразить через начальные данные (10), причем для произвольной формы берегового склона. Приведем формулы лишь для  $x_{02}$  и  $x_{03}$ , соответствующие плоскому откосу, сопряженному справа с участком постоянной глубины  $h_0$ :

$$y = -h(x) = \begin{cases} y_0 - x \operatorname{tg} \theta, & 0 \leq x \leq x_s, \\ -h_0, & x_s < x \leq l, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\theta > 0$  — угол наклона откоса;  $y_0 > 0$  — высота участка “суши” в точке  $x = 0$ ;  $x_s = (y_0 + h_0) \operatorname{ctg} \theta$  — абсцисса, соответствующая основанию склона. При такой форме дна справедливы следующие формулы для первых коэффициентов рядов (12), (13):

$$x_{01} = u_0^n, \quad x_{02} = -g(1 + \eta_x^n \operatorname{tg} \theta) \eta_x^n \Big|_{x=x_0^n}, \quad x_{03} = 2g(1 + 2\eta_x^n \operatorname{tg} \theta) u_x^n H_x^n \Big|_{x=x_0^n}. \quad (15)$$

Коэффициенты  $x_{02}$ ,  $x_{03}$  для бездисперсионной NSWE-модели вычисляются по формулам, отличающимся от (15):

$$x_{02} = -g \eta_x^n \Big|_{x=x_0^n}, \quad x_{03} = 2g u_x^n H_x^n \Big|_{x=x_0^n}. \quad (16)$$

Для второго возможного случая (режим 2)

$$H_q^n(0) = 0, \quad (17)$$

в котором в точке уреза касательная к свободной границе в момент времени  $t = t^n$  совпадает с касательной к поверхности дна, закон движения точки уреза находится из решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= U(t), \quad t > t^n, \\ \dot{U}(t) &= \left[ g - g \left( \frac{h_q}{J} \right)^2 - U^2(t) \frac{1}{J} \left( \frac{h_q}{J} \right)_q \right] \frac{h_q}{J} \Big|_{q=0}, \quad t > t^n \end{aligned} \quad (18)$$

с начальными условиями

$$x_0(t^n) = x_0^n, \quad U(t^n) = u_0^n. \quad (19)$$

В случае плоского откоса (14) задача (18), (19) имеет точное решение

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0^n + u_0^n(t - t^n) + g(1 - \operatorname{tg}^2 \theta) \operatorname{tg} \theta (t - t^n)^2/2, \\ U(t) &= u_0^n + g(t - t^n)(1 - \operatorname{tg}^2 \theta) \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Для NSWЕ-модели точное решение определяется формулами

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0^n + u_0^n(t - t^n) + g \operatorname{tg} \theta (t - t^n)^2/2, \\ U(t) &= u_0^n + g \operatorname{tg} \theta (t - t^n). \end{aligned} \quad (21)$$

Вид полученных формул для определения положения подвижной точки уреза и скорости ее движения зависит от режима взаимодействия волны с берегом. В численных расчетах режим определяется в соответствии со значением разностной производной  $H_{x,0}^n$  в узле  $x_0^n$ . В случае если эта производная удовлетворяет условию

$$H_{x,0}^n \geq \delta_H,$$

полагается, что реализуется первый режим (см. (11)), а при выполнении условия

$$H_{x,0}^n < \delta_H —$$

второй (см. (17)) ( $\delta_H > 0$  — заданный малый параметр, оптимальное значение которого зависит от шага сетки в вычислительной области и характеристик течения в окрестности точки уреза).

2.2. *Алгоритм расчета.* После того как новое положение точки уреза  $x_0(t^{n+1})$  и ее скорость  $U^{n+1} = U(t^{n+1})$  найдены, строится новая сетка  $\{x_j^{n+1}\}$  ( $j = 0, \dots, N$ ), узлы которой в момент времени  $t^{n+1}$  являются образами при отображении (3) узлов неподвижной равномерной сетки  $\{q_j\}$ , покрывающей вычислительную область  $\bar{Q}$  [5]. Левый узел  $x_0^{n+1}$  подвижной сетки совпадает с точкой уреза, и значения всех искомым величин в этом узле уже вычислены или определены из краевых условий

$$u_0^{n+1} = U^{n+1}, \quad H_0^{n+1} = 0, \quad \varphi_0^{n+1} = 0.$$

В других узлах эти величины вычисляются с помощью схемы предиктор-корректор с использованием одинаковых алгоритмов [5] решения уравнений (4), (5) для SGN- и NSWЕ-моделей. В случае использования SGN-модели для определения дисперсионной части давления дополнительно решается уравнение (6). При этом на шаге предиктор используется краевое условие (9), а на шаге корректор — условие (8).

**3. Результаты численного моделирования.** Рассматривается модельная задача с рельефом дна (14) в виде ровного горизонтального участка, сопряженного с плоским склоном. В качестве начальных данных при  $t = 0$  задается уединенная волна

$$\begin{aligned} \eta_0(x) &= a_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3a_0g}}{2U_0} \frac{x - x_w}{h_0} \right), \quad H_0(x) = h(x) + \eta_0(x), \\ u_0(x) &= -U_0 \frac{\eta_0(x)}{h_0 + \eta_0(x)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $x \in [x_{00}, l]$ ;  $a_0$  — амплитуда волны;  $x_w$  — абсцисса ее вершины;  $U_0 = \sqrt{g(h_0 + a_0)}$ . В формуле (14) величина  $y_0/h_0 = 1$  выбрана таким образом, чтобы максимальный вертикальный заплеск волны на склон не превышал этого значения.

В начальный момент времени вершина волны (22) располагалась на достаточном удалении от основания склона  $x_s$ , что гарантировало положение большей части начальной волны над горизонтальным участком дна. Заметим, что для случая постоянной глубины  $h_0$  и начальных данных (22) SGN-уравнения имеют точное решение в виде солитона,

движущегося с сохранением начальной формы влево со скоростью  $U_0$ . NSWЕ-уравнения не имеют решения в виде солитона, и при длительном движении над горизонтальным дном форма волны значительно отличается от начальной формы. Поэтому для изучения взаимодействия с откосом наименее деформированной уединенной волны ее нужно располагать практически вплотную к основанию откоса, например, следующим образом:

$$x_w = x_s + \lambda/2.$$

Здесь  $\lambda$  — эффективная длина волны, равная расстоянию между двумя симметричными относительно вершины точками ее поверхности, в которых высота волны составляет долю  $\Pi$  амплитуды  $a_0$ :

$$\eta_0(x_w \pm \lambda/2) = a_0\Pi.$$

Отсюда получаем

$$\lambda = 4h_0\sqrt{\frac{a_0 + h_0}{3a_0}} \ln\left(\sqrt{\frac{1}{\Pi}} + \sqrt{\frac{1}{\Pi} - 1}\right).$$

В расчетах использовалось значение  $\Pi = 0,05$ .

При  $t = 0$  абсцисса  $x_{00}$  определялась из уравнения  $\eta_0(x) + h(x) = 0$ . Длина области  $l$  задавалась таким образом, чтобы минимизировать влияние краевых условий на правой границе расчетной области на характеристики наката волны на склон:  $l = x_s + 100h_0$ . Значения  $h_0 = 42$  м,  $a_0 = 3$  м выбирались близкими к значениям параметров одной из камчатских бухт, для которой ранее были получены вероятностные оценки цунамиопасности со средней повторяемостью 1 раз в 100 лет. Угол склона  $\theta$  варьировался в диапазоне  $4 \div 15^\circ$ .

Исследуем трансформацию волны при взаимодействии со склоном. На рис. 2 показана рассчитанная с использованием SGN-модели свободная поверхность при величине угла склона  $\theta = 4^\circ$ . В начале процесса формируется отраженная от основания склона волна малой амплитуды, распространяющаяся в противоположном направлении (вправо). Передний фронт основной волны, движущейся по склону, становится более крутым.

Траектории движения точки уреза для углов  $\theta = 4, 8, 12^\circ$ , полученные в расчетах с использованием SGN- и NSWЕ-моделей, представлены на рис. 3. Видно, что с уменьшением

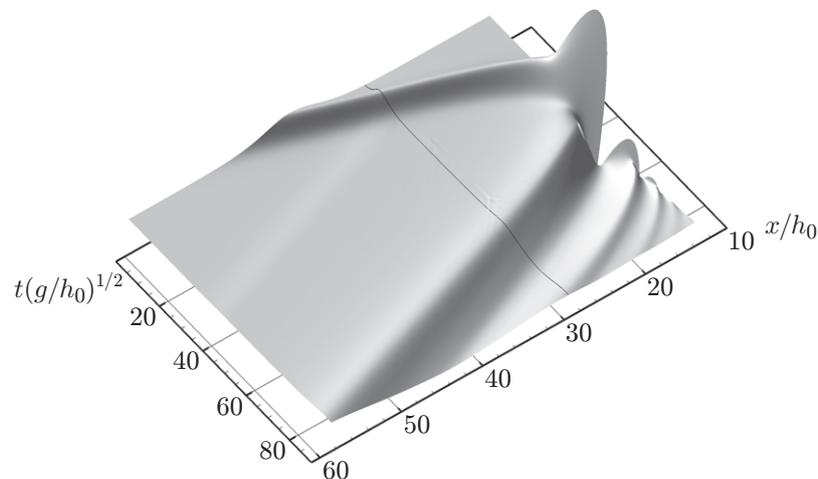


Рис. 2. Форма свободной поверхности волны при ее взаимодействии с плоским склоном ( $\theta = 4^\circ$ ), полученная с использованием SGN-модели: сплошная линия — положение начала склона

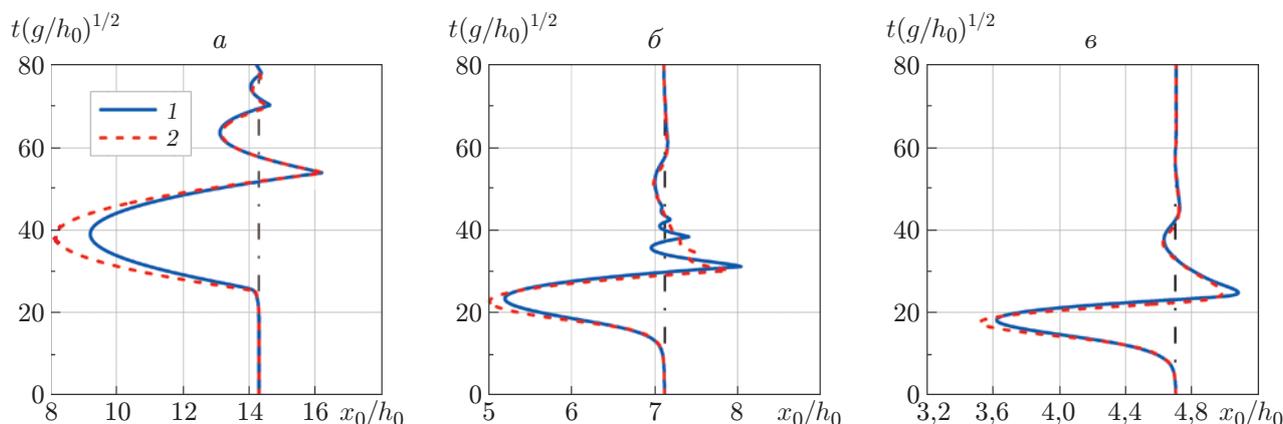


Рис. 3. Расчетные траектории движения точки уреза, полученные с использованием SGN-модели (1) и NSWЕ-модели (2) для различных значений угла склона:  $a$  —  $\theta = 4^\circ$ ,  $б$  —  $\theta = 8^\circ$ ,  $в$  —  $\theta = 12^\circ$

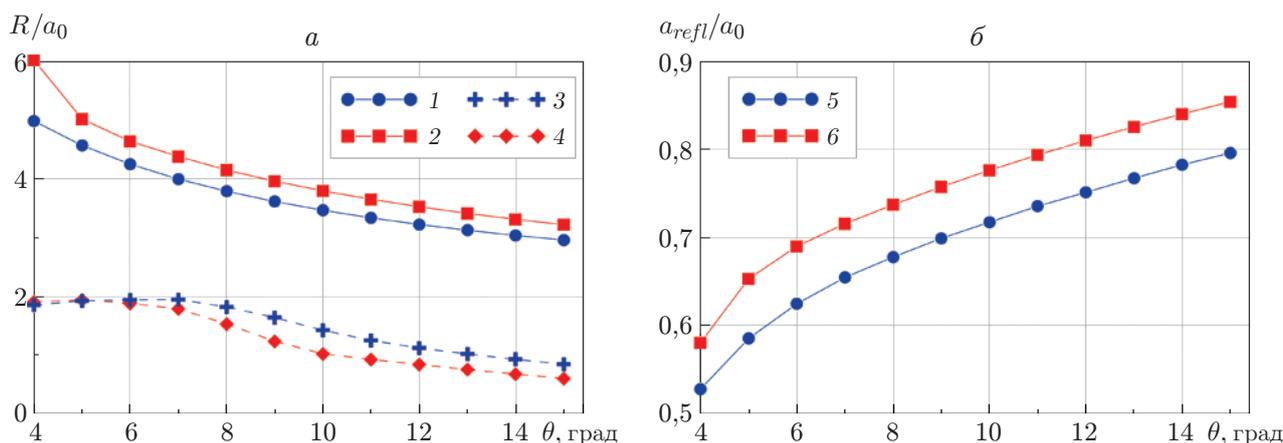


Рис. 4. Зависимости максимальной высоты заплесков (1, 2) и глубины отката (3, 4) (а), а также амплитуды отраженной волны (5, 6) (б) от величины угла склона, рассчитанные с использованием SGN-модели (1, 3, 5) и NSWЕ-модели (2, 4, 6)

угла склона траектория усложняется, число фаз наката и отката и высота наката увеличиваются (см. также рис. 4, а). Во всех случаях максимальная высота наката, рассчитанная с использованием NSWЕ-модели, приблизительно на 10–20 % больше, чем определенная с учетом частотной дисперсии (SGN-модель), для глубины отката имеет место обратное соотношение. Заметим, что при уменьшении угла склона, с одной стороны, увеличиваются расстояние и время прохождения волны по склону, вследствие чего увеличивается влияние дисперсионных эффектов, а с другой — уменьшается различие положений и значений скорости движения точки уреза, вычисленных по формулам (15), (20) (SGN-модель) и (16), (21) (NSWE-модель).

При откате за головной волной формируется цуг волн меньшей амплитуды, отчетливо видимый на записях виртуального мареографа, расположенного в точке  $x_w$ , а также на расчетных профилях свободной поверхности в момент времени  $t\sqrt{g/h_0} = 94$  (рис. 5). С уменьшением угла склона максимальная амплитуда отраженной волны уменьшается таким образом, что значения, полученные с использованием NSWЕ-модели, оказываются больше рассчитанных с использованием SGN-модели (рис. 4, б). Высота отраженной

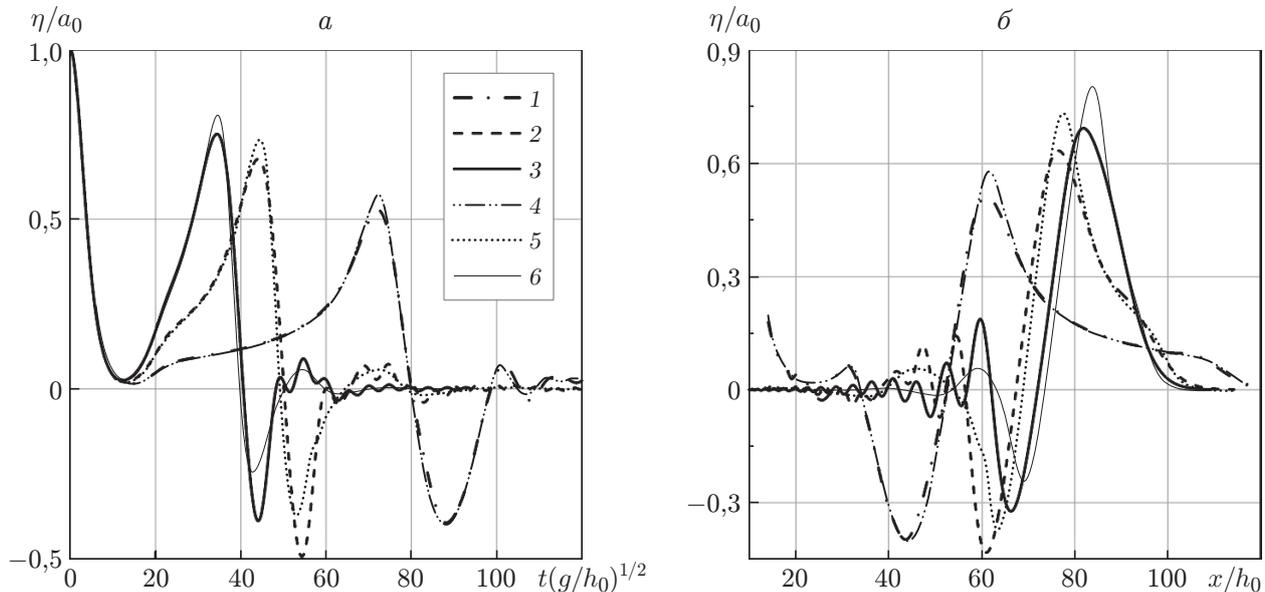


Рис. 5. Профили свободной поверхности, полученные с помощью виртуального мареографа, расположенного в точке  $x_w$  (а), и рассчитанные для момента времени  $t\sqrt{g/h_0} = 94$  (б):

1–3 — SGN-модель, 4–6 — NSWE-модель; 1, 4 —  $\theta = 4^\circ$ , 2, 5 —  $\theta = 8^\circ$ , 3, 6 —  $\theta = 12^\circ$

волны (разность максимальных по модулю положительных и отрицательных значений отклонения свободной поверхности при последовательных колебаниях), рассчитанная по SGN-модели, оказывается больше рассчитанной по NSWE-модели, поэтому силовое воздействие на полупогруженное тело может быть также бóльшим.

**Заключение.** В работе сформулированы краевые условия в подвижной точке уреза для полностью нелинейной дисперсионной модели мелкой воды второго приближения. Определено влияние дисперсионных эффектов при накате и формировании отраженных от плоского склона волн при различных значениях угла его наклона. Показано, что при учете дисперсии максимальные высота и дальность заплеска, а также амплитуда отраженной волны уменьшаются на 10–20 %. При увеличении угла склона глубина отката и высота отраженной волны увеличиваются.

Выявленные закономерности и предложенные аналитические и алгоритмические конструкции могут быть использованы для повышения точности моделирования взаимодействия длинных волн с полупогруженными телами, расположенными вблизи береговых склонов.

В дальнейшем предполагается рассмотреть более реалистичные рельефы дна и формы подходящих к берегу волн, моделировать взаимодействие волн не только со склоном, но и с расположенными вблизи берега полупогруженными телами с учетом других важных факторов, например трения о дно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев О. И., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б. Исследование характеристик воздействия длинных поверхностных волн на неподвижный частично погруженный недеформируемый объект методами численного моделирования // Нелинейные волны — 2021: Докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. 75-летию со дня рожд. чл.-кор. РАН В. М. Тешукова, Новосибирск, 2–4 марта 2021 г. С. 27. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/nw2021/625257/abstract.pdf>.

2. **Камынин Е. Ю., Максимов В. В., Нуднер И. С. и др.** Исследование взаимодействия уединенной волны с частично погруженным неподвижным сооружением // *Фундам. и прикл. гидрофизика*. 2010. № 4. С. 39–54.
3. **Lu X., Wang K.-H.** Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical-numerical approach // *Ocean Engng.* 2015. V. 109. P. 691–704.
4. **Khakimzyanov G. S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Pt 1. Mathematical models // *Comm. Comput. Phys.* 2020. V. 27, N 2. P. 321–378.
5. **Khakimzyanov G.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods / G. Khakimzyanov, D. Dutykh, Z. Fedotova, O. Gusev. Basel: Birkhäuser, 2020. (Lecture notes in geosystems mathematics and computing).
6. **Medeiros S. C., Hagen S. C.** Review of wetting and drying algorithms for numerical tidal flow models // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2013. V. 71. P. 473–487.
7. **Dutykh D., Katsaounis T., Mitsotakis D.** Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup // *J. Comput. Phys.* 2011. V. 230, N 8. P. 3035–3061.
8. **Shi F., Kirby J. T., Harris J. C., et al.** A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modelling of breaking waves and coastal inundation // *Ocean Model.* 2012. V. 43/44. P. 36–51.
9. **Pitt J. P. A., Zoppou C., Roberts S. G.** Solving the fully nonlinear weakly dispersive Serre equations for flows over dry beds // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2021. V. 93. P. 24–43.
10. **Судобичер В. Г., Шугрин С. М.** Движение потока воды по сухому руслу // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1968. Т. 13, вып. 3. С. 116–122.
11. **Лятхер В. М., Милитеев А. Н.** Расчет наката длинных гравитационных волн на откос // *Океанология*. 1974. Т. 14, № 1. С. 37–42.
12. **Kirby J. T., Shi F., Tehranirad B., et al.** Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects // *Ocean Model.* 2013. V. 62. P. 39–55.
13. **Morichon D., Roeber V., Martin-Medina M., et al.** Tsunami impact on a detached breakwater: Insights from two numerical models // *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng.* 2021. V. 147, N 2. 05021001.
14. **Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.** Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 808. P. 441–468.
15. **Kazakova M., Richard G.** A new model of shoaling and breaking waves: One-dimensional solitary wave on a mild sloping beach // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 862. P. 552–591.
16. **Bautin S. P., Deryabin S. L., Sommer A. F., et al.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2011. V. 26, N 4. P. 353–377.

*Поступила в редакцию 20/IV 2021 г.,  
после доработки — 20/IV 2021 г.  
Принята к публикации 26/IV 2021 г.*