

вие — это обеспечение критических значений параметра вдува [5, 6].

Из анализа полученных результатов следует, что процесс теплообмена плазменной струи и полусферической стенки при наличии вдува газа-охлаждителя через круглые отверстия не поддается обобщениям, справедливым для пористого охлаждения. Увеличение степени перфорации поращаемого участка, числа отверстий приводит к более равномерному вдуву охладителя, к раннему смыканию элементарных струй друг с другом и, как следствие, к снижению тепловых нагрузок к защищаемой стенке. Изменение площади поращаемого участка и радиуса моделей нарушает долю регенеративного охлаждения в процессе комбинированного теплообмена плазменной струи и стенки, что необходимо учитывать в ашпроксимационных законах тепломассообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анфимов Н. А. Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность тела // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1966.— № 1.
2. Авдеевский В. С., Глебов Т. А. Теплообмен в окрестности критической точки на поращаемой поверхности // ИФЖ.— 1970.— Т. 18, № 5.
3. Абалтусов В. Е. Исследование теплообмена на поращаемой поверхности при наличии вдува // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1985.— Вып. 2.
4. Мугалев В. П. Исследование теплообмена и характеристик турбулентного пограничного слоя на пористой поверхности // Тепло- и массоперенос.— Минск, 1968.— Т. 1.
5. Волчков Э. П. Пристенные газовые завесы.— Новосибирск: Наука, 1983.
6. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое.— М.: Энергия, 1972.
7. Гришин А. М., Абалтусов В. Е., Голованов А. Н. Экспериментальное исследование тепломассообмена плазменной струи с перфорированной поверхностью при наличии вдува // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1980.— Вып. 3.
8. Абалтусов В. Е., Голованов А. Н., Холкин А. С. Теплообмен плазменной струи с поращаемой стенкой // Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
9. Абалтусов В. Е., Голованов А. Н., Альперт С. И. Определение некоторых параметров низкотемпературной плазменной струи // Газодинамика неравновесных процессов.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
10. Дундр И., Кучера Я. Гидродинамическая структура турбулентной струи плазмы // Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики.— Новосибирск: Наука, 1977.
11. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита.— М.: Энергия, 1976.
12. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй.— М.: Физматгиз, 1960.
13. Основы теории полета космических аппаратов/Под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова.— М.: Машиностроение, 1972.

Поступила 15/XII 1986 г.

УДК 532.526

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

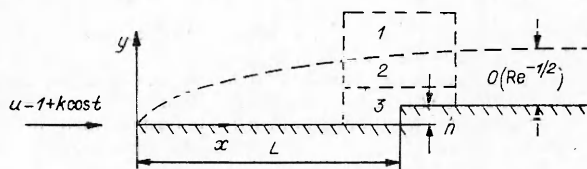
С. Н. Тимошик

(Москва)

1. Постановка задачи. Одним из наиболее типичных примеров локально возмущенного течения вязкой жидкости при большом числе Рейнольдса может служить обтекание пограничным слоем малых неровностей твердой поверхности — всевозможных изломов, уступов, бугорков и т. п. Интерес к исследованию подобных течений объясняется тем, что движение жидкости вблизи неровности сопровождается, как правило, большими градиентами давления, резким изменением напряжения поверхностного трения, формированием местных зон отрыва. Приближенное математическое описание возникающих здесь явлений удалось получить с помощью асимптотических методов решения уравнений Навье — Стокса [1—3]. Оказалось, что в большинстве интересных с практической точки зрения ситуаций решающую роль в организации локального течения играет процесс взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком.

В [4—6] развивается асимптотическая теория пульсирующих течений в каналах со слабодеформированными стенками. Полученные результаты свидетельствуют в первую очередь о том, что локальные процессы в нестационарном течении оказываются чрезвычайно сложными, если невозмущенный профиль скорости в некоторые моменты времени содержит противотоки.

В настоящей работе рассматривается плоское локально возмущенное течение в периодическом по времени ламинарном пограничном слое в несжимаемой жидкости. Такого типа пограничный слой возникает, например, около продольно обтекаемой полубесконечной пластины в потоке, набегающем на пластину со скоростью $U_\infty(1 + k \cos t)$, где t — время, отнесенное к $T_\infty(2\pi)^{-1}$, T_∞ — период пульсаций. Будем считать, что постоянная k удовлетворяет условиям $0 < k < 1$, тогда набегающий поток не меняет своего направления на всем периоде пульсаций. Введем ортогональную декартову систему координат, начало которой совпадает с передней кромкой пластины, ось абсцисс направим вдоль пластины по внеш-



нему потоку (см. рисунок). Координаты точек плоскости течения в этой системе обозначим через $(2\pi)^{-1}U_\infty T_\infty(x, y)$, соответствующие компоненты вектора скорости — $(u, v) U_\infty$, изменение давления по отношению к давлению в на-

бегающем потоке — $\rho U_\infty^2 p$, причем плотность жидкости ρ , как и кинематический коэффициент вязкости ν , будем считать постоянными. В безразмерных переменных уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + k \sin t = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь $\text{Re} = U_\infty^2 T_\infty / (2\pi\nu) \gg 1$ — число Рейнольдса. Отметим, что благодаря специальному выбору масштаба длины число Струхали оказалось равным единице.

Предположим, что на расстоянии L от передней кромки поверхность пластины имеет деформацию в виде ступеньки высотой h , тогда форму обтекаемой поверхности можно описать как

$$(1.2) \quad y = hf(x - L), \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$f(x) = 0 \quad (x < 0); \quad f(x) = 1 \quad (x \geq 0).$$

Прежде чем наложить более сильные ограничения на выбор h и L , рассмотрим некоторые свойства течения в невозмущенном пограничном слое. Представление решения в пограничном слое на гладкой пластине запишем в форме $u = U(x, Y, t) + o(1)$, $v = \text{Re}^{-1/2}[V(x, Y, t) + o(1)]$, $p = o(1)$, $Y = \text{Re}^{1/2} y = O(1)$, $U = \partial\Psi/\partial Y$.

Функции U и V являются решением обычной краевой задачи для нестационарного пограничного слоя, где в качестве градиента давления выступает функция $k \sin t$, а скорость на внешней границе пограничного слоя равна $U(x, +\infty, t) = 1 + k \cos t$. Указанная краевая задача изучена достаточно полно [7, 8]. В частности, можно показать, что вблизи передней кромки пластины течение квазистационарно, поэтому для напряжения трения на твердой поверхности $a(x, t) = \partial U / \partial Y(x, 0, t)$ справедлива оценка

$$(1.3) \quad a(x, t) = x^{-1/2} (1 + k \cos t)^{3/2} f_0''(0) + \dots \quad (x \rightarrow +0),$$

где f_0'' — вторая производная от функции Блазиуса.

На большом расстоянии от передней кромки пограничный слой имеет двухслойную структуру. В его пристеночной части справедливо решение Стокса, поэтому

$$(1.4) \quad a(x, t) = k \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \dots \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Из оценок (1.3) и (1.4) следует, что в пограничном слое существует некоторое характерное сечение $x = L_0$, левее его ($0 < x < L_0$) напряжение поверхностного трения остается положительной величиной в любой момент времени. При $x = L_0$ функция $a(x, t)$ обращается в нуль один раз за период, скажем, в момент $t = t_0$, $0 \leq t_0 < 2\pi$. Если же $x > L_0$, то на некоторой части периода напряжение трения на стенке оказывается отрицательным, при этом в пограничном слое есть противотоки.

Предполагается, что $L = L_0 + \text{Re}^{-1/8}l$, $h = \text{Re}^{-5/8}H$, $(l, H) = O(1)$ (параметр l введен из соображений общности, его роль будет показана ниже).

Опишем некоторые аналитические свойства решения задачи для невозмущенного пограничного слоя вблизи линии $x = L_0$ и попутно введем ряд обозначений:

$$\{U, \Psi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_n(Y, t), \Psi_n(Y, t)\} (x - L_0)^n \quad (x \rightarrow L_0);$$

$$\Psi_n = \frac{1}{2} a_n(t) Y^2 + \frac{1}{6} b_n(t) Y^3 + \frac{1}{12} c_n(t) Y^4 + \frac{1}{20} d_n(t) Y^5 + O(Y^6) \\ (Y \rightarrow +0);$$

$$\{\Psi_n, U_n, a_n, b_n, c_n, d_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\Psi_{nk}, U_{nk}, a_{nk}, b_{nk}, c_{nk}, d_{nk}\} (t - t_0)^k \quad (t \rightarrow t_0).$$

Согласно определению момента $t = t_0$ и линии $x = L_0$, имеем $a_{00} = a_{01} = 0$, $a_{10} < 0$. Скорость потока на внешней границе пограничного слоя обозначим через $\kappa(t) = 1 + k \cos t$, $\kappa_0 = 1 + k \cos t_0 > 0$.

Рассмотрим теперь течение в области взаимодействия около деформации. Для простоты ограничимся исследованием движения жидкости над пластиной.

2. Квазистационарные режимы взаимодействия. Предположим, что существует периодическое по времени решение уравнений (1.1) около поверхности (1.2) в интервале времени $0 \leq t < 2\pi$. В силу малой протяженности области взаимодействия локальное число Струхала оказывается малым, поэтому можно ожидать, что локальное течение будет квазистационарным, по крайней мере, на большей части периода.

Первый характерный режим течения возникает, если $t - t_0 = O(1)$. В эти моменты времени напряжение поверхностного трения отлично от нуля, поэтому профиль скорости в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя линейно зависит от поперечной координаты. Очевидно, что течение вблизи препятствия представляет собой обычное течение с трехслойной схемой взаимодействия [1—3], причем зависимость решения от времени параметрическая.

Укажем оценки для размеров вязкого подслоя области взаимодействия и давления на стенке, учитывая зависимость этих величин от времени:

$$(2.1) \quad x - L = O(\text{Re}^{-3/8} \kappa(t)^{3/2} a_0(t)^{-5/4}), \\ y = O(\text{Re}^{-5/8} \kappa(t)^{1/2} a_0(t)^{-3/4}), \quad p = O(\text{Re}^{-1/4} \kappa(t)^{1/2} a_0(t)^{5/4}).$$

Из оценок (2.1) следует, что при $t \rightarrow t_0$ характерные размеры вязкого подслоя увеличиваются, давление на стенке при этом падает. Можно показать, что уравнение импульсов для вязкого подслоя, нелинейное при $t - t_0 = O(1)$, линеаризуется, если $t \rightarrow t_0$.

Условие линейности профиля скорости перед вязким подслоем теряет силу при достаточно малых значениях $|t - t_0|$. В самом деле, невозмущен-

ный профиль скорости в вязком подслое, согласно (2.1), можно представить в виде

$$U = \text{Re}^{-1/8} \kappa(t)^{1/2} a_0(t)^{1/4} y_1 + \text{Re}^{-1/4} \frac{1}{2} b_0(t) \kappa(t) a_0(t)^{-3/2} y_1^2 + \dots,$$

$$y_1 = y \text{Re}^{5/8} \kappa(t)^{-1/2} a_0(t)^{3/4} = O(1).$$

Если $t \rightarrow t_0$, то выписанные члены разложения становятся величинами одного порядка при $a_0 = O(\text{Re}^{-1/14})$ или $t - t_0 = O(\text{Re}^{-1/28})$. В этом интервале времени возникает новый режим взаимодействия.

Второй характерный режим взаимодействия также оказывается квазистационарным. Сформулируем без вывода краевую задачу для пристеночного вязкого слоя, в котором переменные величины представляются как

$$(2.2) \quad t = t_0 + \text{Re}^{-1/28} t_2, \quad x = L_0 + \text{Re}^{-1/8} l + \text{Re}^{-2/7} x_2,$$

$$y = \text{Re}^{-4/7} y_2, \quad (x_2, y_2, t_2) = O(1),$$

$$u = \text{Re}^{-1/7} \left(\frac{1}{2} b_{00} y_2^2 + a_{02} t_2^2 y_2 \right) + \text{Re}^{-11/56} u_2 + \dots,$$

$$v = \text{Re}^{-27/56} v_2 + \dots, \quad p = \text{Re}^{-19/56} p_2 + \dots$$

Задача о взаимодействии имеет вид

$$(2.3) \quad \left(\frac{1}{2} b_{00} y_2^2 + a_{02} t_2^2 y_2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (b_{00} y_2 + a_{02} t_2^2) v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_2^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0,$$

где $p_2 = \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_2(s, t_2)}{\partial s} \frac{ds}{x_2 - s}$; $u_2 = (a_{10} l + b_{00} A_2) y_2 + a_{02} t_2^2 A_2 + o(1)$

($y_2 \rightarrow +\infty$); $u_2 = a_{10} l y_2 + o(1)$ ($x_2 \rightarrow -\infty$); $u_2 = -a_{02} t_2^2 Hf(x_2)$, $v_2 = 0$ ($y_2 = 0$). При выводе краевой задачи (2.3) используется процедура, аналогичная изложенным в [5, 6, 9]. Исследование поведения решения краевой задачи (2.3) при $t_2 \rightarrow 0$ показывает, что асимптотические разложения (2.2) теряют равномерную пригодность, если $t_2 = O(\text{Re}^{-3/112})$. Возникающий при этом третий характерный режим взаимодействия оказывается наиболее любопытным, так как он связан с одновременным проявлением нелинейности и нестационарности течения.

3. Нестационарный режим взаимодействия. Для описания третьего характерного режима взаимодействия введем новые независимые переменные: $x = L_0 + \text{Re}^{-1/8} l + \text{Re}^{-1/4} x_3$, $t = t_0 + \text{Re}^{-1/16} t_3$, $(x_3, t_3) = O(1)$. В потенциальной части области взаимодействия (область 1) имеем представление решения $y_{31} = \text{Re}^{1/4} y = O(1)$, $\{u, v, p\} = \{\kappa_0, 0, 0\} + \dots + \text{Re}^{-3/8} \{u_{31}(x_3, y_{31}, t_3), v_{31}(x_3, y_{31}, t_3), p_{31}(x_3, y_{31}, t_3)\} + \dots$ с обычным для теории взаимодействия соотношением

$$p_{31}(x_3, 0, t_3) = \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{31}(s, 0, t_3) \frac{ds}{s - x_3}.$$

Запишем решение в основной части пограничного слоя

$$(3.1) \quad u = U_{00}(Y) + \text{Re}^{-1/16} t_3 U_{01}(Y) + \text{Re}^{-1/8} [t_3^2 U_{02}(Y) +$$

$$+ l U_{10}(Y) + u_{32}(x_3, Y, t_3)] + \text{Re}^{-3/16} [t_3^3 U_{03}(Y) + l t_3 U_{11}(Y) +$$

$$+ u_{33}(x_3, Y, t_3)] + \text{Re}^{-1/4} [t_3^4 U_{04}(Y) + l t_3^2 U_{12}(Y) + x_3 U_{10}(Y) +$$

$$+ l^2 U_{20}(Y) + u_{34}(x_3, Y, t_3)] + \dots,$$

$$v = \text{Re}^{-3/8} v_{32}(x_3, Y, t_3) + \text{Re}^{-7/16} v_{33}(x_3, Y, t_3) +$$

$$+ \text{Re}^{-1/2} [v_{34}(x_3, Y, t_3) - \Psi_{10}(Y)] + \dots, \quad p = \text{Re}^{-3/8} p_{32}(x_3, t_3) + \dots$$

Нетрудно выписать результат интегрирования уравнений для неизвестных коэффициентов разложений (3.1). Ограничимся представлением продольной составляющей вектора скорости

$$(3.2) \quad u_{32} = A_{31}(x_3, t_3) U'_{00}(Y), \quad u_{33} = A_{32}(x_3, t_3) U'_{00}(Y) + t_3 A_{31} U'_{01}(Y), \\ u_{34} = A_{33}(x_3, t_3) U'_{00}(Y) + t_3 A_{32} U'_{01}(Y) + \frac{1}{2} A_{31}^2 U''_{00}(Y) + \\ + (t_3^2 U'_{02}(Y) + U'_{10}(Y)) A_{31}.$$

Здесь A_{31} , A_{32} , A_{33} — неизвестные функции, которые должны быть найдены при рассмотрении вязкого подслоя — области 3. Решение в вязком подслое представим как

$$u = \text{Re}^{-1/8} \frac{1}{2} b_{00} y_3^2 + \text{Re}^{-3/16} \left[\frac{1}{2} t_3 b_{01} y_3^2 + (t_3^2 a_{02} + l a_{10} + b_{00} A_{31}) y_3 \right] + \\ + \text{Re}^{-1/4} \left[\frac{1}{4} d_{00} y_3^4 + \frac{1}{3} t_3^2 c_{01} y_3^3 + \frac{1}{2} (t_3^2 b_{02} + l b_{10}) y_3^2 + (t_3^3 a_{03} + l t_3 a_{11} + \right. \\ \left. + b_{00} A_{32} + t_3 b_{01} A_{31}) y_3 + \frac{1}{2} b_{00} A_{31}^2 + (t_3^2 a_{02} + l a_{10}) A_{31} + u_3(x_3, y_3, t_3) \right] + \dots, \\ v = \text{Re}^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} b_{00} \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} y_3^2 \right] + \text{Re}^{-9/16} \left[-\frac{1}{2} \left(b_{00} \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} + t_3 b_{01} \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \right) y_3^2 - \right. \\ \left. - b_{00} A_{31} \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} y_3 - (t_3^2 a_{02} + l a_{10}) \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} y_3 + v_3(x_3, y_3, t_3) \right] + \dots, \\ p = \text{Re}^{-3/8} p_3(x_3, t_3) + \dots, \quad y_3 = y \text{Re}^{9/16} = O(1).$$

Краевая задача для вязкого подслоя области взаимодействия, полученная обычной процедурой с учетом (3.2), имеет вид

$$(3.3) \quad b_{00} y_3 \frac{\partial A_{31}}{\partial t_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} b_{00} y_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + b_{00} y_3 v_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0,$$

где

$$p_3 = -\frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_{31}(s, t_3)}{\partial s} \frac{ds}{x_3 - s};$$

$$u_3 = o(1) \quad (y_3 \rightarrow +\infty); \quad u_3 = o(1) \quad (x_3 \rightarrow -\infty);$$

$$u_3 = -(A_{31} + Hf) \left[\frac{1}{2} b_{00} (A_{31} + Hf) + t_3^2 a_{02} + l a_{10} \right], \quad v_3 = 0 \quad (y_3 = 0).$$

Условие разрешимости краевых задач типа (3.3) получено в [10, 11]. Введем новые переменные и параметры:

$$x_3 = \kappa_0 a_{02}^{-1/6} b_{00}^{-1/3} X, \quad t_3 = \kappa_0^{1/4} a_{02}^{-3/8} T, \\ A_{31} = HB(X, T), \quad \sigma = l a_{10} \kappa_0^{-1/2} a_{02}^{-1/4}, \\ H_0 = \frac{1}{2} H b_{00} \kappa_0^{-1/2} a_{02}^{-1/4}.$$

В этих переменных условие разрешимости задачи (3.3) запишем в форме

$$(3.4) \quad \frac{\partial B}{\partial T} = -\gamma \frac{\partial}{\partial X} \int_{-\infty}^X \left\{ (B(\xi, T) + f(\xi)) [T^2 + \sigma + H_0 (B(\xi, T) + f(\xi))] - \right. \\ \left. - \lambda \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\partial^2 B(s, T)}{\partial s^2} \frac{ds}{(s - \xi)^{1/2}} \right\} \frac{d\xi}{(X - \xi)^{3/4}}, \\ \gamma = \frac{\Gamma(5/4)}{2^{1/4} \pi}, \quad \lambda = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{3/2} \Gamma(5/4)}.$$

Для (3.4) необходимо поставить начальное условие. Выше было показано, что если $|T| \gg 1$, то течение квазистационарно, т. е. левая часть уравнения (3.4) пренебрежимо мала по сравнению с правой. Старший член в правой части при $T \rightarrow -\infty$ пропорционален интегралу от суммы $B(X, T) + f(X)$. Отсюда сразу следует, что условие квазистационарности течения при $T \rightarrow -\infty$ эквивалентно начальному условию для уравнения (3.4) вида

$$(3.5) \quad B(X, T) \rightarrow -f(X) \quad (T \rightarrow -\infty).$$

Сформулированная задача (3.4), (3.5) содержит два безразмерных параметра, физический смысл которых очевиден: H_0 представляет собой эффективную высоту препятствия для данного режима взаимодействия, постоянная σ характеризует расположение препятствия в пограничном слое. Отметим также, что комбинацию $T^2 + \sigma$ можно рассматривать как невозмущенное напряжение поверхностного трения в потоке перед препятствием: чем меньше σ , тем сильнее противотоки в невозмущенном пограничном слое.

4. Корректность постановки задачи Коши и устойчивость решения. Отметим определенную аналогию между (3.4) и нестационарным вариантом уравнения теории кромочного отрыва [10, 11]. В [12] показано, что задача Коши для уравнения кромочного отрыва оказывается некорректно поставленной при достаточно общих начальных данных. В связи с этим возникает вопрос о корректности постановки задачи (3.4), (3.5). Кроме того, условие периодичности течения требует, чтобы решение данной задачи при $T \rightarrow +\infty$ также стремилось к квазистационарному пределу (3.5).

Рассмотрим эти вопросы в рамках линейной теории, справедливой для препятствий с высотой $H_0 \ll 1$ (более полное исследование свойств задачи (3.4), (3.5) будет выполнено отдельно). Пренебрегая в уравнении (3.4) нелинейным слагаемым и выполняя преобразование Фурье вида

$$B^*(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(X, T) \exp(-i\omega X) dX,$$

исходную задачу приведем к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого, удовлетворяющее начальному условию (3.5), имеет вид

$$(4.1) \quad B^* = -f^*(\omega) \left[1 - \gamma_1(i\omega)^{5/4} |\omega| \int_{-\infty}^T \exp[r(s)] ds \right],$$

$$r(s) = \frac{1}{3} \gamma_0(i\omega)^{3/4} (s^3 - T^3) + [\gamma_0 \sigma (i\omega)^{3/4} + \gamma_1(i\omega)^{5/4} |\omega|] (s - T),$$

$$\gamma_1 = 2^{-5/4} \pi^{1/2}, \quad \arg[(i\omega)^m] \in (-m\pi, m\pi).$$

Здесь $f^*(\omega)$ — фурье-образ формы деформации. Для простоты можно считать функцию $f(X)$ достаточно гладкой.

В любой конечный момент времени T поведение решения (4.1) при $|\omega| \rightarrow \infty$ определяется формулой $B^* = -\frac{\gamma_0(T^2 + \sigma) f^*(\omega)}{\gamma_1(i\omega)^{1/2} |\omega|} (1 + o(1))$. Это представление не является равномерным на больших масштабах времени. Поэтому положим $T = |\omega|^{3/4} T_1$, $T_1 = O(1)$. Тогда при $|\omega| \rightarrow \infty$ получим оценку $B^* = -f^*(\omega) \frac{\gamma_0 T_1^2}{\gamma_0 T_1^2 + \gamma_1 (i \operatorname{sign} \omega)^{1/2}} (1 + o(1))$. Из последнего соотношения непосредственно следует, что при $T_1 \rightarrow \pm\infty$ решение (4.1) имеет квазистационарные асимптоты.

Таким образом, существование решения и его свойства убеждают в корректности постановки задачи (3.4), (3.5) при бесконечно малых значениях H_0 . Можно надеяться, что аналогичными свойствами обладает решение нелинейного уравнения, по крайней мере, в некотором диапазоне изменения H_0 .

Наряду с вопросом существования решения задачи (3.4), (3.5) исследуем устойчивость такого решения. Положим для простоты $H_0 = 0$ и $f(X) = 0$. Уравнение становится линейным и однородным с однородным начальным условием. Решение такой задачи тривиально: $B = 0$ (невозмущенный поток). Пусть в момент времени $T = T_0$ в поток вносятся бесконечно малые возмущения, создающие некоторое распределение функции $B(X, T_0)$. Предполагая, что дальнейшая эволюция возмущений описывается уравнением (3.4), при $H_0 = f = 0$ получаем выражение для фурье-образа решения

$$(4.2) \quad B^* = B^*(\omega, T_0) \exp \left\{ -\frac{1}{3} \gamma_0 (i\omega)^{3/4} (T^3 - T_0^3) - \left[\gamma_0 (i\omega)^{3/4} \sigma + \gamma_1 (i\omega)^{5/4} |\omega| \right] (T - T_0) \right\}.$$

Для того чтобы существовало обратное преобразование Фурье, необходимо, чтобы функция $B^*(\omega, T)$ не имела экспоненциального роста при $\omega \rightarrow +\infty$. Понятно, что это достигается лишь в довольно узком классе начальных данных. Таким образом, задача Коши с начальными данными, определенными в конечный момент времени, оказывается, вообще говоря, некорректно поставленной. Как и в теории кромочного отрыва, указанная некорректность связана с интенсивным ростом амплитуды коротковолновых гармоник начального возмущения в моменты времени, последующие за T_0 . В этом случае для описания эволюции возмущений необходим дополнительный анализ решения на более мелких пространственных и временных масштабах, чем те, которые были выбраны при выводе уравнения (3.4). Разумеется, можно подобрать начальное возмущение таким, что прообраз Фурье у выражения (4.2) будет существовать в любой момент времени (как, например, для возмущений с финитным спектром). Тогда при $T \rightarrow +\infty$ возмущение затухает.

Допустим, что спектр возмущений содержит гармоники с большими, но конечными волновыми числами. В процессе эволюции таких возмущений можно выделить два этапа: на первом происходит бурный рост амплитуды коротковолновых гармоник, затем начиная с некоторого момента времени возмущения затухают. Понятно, что чем больше волновое число, тем позднее происходит затухание соответствующей гармоники.

Автор благодарит В. В. Сычева и А. И. Рубана за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики.— 1979.— Т. 2, вып. 4.
2. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики.— 1981.— Т. 4, вып. 2.
3. Smith F. T. On the high-Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math.— 1982.— V. 28.
4. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1980.— V. 33, pt 1.
5. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels 2 // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1985.— V. 38, pt 4.
6. Cowley S. J. Pulsatile flow through distorted channels: low-Strouhal-number and translating-critical-layer effects // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1985.— V. 38, pt 4.
7. Telionis D. P. Unsteady viscous flows.— N. Y. et al.: Springer-Verlag, 1981.
8. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.— М.: Мир, 1983.
9. Липатов И. И. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 4.
10. Smith F. T. Concerning dynamic stall // Aeron. Quart.— 1982.— V. 33, N 4.
11. Рубан А. И. Об устойчивости предотрывного пограничного слоя на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 6.
12. Ryzhov O. S., Smith F. T. Short-length instabilities, breakdown and initial value problems in dynamic stall // Mathematika.— 1984.— V. 31, pt 2, N 62.

Поступила 15/XII 1986 г.