

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. Kirschfeld, Metall, 14, 3, 1960.
2. L. Kirschfeld, Metall, 15, 9, 1961.
3. А. Мачек. Вопросы ракетной техники, 1968, 12.
4. Г. Маркштейн. Ракетная техника и космонавтика, 1963, 3.
5. Т. Бржустовский, И. Глассен. Сб. Гетерогенное горение. М., «Мир», 1967.
6. П. Ф. Похил, В. М. Мальцев, В. М. Зайцев. Методы исследования процессов горения и детонации. М., «Наука», 1969.
7. А. Ф. Беляев, Ю. В. Фролов, А. И. Коротков. ФГВ, 1968, 4, 3.
8. А. И. Бродский. Физическая химия, т. I. М.—Л., Госхимиздат, 1948.
9. К. Е. Уикс, Ф. Е. Блок. Термодинамические свойства 65 элементов, их оксидов, галогенидов, карбидов и нитридов. Перев. с англ. «Металлургия», 1965.
10. Справочник химика, т. II. «Химия», 1965.
11. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1947.
12. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.

УДК 536.46

### О ПОГРЕШНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРЕНИЯ ЧАСТИЦ ОТ ИХ РАЗМЕРОВ

*Е. С. Озеров, С. А. Чивилихин, А. А. Юринов*  
(Ленинград)

В работе [1] зависимость времени горения и времени задержки воспламенения от размеров частиц строится путем сопоставления интегральных кривых распределения частиц по размерам и значениям времени. Показано, что в случае однозначной связи между временем и размером функции интегрального распределения частиц по этим характеристикам равны для соответственных значений последних. Приведенный вывод, однако, получен без учета случайных погрешностей измерения каждого из значений размеров и времени. Чтобы установить характер влияния ошибок измерений на искомую зависимость, рассмотрим простой случай, когда все распределения подчиняются нормальному закону:

$$f_x = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия, а  $a$  — математическое ожидание случайной величины  $x$  [2]. Функция  $f_x$  нормируется в области значений  $-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x dx = 1.$$

Хотя в рассматриваемой задаче для  $x < 0$  эта функция не имеет смысла (нет отрицательных значений диаметров и времени), указанная нормировка допустима, поскольку при выборе аппроксимирующей формулы для  $f_x$  обычно с достаточной степенью точности удовлетворяется условие  $f_x(x < 0) = 0$ .

Припишем индекс «нуль» истинному распределению, индекс «1» — распределению, построенному по опытным данным, индекс «2» — распределению абсолютных ошибок измерений. Тогда опытное распределение связано с истинным следующим образом:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y-a) f_2(x-y) dy$$

или в соответствии с принятым выше

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(x-y)^2}{2\sigma_2^2}} dy.$$

Подстановка  $y = z - \rho$  при  $\rho = -\frac{a\sigma_2^2 + x\sigma_0^2}{\sigma_2^2 + \sigma_0^2}$  приводит к интегралу

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \frac{\sigma_2^2 + \sigma_0^2}{2\sigma_0^2\sigma_2^2} - \frac{(x-a)^2}{2(\sigma_2^2 + \sigma_0^2)}} dz,$$

отсюда

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2 + \sigma_0^2)}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(\sigma_2^2 + \sigma_0^2)}}, \quad (2)$$

т. е. опытное распределение отличается от истинного большей дисперсией,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)^2. \quad (3)$$

Рассмотрим, каким образом это повлияет на результаты построения зависимости характерного времени от размера частиц, если уравнение связи времени и размера имеет вид  $\tau = c\delta^n$ . Одинаковый закон распределения возможен только для величин, связанных линейной зависимостью, поэтому дополнительно предполагаем, что нормальным законам (1) подчиняются распределения частиц по размерам в степени «n» ( $\delta^n$ ) и значениям времени ( $\tau$ ). Тогда функции интегрального распределения частиц запишутся в виде:

$$I\delta^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta^n} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_\delta^2}} d\frac{x-a}{\sigma_\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\delta^n - a}{\sigma_\delta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad (4)$$

$$I\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_\tau^2}} d\frac{x-b}{\sigma_\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau - b}{\sigma_\tau}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5)$$

Очевидно, что используемое в [1] правило сравнения значений интегральных функций распределения при соответственных значениях времени и размера для (4) и (5) приводит к равенству

$$\frac{\delta^n - a}{\sigma_\delta} = \frac{\tau - b}{\sigma_\tau}$$

или

$$\frac{\delta^n}{\sigma_\delta} = \tilde{\delta}^n = \left(1 - \frac{\tilde{b}}{\tilde{\sigma}}\right), \quad (6)$$

здесь

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\delta}}; \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{a}; \quad \tilde{\delta}^n = \frac{\delta^n}{a}; \quad \tilde{b} = \frac{b}{a}.$$

Легко видеть, что если действительная зависимость имеет вид  $\tau = c\delta^n$  (на рисунке ей соответствует кривая 2 при  $\tilde{b} = \tilde{\sigma} = 1$ ), то с увеличением ошибки измерения характерного времени (увеличением  $\sigma_{\tau}$ ) при пренебрежимо малой погрешности измерения размеров ( $\tilde{\sigma} > \tilde{b}$ ) из (6) получим зависимость, пересекающую действительную кривую снизу вверх кривая 1 ( $\tilde{b} = 0, \tilde{\sigma} = 1$ ). В обратном случае  $\tilde{\sigma} < \tilde{b}$  полученная зависимость пересечет истинную слева направо (кривая 3 для  $\tilde{b} = 10, \tilde{\sigma} = 1$ ).

В опытных обработках наблюдались пересечения обоих типов.

Для частиц правильной сферической формы точность измерения размеров была обычно выше точности измерения времени горения. В этих случаях зависимости, полученные «статистическим методом» для каждой из нескольких фракций порошка, пересекали снизу вверх зависимость, построенную по средним арифметическим значениям времени горения и размеров для этих фракций. В случае испытания частиц неправильной формы существенно возрастала погрешность измерения размеров и тогда «статистические зависимости» пересекали слева направо зависимость, построенную по средним арифметическим значениям величин (аналогично случаю  $\tilde{\sigma} < \tilde{b}$  на рисунке).

Следует указать, что судя по (3) погрешность статистического метода будет тем меньше, чем шире фракция, если увеличение ширины фракции не влечет за собою увеличение погрешности измерений. При испытаниях нескольких фракций с нормальным законом распределения частиц по размерам (1) истинная зависимость  $\tau = \tau(\delta)$  может быть построена по математическим ожиданиям  $a$  величин, измеренных для каждой фракции. В этом случае кривую распределения частиц для значений характерного времени (формула (1)) нужно строить по этим значениям времени в степени  $\frac{1}{n}$  (если  $\tau = c\delta^n$ ). Поскольку заранее показатель степени  $n$  неизвестен, он находится последовательными приближениями.

В случае, когда испытание ведется на одной фракции и известно распределение ошибок измерений, ставится задача построения истинной кривой распределения по опытной зависимости. Для нормальных распределений эта задача решена выше

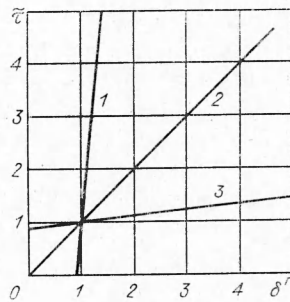
$$f_0 = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (7)$$

при

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

В более общем случае (произвольный вид функций  $f$ ) функция  $f_0$  определяется путем решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром, зависящим от разности [3]:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y) f_2(x-y) dy$$



Зависимость характерного времени от размера в степени  $n$  при значении параметра  $b=1$ .

С использованием комплексного преобразования Фурье

$$f_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

можно получить

$$f_{0\omega} = \frac{f_{1\omega}}{f_{2\omega}}$$

и

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{f_{1\omega}}{f_{2\omega}} d\omega.$$

Чаще всего для распределения ошибок измерений  $f_2$  принимают нормальный закон (1), тогда

$$f_{2\omega} = e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}$$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x + \frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} f_{1\omega} d\omega. \quad (8)$$

Задача сводится к отысканию аналитического выражения для функции опытного распределения  $f_1$  и построению для нее Фурье-образа  $f_{1\omega}$ .

В заключение укажем, что здесь не обсуждался вопрос об учете ошибок статистического метода, связанных с погрешностью аппроксимации опытного распределения и конечностью числа измерений каждой из величин. Очевидно, что эти ошибки должны быть учтены при указании доверительной вероятности и доверительного интервала [2, 4] для коэффициента пропорциональности и показателя степени в зависимости характерного времени от размера.

Поступила в редакцию  
29/VI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Гуревич, Г. В. Игнатов и др. ФГВ, 1969, 5, 3.
2. Д. Худсон. Статистика для физиков. М., «Мир», 1970.
3. Справочная математическая библиотека. Интегральные уравнения. М., 1968.
4. О. Н. Кассандрова, В. В. Лебедев. Обработка результатов наблюдений. М., «Наука», 1970.