УДК 532.59:539.3:534.1

ПОВЕДЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УЧАСТКА ДНА

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Методом Винера — Хопфа получено аналитическое решение задачи о колебаниях упругой полубесконечной плавающей пластины при колебаниях участка дна, вызванных землетрясением. В явном виде получено решение без учета инерционного члена. Проведено численное исследование амплитуд поверхностных волн и прогиба ледяной пластины от частоты и положения колеблющегося участка дна, толщины льда и глубины жидкости.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая тонкая пластина, метод Винера — Хопфа.

Введение. Задача о гидроупругом поведении плавающих упругих пластин изучалась ранее применительно к ледяному покрову [1–3]. В настоящее время интерес к этой задаче возрос в связи с проектами построения плавучих аэродромов, искусственных островов и плавающих платформ различного назначения. Гигантские размеры таких объектов затрудняют выполнение критериев подобия при экспериментальных исследованиях, поэтому численное моделирование играет большую роль в их изучении.

Задача дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине изучена достаточно хорошо. Недостаточно исследовано динамическое поведение плавающей пластины под действием внешней нагрузки (обзор [4]), а также поведение пластины при землетрясении [5]. В работе [5] дно моделируется однородной упругой средой (полупространством), в котором распространяются продольные и поперечные волны от эпицентра землетрясения, а жидкость предполагается сжимаемой невесомой. В настоящей работе изучается поведение упругой полубесконечной пластины, плавающей на поверхности несжимаемой весомой жидкости, при заданных периодических колебаниях дна. Методом Винера — Хопфа построено аналитическое решение данной задачи в плоской постановке.

1. Постановка задачи. Жидкость предполагается идеальной несжимаемой глубины H_0, а ее течение — безвихревым. Пластина имеет постоянную толщину h и представляет собой полуплоскость. Колебания пластины вызваны периодическими по времени колебаниями дна. Левый край пластины принимается за начало декартовой системы координат Oxy. Будем предполагать, что толщина пластины значительно меньше длины распространяющихся волн в пластине. Используем модель тонких пластин. Осадкой пластины в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00739) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-902.2003.1).

Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям в виде

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0 \qquad (-H_0 < y < 0),\\ \varphi_y = w_t \quad (y = 0, -H_0), \qquad w(x, -H_0, t) = u(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t},\\ D\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \qquad (y = 0, \quad x > 0),\\ p = 0 \quad (y = 0,\ x < 0), \qquad p = -\rho(\varphi_t + gw).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь w — вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины); p — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; ρ, ρ_0 — плотности жидкости и пластины; t — время; ω — частота колебаний дна; $u(x)$ — амплитуда смещений дна. На краю пластины должны обращаться в нуль момент и перерезывающая сила

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad (y = 0, \quad x = 0). \tag{1.2}$$

Рассмотрим сначала случай точечного источника на дне: $u(x) = u_0\delta(x - x_0)$. Зависимость всех функций от времени выражается множителем $\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Введем характерную длину $l = g/\omega^2$ и безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad x_* = \frac{x_0}{l}, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad \varphi' = \frac{\omega\varphi}{gu_0}, \quad w' = \frac{w}{u_0}, \quad t' = \omega t$$

(штрихи в дальнейшем будем опускать). Представим потенциал в виде $\varphi = \phi\,\mathrm{e}^{-it}$. Тогда из (1.1), (1.2) получим краевую задачу для ϕ:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (-H < y < 0);$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -i\delta(x - x_*) \qquad (y = -H); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - \phi = 0 \qquad (y = 0, \quad x < 0); \tag{1.4}$$

$$\Big(\beta\,\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - d\Big)\frac{\partial\phi}{\partial y} - \phi = 0 \quad (y = 0,\ x > 0), \qquad \beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad d = \frac{\rho_0 h}{\rho l}; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \qquad (y = 0, \quad x = 0). \tag{1.6}$$

Здесь H, x_*, β, d — безразмерные параметры задачи: соответственно глубина жидкости и центр колеблющегося участка, приведенные жесткость и осадка пластины. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \to \infty$ и условия регулярности вблизи кромок (локальная ограниченность энергии).

2. Интегральные уравнения. Решение задачи будем строить методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса [6]. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной α

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{i\alpha x}\,\phi(x, y)\,dx, \qquad \Phi_-(\alpha, y) = \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{i\alpha x}\,\phi(x, y)\,dx,$$

$$\Phi(\alpha, y) = \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_+(\alpha, y). \tag{2.1}$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < 0$. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости. Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\phi(x, y)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \alpha^2\Phi = 0.$$

Условие (1.3) на дне преобразуется к виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha, -H) = -i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\,. \tag{2.2}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)Z(\alpha, y) + S(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(\alpha(y + H)), \qquad Z(\alpha, y) = \mathrm{ch}\,(\alpha(y + H))/\,\mathrm{ch}\,(\alpha H).$$

Из (2.2) получаем $S(\alpha) = -i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}/\alpha$. Тогда

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)Z(\alpha, y) - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\,\mathrm{sh}\,(\alpha(y + H))/\alpha. \tag{2.3}$$

Обозначим через $D_\pm(\alpha)$ интегралы типа (2.1), где функция ϕ под интегралом заменяется левой частью краевого условия (1.4), а через $F_\pm(\alpha)$ — аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (1.5). Введем функции

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_+(\alpha), \qquad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_+(\alpha),$$

представляющие собой образы Фурье от дисперсионных функций, которые будем понимать в смысле обобщенных функций [7]

$$D(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha, 0) - \Phi(\alpha, 0), \qquad F(\alpha) = (\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\alpha, 0) - \Phi(\alpha, 0).$$

Из краевых условий (1.4) и (1.5) имеем

$$D_-(\alpha) = 0, \qquad F_+(\alpha) = 0.$$

Тогда

$$D_+(\alpha) = D(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha) - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}[\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha]; \tag{2.4}$$

$$F_-(\alpha) = F(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha]. \tag{2.5}$$

Здесь $K_1(\alpha) = \alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1$, $K_2(\alpha) = (\beta\alpha^4 + 1 - d)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1$ — дисперсионные функции для жидкости со свободной поверхностью и под пластиной. Обе дисперсионные функции четные. Дисперсионное соотношение на свободной поверхности $K_1(\alpha) = 0$ имеет два действительных корня $\pm\gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, расположенных симметрично относительно действительной оси [8], $\gamma_n \to in\pi/H$ при $n \to \infty$.

Дисперсионное соотношение под пластиной $K_2(\alpha) = 0$ имеет два действительных корня $\pm\alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm\alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей [8]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} — корень во втором квадранте, $\alpha_n \to in\pi/H$ при $n \to \infty$.

Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся поверхностные и изгибно-гравитационные волны, остальные корни — краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от источника возмущения.

Исследуем поведение функций $\Phi_\pm(\alpha, y)$. При $x \to -\infty$ потенциал ϕ представляет собой волну вида $R\mathrm{e}^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1. Поэтому $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < |\gamma_1|$ за исключением полюса при $\alpha = \gamma$. При $x \to \infty$ потенциал ϕ представляет собой волну вида $T\,\mathrm{e}^{i\alpha_0 x}$ и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\{\operatorname{Im}\alpha > -c\}$ за исключением полюса в точке $\alpha = -\alpha_0$, где $c = \min\{\operatorname{Im}(\alpha_1), \operatorname{Im}(\alpha_{-1})\}$.

Исключая из соотношений (2.4), (2.5) $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$[F_-(\alpha) + i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}[(\beta\alpha^4 + 1 - d)\,\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha]]K(\alpha) = \\ = D_+(\alpha) + i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}[\mathrm{ch}\,(\alpha H) - \mathrm{sh}\,(\alpha H)/\alpha], \qquad (2.6)$$
$$K(\alpha) = K_1(\alpha)/K_2(\alpha).$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha),$$

где функции $K_\pm(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_\pm(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$. Поэтому будем рассматривать области аналитичности S_+ и S_-, где S_+ — полуплоскость $\operatorname{Im}\alpha > -c$ с разрезами, исключающими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$; S_- — полуплоскость $\operatorname{Im}\alpha < |\gamma_1|$ с разрезами, исключающими точки α_0 и γ.

Введем функцию

$$g(\alpha) = K(\alpha)\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)/(\alpha^2 - \gamma^2).$$

Функция $g(\alpha)$ на действительной оси не имеет нулей, ограниченна и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [6]:

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha), \qquad g_\pm(\alpha) = \exp\Big[\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\ln g(x)}{x - \alpha}\,dx\Big], \qquad \sigma < |\gamma_1|.$$

Определим функции $K_\pm(\alpha)$ по формуле

$$K_\pm(\alpha) = \frac{(\alpha \pm \gamma)g_\pm(\alpha)}{\sqrt{\beta}\,(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}.$$

При этом $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$.

Разделим уравнение (2.6) на $K_+(\alpha)$, после преобразований получим

$$F_-(\alpha)K_-(\alpha) - \frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_2(\alpha)K_+(\alpha)} = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)}. \qquad (2.7)$$

Используя представление

$$\frac{\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_2(\alpha)K_+(\alpha)} = L_+(\alpha) + L_-(\alpha),$$

где

$$L_\pm(\alpha) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{i\zeta x_*}(\beta\zeta^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\zeta H)K_2(\zeta)K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)}\,d\zeta = \\ = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\sigma}^{\infty\mp i\sigma}\frac{\mathrm{e}^{i\zeta x_*}(\beta\zeta^4 - d)K_-(\zeta)}{\mathrm{ch}\,(\zeta H)K_1(\zeta)(\zeta - \alpha)}\,d\zeta, \qquad \sigma < \min\{|\gamma_1|, c\}, \qquad (2.8)$$

уравнение (2.7) запишем в виде

$$K_-(\alpha)F_-(\alpha) - iL_-(\alpha) = D_+(\alpha)/K_+(\alpha) + iL_+(\alpha).$$

В левой части этого равенства имеем функцию, аналитическую в области S_-, а в правой — аналитическую в S_+. Аналитическим продолжением можно определить функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \to \infty$.

Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность, порядок которой не выше $O(r^{-\lambda})$ ($\lambda < 1$, r — расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_-(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_+(\alpha)$ — не выше $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ [7]. Функции $K_\pm(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^{-2})$, так как $g^\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$. Легко показать, что $|L_\pm(\alpha)| = O(|\alpha|^{-1})$ при $|\alpha| \to \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$D_+(\alpha)/K_+(\alpha) + iL_+(\alpha) = i(a + b\alpha), \tag{2.9}$$

где a и b — неизвестные константы, которые будем определять из условий (1.6).

Выражая $D_+(\alpha)$ из соотношения (2.9), с учетом (2.3) и (2.4) находим

$$\Phi(\alpha, y) = iZ(\alpha, y)\{K_+(\alpha)[a + b\alpha - L_+(\alpha)] + \mathrm{e}^{i\alpha x_*}[\operatorname{ch}(\alpha H) - \operatorname{sh}(\alpha H)/\alpha]\}/K_1(\alpha) - \\ - i\,\mathrm{e}^{i\alpha x_*}\operatorname{sh}(\alpha(y + H))/\alpha.$$

С помощью обратного преобразования Фурье потенциал ϕ выражается в виде

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,K_+(\alpha)[a + b\alpha - L_+(\alpha)]Z(\alpha, y)}{K_1(\alpha)}\,d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}[\operatorname{ch}(\alpha H) - \operatorname{sh}(\alpha H)/\alpha]Z(\alpha, y)}{K_1(\alpha)}\,d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}\operatorname{sh}(\alpha(y + H))}{\alpha}\,d\alpha. \tag{2.10}$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_-. Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ — сверху.

Для производной потенциала на действительной оси получаем выражение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,K_+(\alpha)[a + b\alpha - L_+(\alpha)]\alpha\operatorname{th}(\alpha H)}{K_1(\alpha)}\,d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_1(\alpha)}\,d\alpha. \tag{2.11}$$

В первом интеграле умножим числитель и знаменатель на $K_-(\alpha)$, после преобразований получаем выражение для производной потенциала в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}[a + b\alpha + L_-(\alpha)]\alpha\operatorname{th}(\alpha H)}{K_-(\alpha)K_2(\alpha)}\,d\alpha - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha(x - x_*)}}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_2(\alpha)}\,d\alpha. \tag{2.12}$$

Интеграл будем вычислять с помощью теории вычетов. На пластине при $x > 0$ имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\,\alpha_j \,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)[a - b\alpha_j + L_-(-\alpha_j)]}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)}. \qquad (2.13)$$

Из дисперсионного соотношения под пластиной имеем

$$\alpha_j \,\mathrm{th}\,(\alpha_j H) = -K_1(\alpha_j)/(\beta\alpha_j^4 - d).$$

Подставляя это выражение в формулу (2.13) и затем в краевые условия (1.6), получим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка для определения неизвестных a, b

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.14)$$

Согласно теореме о вычетах коэффициенты системы можно записать в виде

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{res}_{z_k} \Big(\frac{\alpha^2 K_+(\alpha)}{\beta\alpha^4 - d}\Big), \qquad A_{12} = A_{21},$$

$$A_{21} = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{res}_{z_k} \Big(\frac{\alpha^3 K_+(\alpha)}{\beta\alpha^4 - d}\Big), \qquad A_{22} = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{res}_{z_k} \Big(\frac{\alpha^4 K_+(\alpha)}{\beta\alpha^4 - d}\Big),$$

$$C_1 = -\sum_{k=1}^{4} \mathrm{res}_{z_k} \Big(\frac{\alpha^2 K_+(\alpha)L_-(\alpha)}{\beta\alpha^4 - d}\Big), \qquad C_2 = -\sum_{k=1}^{4} \mathrm{res}_{z_k} \Big(\frac{\alpha^3 K_+(\alpha)L_-(\alpha)}{\beta\alpha^4 - d}\Big),$$

где z_k — корни полинома $\beta\alpha^4 - \delta = 0$. Из (2.8) находим

$$L_+(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x_*}(\beta\alpha_j^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)(\alpha_j - \alpha)} + \frac{\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_2(\alpha)K_+(\alpha)}, & x_* > 0,\ \alpha \neq \alpha_j, \\ \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}(\beta\gamma_k^4 - d)K_+(\gamma_k)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)(\gamma_k + \alpha)}, & x_* < 0, \end{cases}$$

$$L_-(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle -\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x_*}(\beta\alpha_j^4 - d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)(\alpha_j - \alpha)}, & x_* > 0, \\ \displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}(\beta\gamma_k^4 - d)K_+(\gamma_k)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)(\gamma_k + \alpha)} + \frac{\mathrm{e}^{i\alpha x_*}(\beta\alpha^4 - d)K_-(\alpha)}{\mathrm{ch}\,(\alpha H)K_1(\alpha)}, & x_* < 0,\ \alpha \neq -\gamma_k. \end{cases}$$

Коэффициенты системы преобразуются:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{4} \frac{K_+(z_k)}{z_k}, \qquad A_{12} = A_{21} = \sum_{k=1}^{4} K_+(z_k), \qquad A_{22} = \sum_{k=1}^{4} z_k K_+(z_k),$$

$$C_1 = -\sum_{k=1}^{4} \frac{K_+(z_k)L_-(z_k)}{z_k}, \qquad C_2 = -\sum_{k=1}^{4} K_+(z_k)L_-(z_k).$$

Определив из системы (2.14) коэффициенты a, b, подставим их в формулы (2.10)–(2.12) и найдем все необходимые величины.

Прогиб пластины определяется из (1.1) соотношением $w(x) = i\varphi_y(x,0)$ и выражением (2.13). Второй член в (2.13) представляет собой волны, идущие от точки возмущения, и совпадает с выражением для прогиба бесконечной пластины, а первый член в (2.13) — волны, отраженные от края. Возвышение свободной границы $\eta(x)$ имеет вид

$$\eta(x) = -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\,K_+(\gamma_k)[a+b\gamma_k-L_+(\gamma_k)]}{K_1'(\gamma_k)} - i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\gamma_k|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)}.$$

При $x_* > 0$ получаем следующие формулы для прогиба пластины и возвышения свободной границы:

$$w(x) = -i\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\,\alpha_j\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j)K_2'(\alpha_j)}\Big[a-b\alpha_j-\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_*}(\beta\alpha_m^4-d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H)K_2'(\alpha_m)K_+(\alpha_m)(\alpha_m+\alpha_j)}\Big] - {}$$
$$- i\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)}, \qquad (2.15)$$

$$\eta(x) = -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\,K_+(\gamma_k)}{K_1'(\gamma_k)}\Big[a+b\gamma_k-\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_*}(\beta\alpha_m^4-d)}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H)K_2'(\alpha_m)K_+(\alpha_m)(\alpha_m-\gamma_k)}\Big].$$

При $x_* < 0$ аналогичные формулы имеют вид

$$w(x) = -i\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\,\alpha_j\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j)K_2'(\alpha_j)}\Big[a-b\alpha_j+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}(\beta\gamma_k^4-d)K_+(\gamma_k)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)(\gamma_k-\alpha_j)}\Big],$$

$$\eta(x) = -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\,K_+(\gamma_k)}{K_1'(\gamma_k)}\Big[a+b\gamma_k+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_m x_*}(\beta\gamma_m^4-d)K_+(\gamma_m)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_m H)K_1'(\gamma_m)(\gamma_m+\gamma_k)}\Big] - {}$$
$$- i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\gamma_k|x-x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)}. \qquad (2.16)$$

Вторая сумма в выражениях (2.15), (2.16) представляет собой возмущение от источника, а первая сумма — возмущение, отраженное от кромки.

3. Решение без учета инерционного члена. Согласно сделанным предположениям $d \ll 1$. Поэтому в уравнении (1.5) параметром d можно пренебречь. При $d = 0$ решение задачи можно получить в явном виде, а именно

$$A_{11} = K_+'(0), \qquad A_{12} = A_{21} = K_+(0), \qquad A_{22} = 0,$$
$$C_1 = -(K_+(0)L_-(0))', \qquad C_2 = -K_+(0)L_-(0).$$

Тогда имеем

$$a = -L_-(0) = \begin{cases} \beta\displaystyle\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x_*}\,\alpha_j^3}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)}, & x_* > 0, \\ -\beta\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}\,K_+(\gamma_k)\gamma_k^3}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)}, & x_* < 0, \end{cases}$$

$$b = -L_-'(0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x_*}\,\alpha_j^2}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H)K_2'(\alpha_j)K_+(\alpha_j)}, & x_* > 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}\,K_+(\gamma_k)\gamma_k^2}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H)K_1'(\gamma_k)}, & x_* < 0. \end{cases}$$

При $x_* > 0$ получаем

$$w(x) = i\beta \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\, \alpha_j^3 \,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j) K_2'(\alpha_j)} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_*}\, \alpha_m^2}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m) K_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_j)} - $$

$$- i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j |x - x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H) K_2'(\alpha_j)},$$

$$\eta(x) = i\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\, \gamma_k^2 K_+(\gamma_k)}{K_1'(\gamma_k)} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_*}\, \alpha_m^2}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m) K_+(\alpha_m)(\alpha_m - \gamma_k)}.$$

При $x_* < 0$ эти формулы имеют вид

$$w(x) = -i\beta \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\, \alpha_j^3 \,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j) K_2'(\alpha_j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}\, \gamma_k^2 K_+(\gamma_k)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H) K_1'(\gamma_k)(\gamma_k - \alpha_j)},$$

$$\eta(x) = -i\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\, \gamma_k^2 K_+(\gamma_k)}{K_1'(\gamma_k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_m x_*}\, K_+(\gamma_m)\gamma_m^2}{\mathrm{ch}\,(\gamma_m H) K_1'(\gamma_m)(\gamma_m + \gamma_k)} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\gamma_k |x - x_*|}}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H) K_1'(\gamma_k)}.$$

Рассмотрим теперь общий случай колебаний дна. В этом случае, умножая полученное решение на $u(x_*)$ и интегрируя по x_*, находим все интересующие нас величины. Решение представляется суммой двух слагаемых, соответствующих участкам дна под пластиной и вне пластины $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$, $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$, где $w_1(x)$ и $\eta_1(x)$ — комплексные амплитуды колебаний пластины и свободной поверхности при колебаниях дна по закону

$$w(x, -H_0, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, & x > 0, \end{cases}$$

а $w_2(x)$ и $\eta_2(x)$ — при колебаниях дна по закону

$$w(x, -H_0, t) = \begin{cases} u(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, & x < 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$w_1(x) = i\beta \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\, \alpha_j^3 \,\mathrm{th}(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j) K_2'(\alpha_j)} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{A_m \alpha_m^2}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m) K_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_j)} - $$

$$-i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\tilde{A}_j(x)}{\mathrm{ch}\,(\alpha_j H) K_2'(\alpha_j)},$$

$$\eta_1(x) = i\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\, K_+(\gamma_k)\gamma_k^2}{K_1'(\gamma_k)} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{A_m \alpha_m^2}{\mathrm{ch}\,(\alpha_m H) K_2'(\alpha_m) K_+(\alpha_m)(\alpha_m - \gamma_k)},$$

$$w_2(x) = -i\beta \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\, \alpha_j^3 \,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_+(\alpha_j) K_2'(\alpha_j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k \gamma_k^2 K_+(\gamma_k)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H) K_1'(\gamma_k)(\gamma_k - \alpha_j)},$$

$$\eta_2(x) = -i\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\gamma_k x}\, \gamma_k^2 K_+(\gamma_k)}{K_1'(\gamma_k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m K_+(\gamma_m)\gamma_m^2}{\mathrm{ch}\,(\gamma_m H) K_1'(\gamma_m)(\gamma_m + \gamma_k)} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k(x)}{\mathrm{ch}\,(\gamma_k H) K_1'(\gamma_k)},$$

где

$$\tilde{A}_j(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{i\alpha_j|x-x_*|}\, u(x_*)\, dx_*, \qquad A_j = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{i\alpha_j x_*}\, u(x_*)\, dx_*,$$

$$\tilde{B}_k(x) = \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-i\gamma_k|x-x_*|}\, u(x_*)\, dx_*, \qquad B_k = \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-i\gamma_k x_*}\, u(x_*) dx_*.$$

4. Численные результаты. Проведены численные расчеты для полубесконечной ледяной пластины в океане при следующих значениях параметров: $E = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 1025$ кг/м^3, $\rho_0 = 922{,}5$ кг/м^3. Смещения дна задавались в виде [9]

$$u(x) = \cos^2\left(\pi(x - x_0)/(2s)\right),$$

где s — полуширина; x_0 — центр колеблющегося участка дна. Толщина пластины, глубина жидкости, а также частота, центр и полуширина области подвижного дна менялись.

Наибольший интерес представляет случай, когда участок колебаний дна расположен под пластиной. На рис. 1 показаны зависимости от частоты амплитуд уходящих волн в жидкости, в пластине, а также амплитуд колебаний пластины в кромке и в точке x_0 (эпицентре) при следующих значениях параметров: $x_0 = 1500$ м, $s = 250$ м, $h = 5$ м, $H_0 = 200$ м. Из графиков видно, что максимальные амплитуды колебаний наблюдаются при $\omega = 0{,}25 \div 0{,}3$ с$^{-1}$. С ростом частоты все амплитуды уменьшаются, однако амплитуда в эпицентре остается достаточно большой.

На рис. 2 показано распределение амплитуд колебаний пластины при различных значениях частоты и тех же значениях остальных параметров (штриховая кривая соответствует бесконечной пластине). При малых частотах безразмерный параметр β мал, и пластина ведет себя как свободная поверхность жидкости, амплитуды колебаний пластины практически постоянны. С ростом частоты амплитуда колебаний в точке x_0 становится значительно большей, чем в остальных точках. При больших частотах колеблется только окрестность колеблющегося участка дна, амплитуды колебаний остальной части пластины малы. Влияние края невелико и проявляется только вблизи кромки пластины.

На рис. 3 представлено распределение амплитуд колебаний пластины при $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$, $s = 250$ м, $h = 5$ м, $H_0 = 200$ м и различных положениях колеблющегося участка дна.

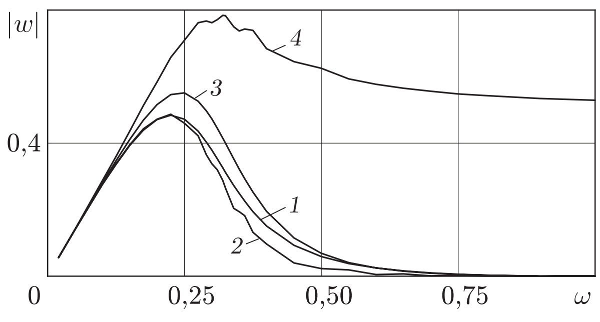

Рис. 1

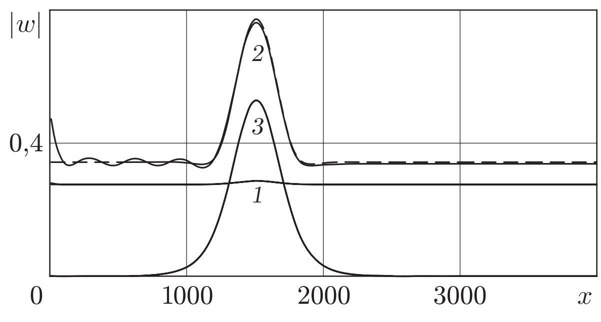

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость от частоты амплитуд уходящих волн в жидкости (кривая *1*) и пластине (кривая *2*), а также амплитуд колебаний пластины в кромке (кривая *3*) и эпицентре (кривая *4*)

Рис. 2. Амплитуды колебаний пластины при различных значениях частоты: кривые *1*–*3* соответствуют значениям 0,1 с$^{-1}$; 0,3 с$^{-1}$; 1 с$^{-1}$

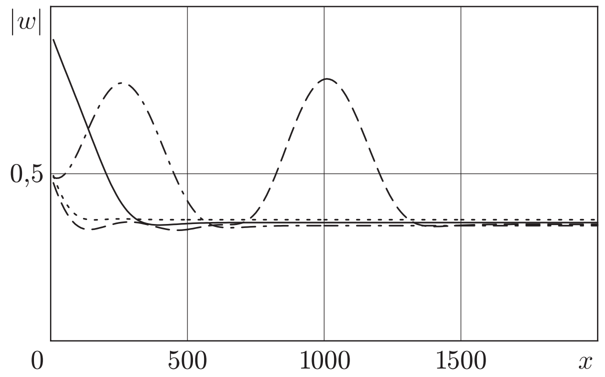

Рис. 3

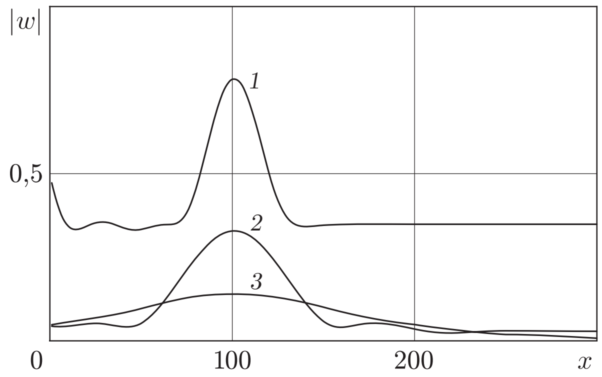

Рис. 4

Рис. 3. Влияние положения колеблющегося участка дна на амплитуды колебаний: сплошная кривая соответствует $x_0 = 0$, штриховая — $x_0 = 1000$ м, штрихпунктирная — $x_0 = 250$ м, пунктирная — $x_0 = -1000$ м

Рис. 4. Влияние глубины жидкости на амплитуды колебаний пластины: кривые *1–3* соответствуют глубинам 200, 500 и 1000 м

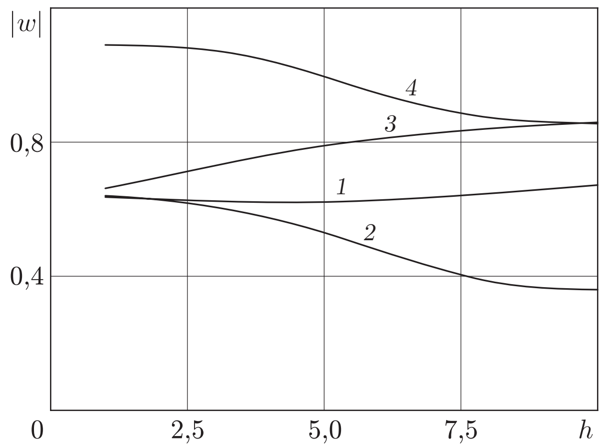

Рис. 5

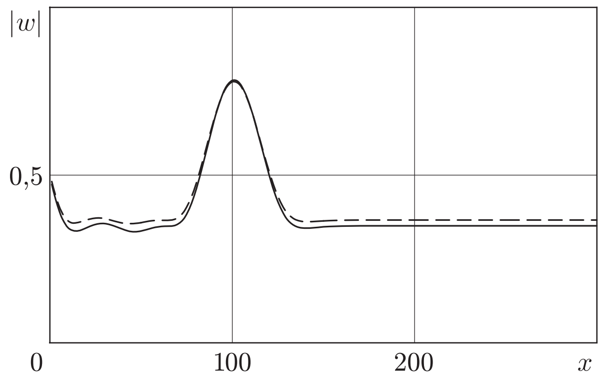

Рис. 6

Рис. 5. Влияние толщины пластины на амплитуды колебаний жидкости и пластины: кривые *1, 2* соответствуют амплитудам уходящей волны в жидкости и пластине, кривая *3* — амплитуде прогиба пластины в кромке, кривая *4* — в точке x_0

Рис. 6. Сравнение точного (сплошная кривая) и приближенного (штриховая кривая) решений

Как видно из графиков, максимальные амплитуды колебаний достигаются над центром колеблющегося участка дна, когда он расположен под кромкой пластины.

С увеличением глубины амплитуды колебаний пластины уменьшаются, что видно из рис. 4, где представлены графики распределения амплитуд колебаний пластины при $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$, $x_0 = 1000$ м, $s = 250$ м, $h = 5$ м и различных глубинах. С увеличением глубины кривые становятся более пологими.

На рис. 5 приведены графики зависимости амплитуд колебаний жидкости и пластины от толщины пластины при $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$, $x_0 = 750$ м, $s = 250$ м, $h = 5$ м, $H_0 = 100$ м. При малой толщине пластины амплитуда в точке x_0 значительно больше, чем в кромке, а амплитуды уходящих волн в жидкости и пластине равны. С ростом толщины амплитуда в эпицентре сравнивается с амплитудой в кромке, а амплитуда уходящей волны в жидкости становится значительно большей, чем в пластине.

Сравнение точного решения и решения без учета инерции пластины представлено на рис. 6 для $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$, $x_0 = 1000$ м, $s = 250$ м, $h = 5$ м и $H_0 = 200$ м. Обе кривые на рисунке близки друг другу. Это объясняется тем, что инерция пластины мала по сравнению с инерцией жидкости. Полученные результаты показывают, что явное решение без учета инерции пластины может успешно использоваться для оценки прогиба пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. **Squire V. A., Dugan J. P., Wadhams P., et al.** Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
3. **Марченко А.** Изгибно-гравитационные волны // Динамика волн на поверхности жидкости: Тр. Ин-та общей физики РАН. М.: Наука, 1999. Т. 56. С. 65–111.
4. **Kashivagi M.** Research on hyroelastic responses of VLFS: recent progress and future work // J. Offshore and Polar Engng. 2000. V. 10, N 2. P. 81–90.
5. **Takamura H., Masuda K., Maeda H., Bessho M.** A study on the estimation of the seaquake response of a floating structure considering the characteristics of seismic wave propagation in the ground and the water // J. Marine Sci. and Technol. 2003. V. 7. P. 164–174.
6. **Нобл Б.** Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
8. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, N C7. P. 11.629–11.639.
9. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.

Поступила в редакцию 18/VI 2004 г.