

следней  $N$ -й зоной. Осреднение  $c_j$  произведено подобно (3.11) по всей  $j$ -й зоне. Система (4.4) дополняется естественными начальными условиями

$$(4.5) \quad \langle c_j \rangle |_{\tau=0} = c_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

и легко решается стандартными методами. Физическая интерпретация задачи (4.4), (4.5) состоит в следующем. Первоначально заданное распределение концентрации примеси по траншее быстро выравнивается (в соответствующем масштабе, см. п. 3) в пределах циркуляционных зон за счет эффективной диффузии. Это и приводит к условиям (4.5). Далее эволюция системы определяется относительно слабым переносом вещества через границы зон, поскольку там коэффициент эффективной диффузии резко снижается и приближается к коэффициенту молекулярной диффузии. Этот обмен веществом между зонами и описывает система (4.4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1953.— V. 219, N 1137.
2. Aris R. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1956.— V. 235, N 1200.
3. Марон В. И. Перемешивание взаимно-растворимых жидкостей в турбулентном потоке в трубе // ПМТФ.— 1971.— № 5.
4. Дильман В. В., Кронберг А. Е. О продольной дисперсии при ламинарном движении жидкости в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1977.
6. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1, N 2.
7. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. Рус. пер. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
8. Шифрин Э. Г. К теореме Бэтчелора о циркуляционной области // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 1.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
12. Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— М.: Наука, 1981.
13. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание // ДАН СССР.— 1963.— Т. 150, № 6.
14. Чернышенко С. И. О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.
16. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики.— Л.: Наука, 1976.
17. Лебедев И. П., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям // ПММ.— 1966.— Т. 30, № 2.

Поступила 24/III 1986 г.

УДК 532.526.2 : 532.135

### ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ (качественное исследование)

Г. В. Жижин  
(Ленинград)

1. В химических производствах широко используются течения различного рода пульп, суспензий, полимерных смесей и растворов, обладающих свойствами неньютоновских жидкостей, индекс течения  $n$  которых может принимать значения от нуля до нескольких единиц. Для расчета таких течений часто применяют уравнение автомодельного ламинарного пограничного слоя, решения которого чрезвычайно разнообразны и существенно зависят от величины индекса течения и граничных условий. В связи с этим представляет интерес классификация решений уравнения автомодельного ламинарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей при изменении индекса течения  $n$  в принципе от нуля до бесконечности на основе качественного исследования дифференциальных уравнений. Впервые качественное изучение уравнения плоского

ламинарного пограничного слоя проведено в [1] для ньютоновских жидкостей [ $n = 1$ ]. Показано, в частности, что при движении поверхности пластины и внешнего потока в противоположные стороны уравнение автомодельного пограничного слоя в зависимости от величины скорости поверхности пластины либо не имеет решений, либо имеет два решения с различными коэффициентами трения. В [2, 3] этот результат получен независимо от [1]. В [4, 5] уравнение ламинарного пограничного слоя рассмотрено для течения неньютоновских жидкостей при изменении индекса течения в диапазонах  $2 > n > 1$ ,  $1 \geq n > 0,5$ . В [6] исследование [4] дополнено сообщением о пространственной локализации пограничного слоя при  $2 > n > 1$ .

В данной работе автомодельные режимы течения в ламинарном пограничном слое неньютоновских жидкостей изучаются в общем случае без ограничения каким-то конкретным диапазоном положительных значений индекса  $n$ . Координаты особых точек, собственные числа, определяющие их тип, характеристики особых решений находятся как функции параметра  $n$ . Это позволяет как классифицировать решения для еще не рассмотренных значений  $n$  ( $n \leq 1/2$ ,  $n \geq 2$ ), так и в определенной степени уточнить известные результаты. Используются теория групп непрерывных преобразований, понятие о сшитой на бесконечности двулистной фазовой плоскости [4], преобразования Пуанкаре. С целью детального анализа перехода траекторий с одного листа фазовой плоскости на другой предложена и применена сфера, состоящая из специально состыкованных полусфер Пуанкаре [7], однозначно соответствующих каждому из листов.

2. Рассматривается уравнение автомодельного ламинарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей [8]

$$(2.1) \quad F = |f'|^{n-1} f''' + f'' f = 0,$$

где функция  $f(\eta)$  связана с функцией тока  $\psi(x, y)$  выражением

$$\psi(x, y) = U_0 x \left( n \frac{n+1}{\text{Re}_x} \right)^{\frac{1}{n+1}} f(\eta),$$

автомодельная переменная

$$\eta = A y x^{-\frac{1}{n+1}}, \quad A = \left[ \frac{\rho U_0^{2-n}}{k(n+1)} \right]^{\frac{1}{n+1}},$$

продольные и поперечные скорости, а также касательное напряжение задаются уравнениями

$$u(x, y) = U_0 f'(\eta), \quad v(x, y) = \frac{U_0}{n+1} \left( \frac{n+1}{\text{Re}_x} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\eta f(\eta) - f(\eta)],$$

$$\text{Re}_x = \rho x^n k^{-1} U_0^{2-n}, \quad \tau = k |\partial u / \partial y|^{n-1} \partial u / \partial y.$$

Уравнение (2.1) допускает однопараметрическую группу преобразований [4]

$$(2.2) \quad \eta^0 = a\eta, \quad f^0 = a^{\frac{1-2n}{2-n}} f,$$

при которых трижды продолженный инфинитезимальный оператор [9]

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial}{\partial f} + \Phi \frac{\partial}{\partial f'} + \sigma \frac{\partial}{\partial f''} + R \frac{\partial}{\partial f'''}.$$

удовлетворяет уравнению

$$X F = 0.$$

Учитывая (2.2), находим

$$(2.3) \quad f^{0'} = a^{\frac{1+n}{n-2}} f', \quad f^{0''} = a^{\frac{3}{n-2}} f''.$$

Из (2.2), (2.3) имеем

$$(2.4) \quad \left( \frac{f^0}{f} \right)^{\frac{2-n}{1-2n}} = a, \quad \left( \frac{f^{0'}}{f'} \right)^{\frac{n-2}{1+n}} = a, \quad \left( \frac{f^{0''}}{f''} \right)^{\frac{n-2}{3}} = a.$$

Из первого и второго, а также первого и третьего равенств (2.4) найдем выражения инвариантов при  $n \neq 0,5$

$$(2.5) \quad q = f' |f|^{-\frac{1+n}{1-2n}}, \quad p = f'' |f|^{-\frac{3}{1-2n}},$$

с помощью которых (2.1) сводится к двум уравнениям первого порядка

$$(2.6) \quad \frac{dp}{d\eta} = -|f|^{\frac{2-n}{2n-1}} p \left( |p|^{1-n} + \frac{3q}{2n-1} \right) \text{sign } f;$$

$$(2.7) \quad \frac{dq}{d\eta} = |f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \left( p - \frac{n+1}{2n-1} q^2 \text{sign } f \right)$$

и двум квадратурам

$$(2.8) \quad f = \exp \int \frac{\text{sign } f (2n-1) q dq}{(2n-1) p - (n+1) q^2 \text{sign } f};$$

$$(2.9) \quad \eta = \int q |f|^{\frac{n+1}{1-2n}} df.$$

При  $n = 1/2$  инварианты  $p$  и  $q$  не могут быть использованы. В этом случае из второго и третьего равенств (2.4) получим инвариант

$$(2.10) \quad w = f' |f|^{-2},$$

с помощью которого (2.1) может быть сведено к двум уравнениям первого порядка

$$(2.11) \quad \frac{dw}{d\eta} = -|f''|^{1/2} (fw + 2w^{3/2} \text{sign } f');$$

$$(2.12) \quad \frac{df}{d\eta} = |f''|^{1/2} \text{sign } f' |w|^{-1/2}.$$

Вторая переменная в системе (2.11), (2.12)  $f$ , так как, согласно (2.3),  $f^0 = f$  при  $n = 1/2$ .

3. Решения уравнения (2.1) при  $n \neq 1/2$  с помощью (2.6), (2.7) могут быть представлены траекториями в двулистной фазовой плоскости  $(p, q)$ , на одном листе которой  $f > 0$ , на другом  $f < 0$  [4]. Рассмотрим особые точки системы (2.6), (2.7), расположенные в конечной части фазовой плоскости. Приравнивая правые части (2.6), (2.7) нулю, находим, что на каждом листе фазовой плоскости при любом  $n \neq 1/2$  имеются две особые точки с конечными значениями координат. На плоскости  $f > 0$  особая точка  $\alpha$  с координатами

$$(3.1) \quad p_0 = \delta \left( |2n-1| \frac{n+1}{9} \right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad q_0 = \frac{1-2n}{3} |p_0|^{1-n}, \quad \delta = \begin{cases} +1, & n > 1/2, \\ -1, & n < 1/2 \end{cases}$$

и особая точка  $\beta(0, 0)$ , на плоскости  $f < 0$  точки  $\alpha'(-p_0, q_0)$  и  $\beta'(0, 0)$ .

Линеаризуя уравнения (2.6), (2.7) в окрестности точек  $\alpha, \alpha'$ , получим

$$(3.2) \quad \frac{dp}{dq} = \frac{\text{sign } f (n-1) |p_0|^{1-n} (p - (\pm p_0)) - \text{sign } f \frac{3(\pm p_0)}{2n-1} (q - q_0)}{p - (\pm p_0) + 2 \frac{n+1}{3} \text{sign } f |p_0|^{1-n} (q - q_0)}.$$

Из дискриминанта уравнения (3.2) находим собственные числа

$$(3.3) \quad \lambda_{1,2} = \text{sign } f |p_0|^{1-n} \frac{n5-1}{6} \pm |p_0|^{1-n} \left[ \frac{(5n-1)^2}{36} - \frac{n+1}{3} (2n-1) \right]^{1/2}.$$

Из (3.3) следует, что особые точки  $\alpha, \alpha'$  имеют тип седла при  $n < 1/2$ , фокуса при  $0,6 < n < 21,4$ , узла при  $0,6 > n > 0,5$ . Фокусы и узлы устойчивы на плоскости  $f < 0$  и неустойчивы на плоскости  $f > 0$ . Точки  $\alpha$  и  $\alpha'$  при  $n \neq 2$  описывают решения

$$f_{\alpha, \alpha'} = \pm \left\{ \pm \frac{2-n}{3} \left( |2n-1| \frac{1+n}{9} \right)^{\frac{1-n}{2n-1}} \eta \pm \frac{2-n}{1-2n} A \right\}^{\frac{1-2n}{2-n}}$$

и при  $n = 2$

$$j_{\alpha, \alpha'} = e^{\pm(-\eta+A)}.$$

Знак плюс в этих решениях соответствует точке  $\alpha$ , минус —  $\alpha'$ .

Особые точки  $\beta, \beta'$  сложные и, как следует из построения по нулевым изоклинам, имеют тип седло — узел. Особые точки  $\alpha, \alpha'$  при любых  $n \neq 1/2$  и особые точки  $\beta, \beta'$  при  $n > 1/2$  есть положения равновесия системы, в них производные  $p' = q' = 0$ . При  $n < 1/2$  траектории на плоскости  $f > 0$  подходят к точке  $\beta$  с производной  $f' < 0$  ( $q < 0$ ) и выходят из точки  $\beta'$  на плоскости  $f < 0$  также с производной  $f' < 0$ . Учитывая, что в точках  $\beta, \beta'$   $q = 0$ , получаем, что в этих точках  $f = 0$  и производные  $p', q'$  имеют неопределенность  $0/0$ . Значит, точки  $\beta, \beta'$  при  $n < 1/2$  не могут быть положениями равновесия. Точка, изображающая состояние системы, не приближается к точке  $\beta$  асимптотически, а проходит через  $\beta, \beta'$ , переходя с одного листа фазовой плоскости ( $f > 0$ ) на другой ( $f < 0$ ).

Рассмотрим вопрос о том, какое из решений системы (2.6), (2.7) особое. Разделим уравнение (2.6) на (2.7) ( $n \neq 1/2$ )

$$(3.4) \quad \frac{dp}{dq} = \frac{p |p|^{1-n} + \frac{3}{2n-1} qp}{-p \operatorname{sign} f + \frac{n+1}{2n-1} q^2} = R_0(p, q).$$

Особыми решениями могут быть те кривые в плоскости  $(p, q)$ , которые являются решениями уравнения (3.4) и в точках которых производная  $\partial R_0 / \partial p = \infty$  [10]. Дифференцируя  $R_0$ , получим

$$(3.5) \quad \frac{\partial R_0}{\partial p} = \frac{\left[ \frac{3q}{2n-1} + (2-n) |p|^{1-n} \right] \left[ q^2 + \frac{n+1}{2n-1} - p \operatorname{sign} f \right] + p \left[ \frac{3q}{2n-1} + |p|^{1-n} \right] \operatorname{sign} f}{\left( q^2 + \frac{n+1}{2n-1} - p \operatorname{sign} f \right)^2}.$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что особое решение есть прямая  $p = 0$  и только при  $2 > n > 1$ .

В случае  $n = 1/2$  решения уравнения (2.1) могут быть представлены траекториями системы (2.11), (2.12) в двулистной фазовой плоскости  $(w, f)$ , каждый лист которой отвечает положительным и отрицательным значениям производной  $f'$ . Из (2.11), (2.12) вытекает, что в конечной части фазовой плоскости  $(w, f)$  как при  $f' > 0$ , так и при  $f' < 0$  особых точек нет. Отсутствуют также и особые решения.

4. Рассмотрим бесконечно удаленные особые точки системы уравнений (2.6), (2.7). Для этого сделаем первое преобразование Пуанкаре [7]

$$(4.1) \quad q = 1/z, p = u_0/z.$$

В переменных  $u, z$  уравнения (2.6), (2.7) принимают вид

$$(4.2) \quad \frac{du_0}{dz} = |f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \frac{u_0}{z} \left( -u_0 z + \frac{n-2}{2n-1} \operatorname{sign} f - \operatorname{sign} f |u_0|^{1-n} \operatorname{sign} z |z|^n \right);$$

$$(4.3) \quad \frac{dz}{dz} = -|f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \left( u_0 z - \frac{n+1}{2n-1} \operatorname{sign} f \right).$$

Точка  $z = 0, u_0 = 0$  системы (4.2), (4.3) особая. Она соответствует двум точкам  $B, B'$  сферы Пуанкаре — точкам пересечения экватора  $z = 0$  и оси  $Q$ , проведенной из центра сферы параллельно оси  $q$  (см. [7]). В ее окрестности

$$\frac{du_0}{dz} = \frac{n-2}{n+1} \frac{u_0}{z},$$

т. е. собственные числа  $\lambda_1 = n - 2$ ,  $\lambda_2 = n + 1$ . Эта особая точка имеет тип узла при  $n > 2$  и седла при  $n < 2$ , причем экватор есть решение системы (4.2), (4.3). При  $n = 2$  система (4.2), (4.3) не имеет особых точек на экваторе и сам экватор не является решением этой системы.

Для исследования точек пересечения экватора с осью  $P$ , проведенной из центра сферы параллельно оси  $p$  (точки  $D, D'$ ), применим второе преобразование Пуанкаре

$$(4.4) \quad q = v_0/z, \quad p = 1/z.$$

В переменных  $v_0, z$  уравнения (2.6), (2.7) запишем как

$$(4.5) \quad \frac{dv_0}{d\eta} = |f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \frac{1}{z} \left( z + \frac{2-n}{2n-1} v_0^2 \operatorname{sign} f + \operatorname{sign} z \operatorname{sign} f v_0 |z|^n \right);$$

$$(4.6) \quad \frac{dz}{d\eta} = |f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \left( \operatorname{sign} z |z|^n + \frac{3}{2n-1} v_0 \right) \operatorname{sign} f.$$

Точка  $v_0 = 0, z = 0$  при  $n > 1$  особая для системы (4.5), (4.6). В ее окрестности, пренебрегая при  $n > 1$  в числителе правой части (4.5) членами порядка малости больше 2 и в правой части (4.6) членами порядка малости больше 1, получим

$$(4.7) \quad \frac{dv_0}{dz} = \frac{z + \frac{2-n}{2n-1} v_0^2 \operatorname{sign} f}{\frac{3}{2n-1} z v_0 \operatorname{sign} f}.$$

Уравнение (4.7) после замены  $v = z v_0^{-2}$  имеет интеграл

$$(4.8) \quad |v_0^2 - 2 \operatorname{sign} f z| = c |z|^{\frac{2(2-n)}{3}}$$

( $c$  — постоянная интегрирования ( $c > 0$ )).

Можно показать, что у уравнения (4.8) есть по два решения в каждой из областей  $f > 0$  и  $f < 0$ . Рассмотрим случай  $f > 0$ . Тогда

$$|v_0^2 - 2 \operatorname{sign} f z| = |v_0^2 - 2z| = \begin{cases} |v_0^2 - 2|z||, & z > 0, \\ |v_0^2 + 2|z||, & z < 0. \end{cases}$$

У первого из выражений в фигурной скобке также два значения:

$$|v_0^2 - 2|z|| = \begin{cases} v_0^2 - 2|z|, & v_0^2 > 2z, \\ 2|z| - v_0^2, & v_0^2 < 2z. \end{cases}$$

Таким образом, при  $z < 0$

$$(4.9) \quad v_0 = \pm \left( c |z|^{\frac{2(2-n)}{3}} - 2|z| \right)^{1/2}.$$

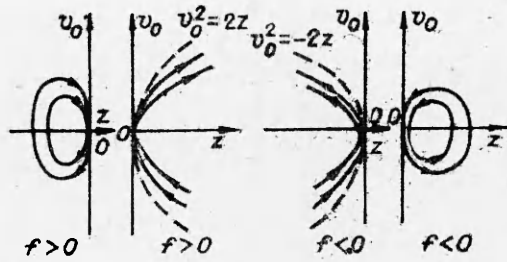
При  $z > 0$  возможны два решения:

$$(4.10) \quad v_0 = \pm \left( c |z|^{\frac{2(2-n)}{3}} + 2|z| \right)^{1/2} \quad \text{при } v_0^2 > 2z;$$

$$(4.11) \quad v_0 = \pm \left( 2|z| - c |z|^{\frac{2(2-n)}{3}} \right)^{1/2} \quad \text{при } v_0^2 < 2z.$$

Однако решение (4.11) не реализуется в вещественной области, так как при  $n > 1$  подкоренное выражение в (4.11) отрицательно. Следовательно, в области  $f > 0$  существуют два решения: (4.9) при  $z < 0$  и (4.10) при  $z > 0$ , причем при  $z > 0$   $v_0^2 > 2z$ . Аналогичным образом можно показать, что в области  $f < 0$  есть два решения: (4.10) при  $z < 0$  и (4.9) при  $z > 0$ , причем при  $z < 0$   $|z| < v_0^2/2$  \*. Графики функций (4.9), (4.10) в

\* Отметим, что в [6] авторы, по-видимому, не обратили внимания на то, что левая часть (4.8) имеет абсолютную величину, поэтому из двух решений (4.9) и (4.10) привели лишь (4.10).



Р и с. 1

областях  $f > 0$  и  $f < 0$  при  $z > 0$  и  $< 0$  изображены на рис. 1. Такой же вид имеет расположение траекторий в окрестности точки  $v_0 = 0, z = 0$  при  $1/2 < n \leq 1$ . Это можно определить с помощью построения нулевых изоклин.

Рассмотрим бесконечно удаленные точки плоскости  $(w, f)$ .

Им в этой плоскости соответствует равенство  $f = \pm\infty$ , т. е. переход траекторий с одного листа фазовой плоскости на другой отсутствует (как следует из п. 3, в конечной части фазовой плоскости  $(w, f)$  особых точек нет).

Введем первое преобразование Пуанкаре  $w = u_1/z_1, f = 1/z_1$ . Тогда система (2.11), (2.12) приведет к виду

$$(4.12) \quad \frac{du_1}{d\eta} = -|f''|^{1/2} \frac{i}{z_1} (\text{sign } f' z_1^2 |z_1|^{1/2} \text{sign } u_1 |u_1|^{1/2} + \\ + u_1 + u_1 |u_1|^{3/2} \text{sign } z_1 |z_1|^{1/2} \text{sign } f');$$

$$(4.13) \quad \frac{dz_1}{d\eta} = -z_1^2 |f''|^{1/2} \text{sign } f' |z_1 u_1^{-1}|^{1/2}.$$

Из (4.12), (4.13) следует, что точка  $z_1 = 0, u_1 = 0$  особая. Разделив (4.12) на (4.13) и пренебрегая в числителе правой части отношения членами порядка малости больше  $3/2$  в окрестности точки  $z_1 = 0, u_1 = 0$ , находим уравнение

$$(4.14) \quad \frac{du_1}{dz_1} = \frac{u_1 |u_1|^{1/2}}{z_1^2 |z_1|^{1/2}} \text{sign } f';$$

у которого есть интеграл

$$(4.15) \quad u_1 = \left( \frac{1}{5} \text{sign } f' |z_1|^{5/2} + K \right)^{-2}$$

( $K$  — постоянная интегрирования). По (4.14), (4.15) можно определить, что особая точка  $z_1 = 0, u_1 = 0$  имеет расположение траекторий в ее окрестности типа узла.

Введем второе преобразование Пуанкаре  $w = 1/z_1, f = v_1/z_1$ . Тогда (2.11), (2.12) преобразуются к виду

$$(4.16) \quad \frac{dv_1}{d\eta} = |f''|^{1/2} \frac{1}{z_1} (\text{sign } f' z_1^2 |z_1|^{1/2} + v_1^2 + 2v_1 |z_1|^{1/2} \text{sign } f');$$

$$(4.17) \quad \frac{dz_1}{d\eta} = |f''|^{1/2} (v_1 + |z_1|^{1/2} \text{sign } f').$$

У (4.16), (4.17) есть особая точка  $z_1 = 0, v_1 = 0$ . Оставляя в правых частях (4.16), (4.17) члены наименьшего порядка малости в окрестности точки  $z_1 = 0, v_1 = 0$ , получим

$$(4.18) \quad \frac{dv_1}{dz_1} = 2 \frac{v_1}{z_1}.$$

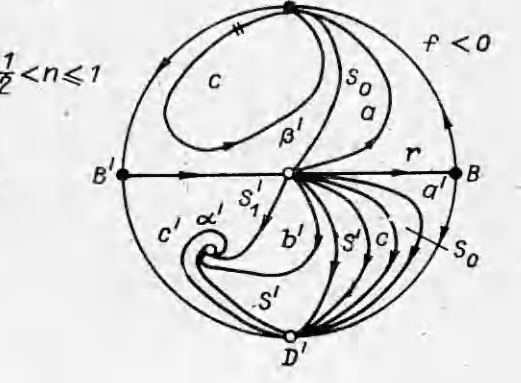
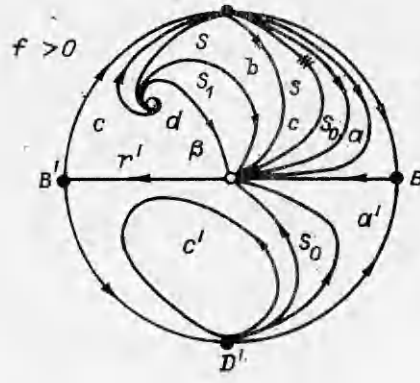
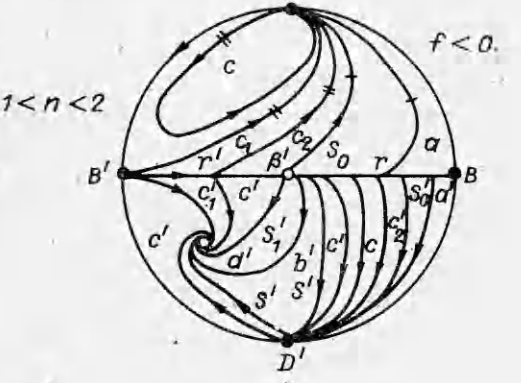
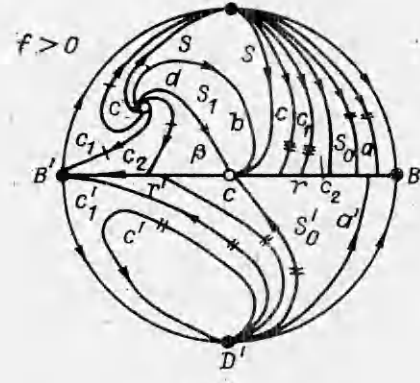
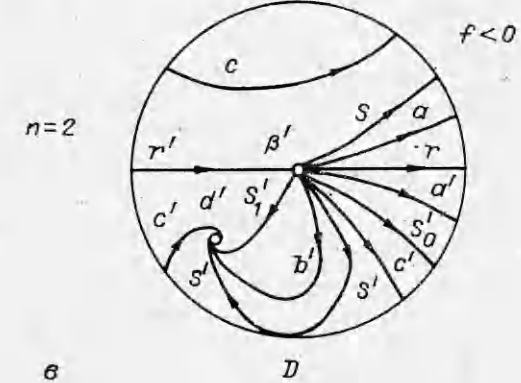
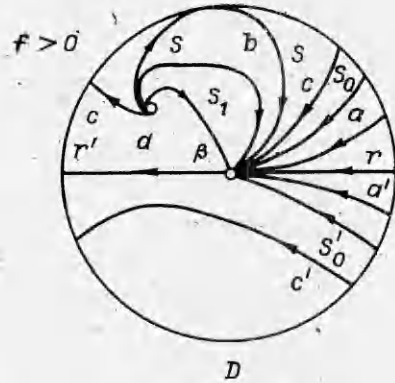
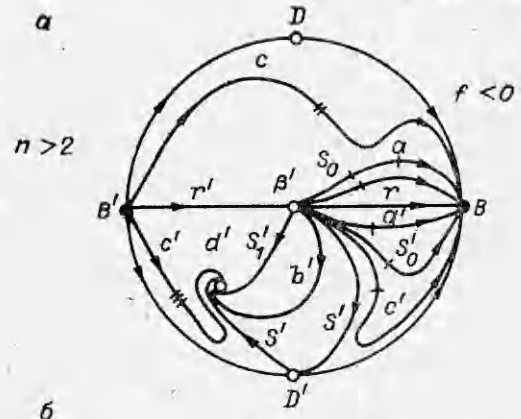
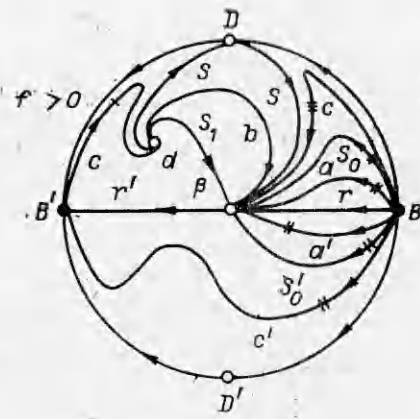
Собственные числа в особой точке, как видно из (4.18), равны  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ , т. е. особая точка  $z_1 = 0, v_1 = 0$  типа узла.

5. Рассмотрение инвариантов уравнения (2.1) и его особых точек, проведенное в п. 2—4, показало, что необходимо выделить шесть интервалов индекса течения  $n$ , для которых фазовые диаграммы качественно отличаются друг от друга:  $n > 2, n = 2, 2 > n > 1, 1 \geq n > 1/2, n = 1/2, n < 1/2$ . Построение множества траекторий на фазовых плоскостях производилось на основе исследования поведения траекторий в ок-

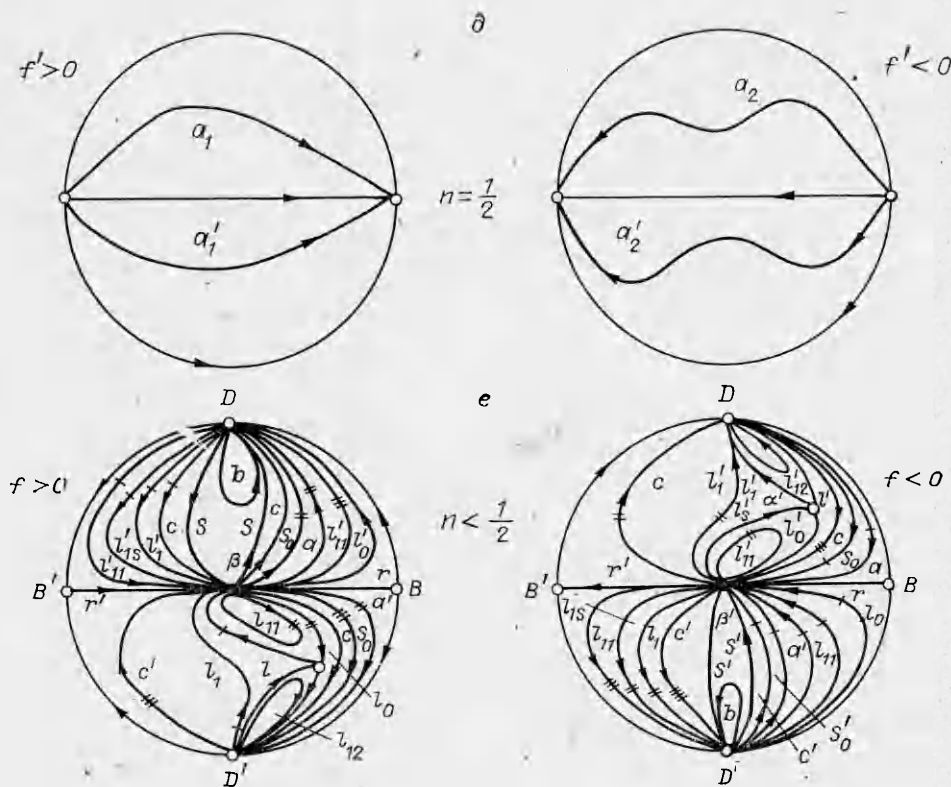
рестности особых точек и анализа пересечения траекториями нулевых изоклин. Вопрос перехода траекторий с одного листа фазовой плоскости на другой через особые точки решался исходя из условия непрерывности функции  $f$  и ее производных при переходе, соответствия решений течениям в пограничном слое. Уравнение (2.1) инвариантно относительно зеркального отражения  $(f, \eta) \rightarrow (-f, -\eta)$ . Поэтому в полученном множестве траекторий при любом  $n$  каждой траектории можно сопоставить траекторию, связанную с ней зеркальным отражением, что позволяет множество траекторий при каждом  $n$  разделить на два множества, траектории которых связаны этим преобразованием.

Отображения обоих листов фазовых плоскостей (для указанных интервалов  $n$ ) на круг, полученные с предварительным отображением плоскостей на нижнюю полусферу Пуанкаре, изображены на рис. 2, где начало осей координат  $p, q$  и  $w, f$  помещено в центр кругов ( $a - g, e$  и  $d$  соответственно) с ориентацией осей  $p, w$  вверх и  $q, f$  вправо; зачернены особые точки, через которые траектории переходят с круга  $f > 0$  ( $f < 0$ ) на круг  $f < 0$  ( $f > 0$ ), а светлые — особые точки — положения равновесия. Траектории, принадлежащие множеству (второму), полученному после преобразования  $(f, \eta) \rightarrow (-f, -\eta)$ , обозначены штрихами у букв, соответствующих определенному типу траекторий. Для большей наглядности перехода траекторий через проходные точки, части траекторий пересечены штрихами, причем последовательное увеличение числа штрихов отвечает последовательности прохождения по траекториям вдоль координаты  $\eta$ . Для всех значений  $n$ , кроме  $n = 2$ , внешняя окружность круга есть траектория системы. При  $n = 2$  каждая точка внешней окружности круга есть проходная (но не особая) точка. Используя систему траекторий, выражения инвариантов (2.5), (2.10) и исходное уравнение (2.1), можно для каждого  $n$  качественно построить систему интегральных кривых  $f(\eta)$ .

На рис. 3 представлены интегральные кривые различных типов траекторий, принадлежащих первому множеству, так как от них с помощью зеркального отражения легко перейти к интегральным кривым второго множества. Существенно, что, несмотря на различный путь, проходимый некоторыми траекториями при разных значениях  $n$ , соответствующие интегральные кривые оказываются качественно близкими друг другу. Это и позволяет обозначить их одним символом. Так, при всех  $n$ , кроме  $n = 1/2$ , существует множество интегральных кривых (и траекторий)  $b, S, c, S_0, a, r$ , которое будем называть основным (рис. 2, 3). Именно оно, как показано в [1] при исследовании пограничного слоя ньютоновской жидкости, ответственно за существование двух решений с различными коэффициентами трения при тчении жидкости вдоль пластины с отрицательной скоростью поверхности пластины. А так как это множество имеется при течениях неньютоновских жидкостей при любых  $n \neq 1/2$ , то, следовательно, и для течений неньютоновских жидкостей ( $n \neq 1/2$ ) вдоль пластины сдвигающейся поверхностью в направлении, противоположном движению внешнего потока, существует два автомодельных решения с различными коэффициентами трения. Критическая скорость поверхности пластины, при которой стационарные автомодельные решения исчезают, слабо зависит от индекса течения, увеличивая абсолютное значение с его ростом [5]. При  $n > 1/2$ , кроме основного множества решений, существуют решения  $\alpha, \beta, S_1$  (рис. 2,  $a - g, 3, б$ ), а при  $1 < n < 2$  еще  $c_1, c_2$ , образованные сшивкой решений  $c, r, r'$  (рис. 2,  $в, 3, в$ ), и их зеркальные отражения. При  $n < 1/2$ , кроме основного множества решений, есть решения  $l_0, l_1, l_{11}, l_{12}, l_{13}, \alpha$  и их зеркальные отражения (рис. 2,  $г, 3, г$ ). Следует отметить, что решения  $\alpha, \alpha'$ , обозначенные одной буквой как положения равновесия, различны в зависимости от значения  $n$ . В частности,  $f_\alpha(\eta)$  при  $1/2 < n < 2$  имеют вертикальную асимптоту, а при  $n \geq 2$  монотонно возрастают с уменьшением  $\eta$  (линии 1—4 на рис. 3, б для  $n > 2, n = 2, 1/2 < n < 2, n < 1/2$ ). Это приводит к тому, что у решений  $b, S, c, S_1$ , стремящихся к  $\alpha$  при уменьшении







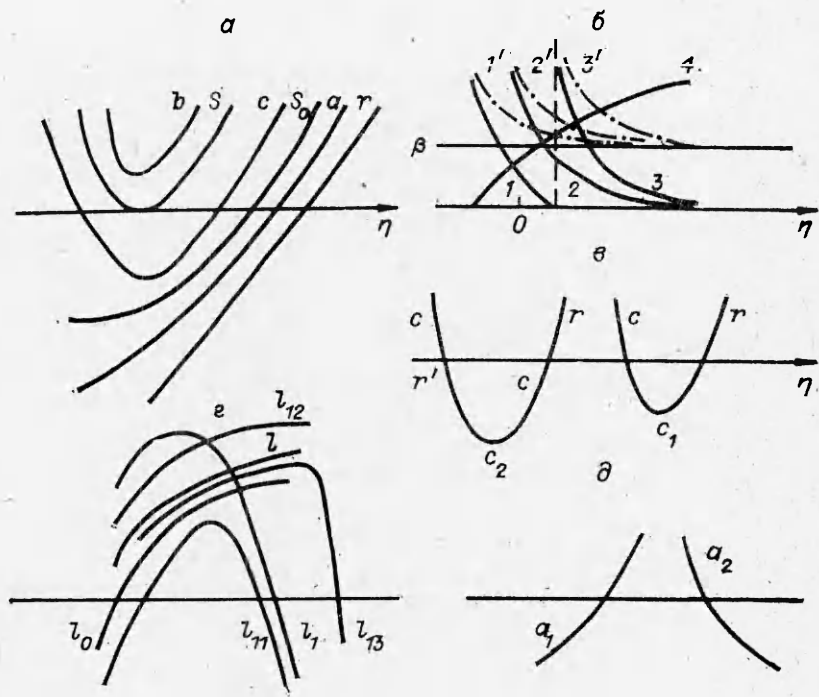
Р и с. 2

$\eta$ , разное асимптотическое поведение своих левых ветвей при  $1/2 < n < 2$  и  $n \geq 2$ . В качестве примера на рис. 3, б линиями  $I'-3'$  показаны решения  $S_1$  для  $n > 2$ ,  $n = 2$ ,  $1/2 < n < 2$ . Наиболее простая совокупность траекторий образуется в вырожденном случае при  $n = 1/2$ , когда инварианты  $p, q$  становятся неприменимыми (рис. 2, д). Соответствующие интегральные кривые представлены на рис. 3, д.

Интегральные кривые рис. 3 в зависимости от их вида и расположения на них начала отсчета координаты  $\eta$  (в верхней или нижней полуплоскости, на возрастающей или ниспадающей ветви и т. д.) описывают различные течения в пограничном слое: на неподвижной пластине ( $S$ ) с вдувом ( $c_1, c, c_2$ ) и отсосом ( $b, l_1, l_{11}, l_{1s}$ ), на пластине при движении ее поверхности и внешнего потока в одном направлении ( $c, S_0, a, c_1, c_2, l_{11}, l_1, l_{1s}, a_1, a_2$ ) с отсосом ( $b, S, c, S_0, a, c_1, c_2, a_1, a_2, l_{11}, l_1, l_{1s}, l_0$ ) и вдувом ( $l_{11}, l_1, l_{1s}, a_2, a_1, c, c_1, c_2, l_0, S_0, a$ ), на пластине при движении ее поверхности и внешнего потока в противоположные стороны ( $c, c_1, c_2, l_{11}$ ) с отсосом ( $c, c_{10}, c_2, S, b, l_{11}, l_1, l_{1s}$ ) и вдувом ( $c, c_1, c_2, l_{11}$ ), на пластине сдвигающейся поверхностью и отсосом в покоящейся среде ( $\alpha$  при  $1/2 < n \leq 2, S_1, l_{12}$ ), на пластине при движении ее поверхности и внешнего потока с одинаковой скоростью при вдуве и отсосе ( $r$ ), в слое смешения спутных потоков с нулевой ( $S_0, a_1, a_2$ ) и конечной спутностью ( $a, a_1, a_2$ ), в слое смешения противоположно направленных потоков ( $c_2$  при устремлении верхней точки сшивки решений  $r'$  и  $c$  в бесконечность).

Решения  $c_1$  и  $c_2$ , возможные при  $1 < n < 2$ , описывают явление локализации пограничного слоя, обнаруженное для течения дилатантной жидкости в этом диапазоне  $n$  в [6].

В [11] утверждалось, что и при  $n > 2$  происходит локализация пограничного слоя. Однако, как следует из п. 3, решения  $r, r'$  в этом случае не являются особыми. Поэтому решения  $c$  не могут сшиваться с ре-



Р и с. 3

шениями  $r, r'$  при конечных значениях переменной  $\eta$ , т. е. локализация пограничного слоя при  $n > 2$  не должна происходить\*.

Существенно, что для данного типа уравнений (отличающегося присутствием в уравнениях абсолютной величины, изменяющей знак функции) при построении фазовых диаграмм необходимо рассматривать две сферы Пуанкаре, отвечающие двум листам фазовой плоскости. Причем переход с одного листа на другой соответствует переходу траекторий с одной сферы Пуанкаре на другую через проходные особые точки. Представляет интерес ввести многообразие, которое было бы единым как для положительной, так и отрицательной функции  $f$ . Обратимся к течениям, индекс  $n$  которых больше  $1/2$ . В этом случае проходные особые точки расположены на экваторе сферы Пуанкаре. Если состыковать по экватору две полусферы Пуанкаре (пусть для определенности верхняя полусфера соответствует  $f < 0$ , нижняя  $f > 0$ ), то траектории при изменении знака  $f$  переходят с одной полусферы на другую, находясь на едином многообразии.

Анализ показывает, что для соблюдения необходимых условий перехода, указанных в начале п. 5, достаточно верхнюю полусферу до стыковки с нижней подвергнуть зеркальному отображению на себя относительно плоскости, проходящей через точки  $B, B'$  и перпендикулярной экватору. В таком многообразии исчезает свойственная сфере Пуанкаре двужначность соответствия точек сферы и отображаемой плоскости и совокупность решений полностью совпадает с решениями, представленными на рис. 2. Построенные многообразия для индексов течения  $1/2 < n \leq 1$  и  $n > 2$  приведены на рис. 4 и 5.

При  $n < 1/2$  переход с одного листа фазовой плоскости на другой происходит через начало координат. Для осуществления условий гладкого перехода траекторий на сфере через эту точку необходимо вставить

\* Ошибочность утверждения работы [11] о локализации пограничного слоя при  $n > 2$  связана с тем, что рассматривалось поведение решений при устремлении  $f''$  к нулю не уравнения (2.1), а уравнения, полученного после его преобразования, некорректного для  $n > 2$  при  $f'' \rightarrow 0$ .

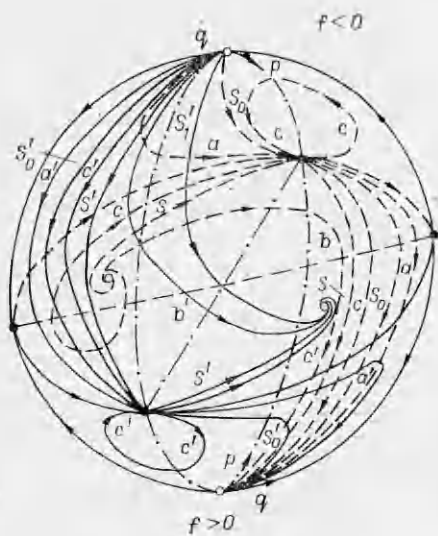


Рис. 4

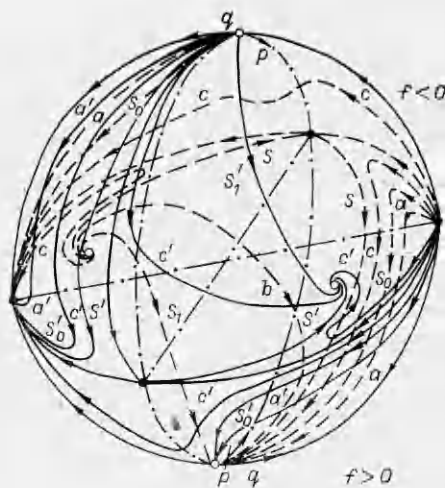


Рис. 5

нижнюю полусферу Пуанкаре, отвечающую значениям  $f > 0$ , в нижнюю полусферу Пуанкаре, отвечающую значениям  $f < 0$ , предварительно повернутую на  $180^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Casal P. Sur l'ensemble des solutions de l'equation de la couche limite // J. Mecanique.— 1972.— V. 11, N 3. Рус. пер. О совокупности решений уравнения пограничного слоя // Сб. пер. Механика.— 1974.— № 4.
2. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности // Избранные проблемы прикладной механики.— М.: Наука, 1974.
3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности // Аэромеханика.— М.: Наука, 1976.
4. Жижин Г. В., Уфимцев А. А. О течениях в плоском ламинарном пограничном слое дилатантных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 5.
5. Жижин Г. В., Уфимцев А. А. Течения в плоском ламинарном пограничном слое псевдопластических жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 1.
6. Павлов К. Б., Федотов Н. А., Шахорин А. П. О структуре ламинарного пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 4.
7. Андронов А. А., Леонтович Е. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.
8. Шульман Э. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей.— Минск: Наука и техника, 1966.
9. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.
11. Acrivos V., Shah M. J., Petersen E. E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces // AI Ch E J.— 1960.— V. 6, № 2.

Поступила 18/IV 1986 г.

УДК 532.517.4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОГО ТЕРМИКА

Б. И. Заславский, Б. В. Юрьев

(Москва)

Известно, что внезапно освобожденный шарообразный объем газа ненулевой плавучести, всплывая, трансформируется в вихревое кольцо [1—10]. Процесс трансформации теоретически и экспериментально изучался в [2—8], а численными методами — в [9, 10]. В данной работе рассматривается движение осесимметричного термика полусферической и цилиндрической формы, примыкающего в начальный момент времени к горизонтальной поверхности.