УДК 532.5.01

ВИХРЕВАЯ ПАРА СООСНЫХ ВИНТОВЫХ НИТЕЙ

В. Л. Окулов

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
Датский технический университет, 2800 Люнгбю, Дания
E-mail: vaok@dtu.dk

Проведено теоретическое исследование возможности существования вихревых пар соосно вращающихся винтовых нитей с циркуляцией в противоположных направлениях. Такие пары генерируются, например, вращающейся лопастью ротора при одинаковой интенсивности концевого и смещенного приосевого вихрей. Найдены условия, обеспечивающие равномерное вращение вихревой пары винтовых нитей, что необходимо для моделирования вихревых следов за лопастями роторов.

Ключевые слова: вихревая динамика, винтовой вихрь, вихревая пара, равновесное вращение.

DOI: 10.15372/PMTF20200304

Введение. В работе [1] С. В. Алексеенко, С. И. Шторк опубликовали важный экспериментальный результат, подтверждающий существование равновесного состояния для двух винтовых вихрей одинаковой интенсивности. В гидромеханике задача о равновесных состояниях вихрей является классической, однако в течение длительного времени рассматривался только ее плоский случай [2], при этом задача сводилась к определению равновесных конфигураций — вихревых многоугольников, в вершинах которых располагались точечные вихри с одинаковой по значению и по знаку интенсивностью циркуляции [3, 4]. Данная задача инициирована экспериментом, в котором наблюдались равновесные конфигурации для плавающих одинаковых магнитов. Эти конфигурации аналогичны равновесным многоугольникам точечных вихрей, изучение которых было необходимо для построения вихревой модели атома [5]. Подобно классическому эксперименту о равновесии магнитов, заложившему основы теории равновесных состояний точечных вихрей, экспериментальное исследование С. В. Алексеенко и С. И. Шторка [1] инициировало серию теоретических и численных работ по определению устойчивых равновесных конфигураций винтовых вихрей [6–9]. Теоретически исследована устойчивость равномерно движущегося вдоль своей оси вихревого мультиплета винтовых вихрей с одинаковой интенсивностью циркуляции, расположенных равномерно на цилиндрической поверхности и образующих в сечении правильный вихревой многоугольник [6]. Затем теоретически была подтверждена возможность существования равновесной конфигурации для двух несимметрично расположенных относительно общей центральной оси винтовых вихрей с одинаковой интенсивностью циркуляции и с различными радиусами (асимметричный вихревой винтовой

Работа выполнена в рамках Государственной программы поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (соглашение № 075-15-2019-1923).

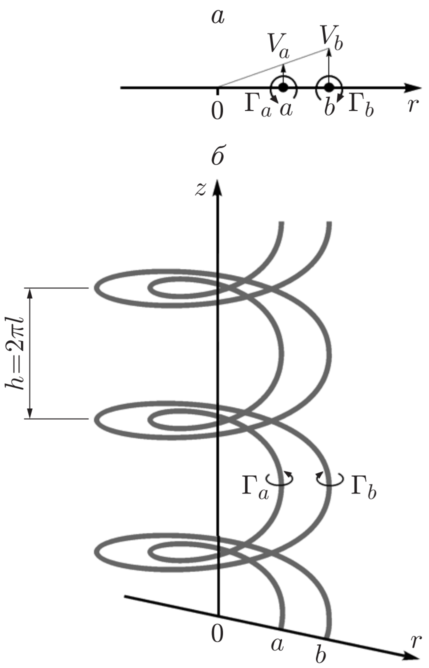

Рис. 1. Возможные конфигурации вихревой пары:
а — два точечных вихря, *б* — два винтовых вихря

дуплет) [9]. Существование такого асимметричного дуплета наряду с симметричным дуплетом, описанным в [1], экспериментально не подтверждено.

Следует отметить, что классическая постановка задач о точечных вихрях не ограничивается случаем одинаковой интенсивности циркуляции, представляет интерес случай вихрей с равной, но противоположной по знаку интенсивностью циркуляции. В классическом плоском случае два таких вихря называются вихревой парой, этот термин был введен и описан Г. Гельмгольцем раньше, чем задача о вихревых многоугольниках. В работе [10] изучены возможные движения набора прямолинейных вихревых нитей или двумерных точечных вихрей. В частности, из [10] следует только одно уникальное решение для точечных вихрей, когда вихревая пара с одинаковой по значению, но противоположной по знаку циркуляцией может двигаться только прямолинейно, а вращаться точечные вихри могут только при различной интенсивности циркуляции вокруг центра их тяжести, который расположен вне вихрей на соединяющей их линии. Однако генерация прямолинейных или точечных вихрей в потоках является редким явлением, обычно в инженерных и энергетических приложениях наблюдаются искривленные и винтообразные вихри [11]. В частности, пары вихрей генерируются в ближнем следе за лопастями пропеллеров или турбин и обладают идеальной винтовой формой [12], причем винтовой формой обладают оба вихря: внешний (концевой) и внутренний (втулочный), сходящие с концевой и втулочной кромок лопасти и имеющие разную по знаку интенсивность циркуляции. В случае одиночного вращающегося крыла или лопасти для модели лопасти НЕЖ [13] возможна ситуация, когда сходящие внешний и внутренний вихри в вихревой паре имеют интенсивность циркуляции, одинаковую по значению, но разную по знаку [14].

В случае точечного аналога вихревой пары [10] равномерное вращение возможно только для вихрей различной интенсивности (рис. 1,*а*), а вихри с одинаковой по значению, но противоположной по знаку интенсивностью циркуляции могут перемещаться только прямолинейно, что противоречит данным экспериментальной работы [15], согласно которым с разных кромок крыла должны сходить вихри, имеющие интенсивность, близкую по значению, но разную по знаку. В отличие от прямолинейных вихрей каждый винтовой вихрь способен также вращаться как целое [16]. Это дополнительное самоиндуцированное движение способно изменить динамическое поведение пары винтовых вихрей, для которой становится возможным решение в случае равномерного вращения обоих вихрей вокруг общей оси (рис. 1,*б*). В отличие от описанного выше асимметричного дуплета, полученного пока только теоретически [9], вихревая пара, в которой винтовые нити с противоположной по знаку интенсивностью циркуляции вращаются совместно одна внутри другой, пока наблюдалась только визуально в эксперименте [15]. Этот случай еще не исследован теоретически, поэтому целью настоящей работы является проверка возможности равномерного вращения винтовой вихревой пары с равным шагом и одинаковой, но противоположной по знаку интенсивностью циркуляции. Исследуются особенности трехмерной динамики тонких винтовых вихревых нитей в идеальных жидкостях, при этом помимо их взаимодействия рассматривается самоиндуцированное движение вихревых трубок в бинормальном направлении от их оси, что следует из уравнений движения трехмерной вихревой нити, полученных в начале XX в., когда была создана концепция самоиндуцированного движения вихревых нитей [13, 17]. В отличие от различных приближенных моделей настоящая работа основана на решении Кавады — Хардина [18], в котором были выделены особенности для бесконечной тонкой спиральной вихревой нити и которое применено для определения самоиндуцированных скоростей [16], суммируемых со скоростью индукции другой вихревой нити.

Уравнения движения винтовой вихревой пары. Для определения условий равновесия винтовой вихревой пары (см. рис. 1,*б*) рассмотрим два тонких спиральных вихря, расположенных на двух опорных цилиндрах с фиксированными радиусами a и b и одним общим геометрическим шагом величиной h (или $l = h/(2\pi)$). Это соответствует двум безразмерным шагам $\tau_a = l/a$, $\tau_b = l/b$ для каждой нити. Исследуем произвольные абсолютные значения интенсивности циркуляции вихрей Γ_a и Γ_b. Это имеет значение при рассмотрении предельного случая вращающейся пары прямолинейных вихрей ($h = \infty$) при $\Gamma_a/\Gamma_b = -b/a$. Для конечных значений $h = 2\pi l$ возможное равновесное вращение при $\Gamma_a = -\Gamma_b$ определяется вариацией параметров задачи. Далее исследуются эти предельные случаи, так как невозможно спрогнозировать, что при сворачивании вихрей в винтовую форму с уменьшением общего шага до некоторого конечного значения $h = h^*$ может возникнуть равновесное вращение при одинаковых абсолютных значениях интенсивности циркуляции $\Gamma_a = -\Gamma_b$. Также предположим, что оба вихря имеют круговые сечения с одинаковыми малыми радиусами $\varepsilon \ll h$, $\varepsilon \ll b$. Оба винтовых вихря в паре представляют собой суперпозицию спиральных вихревых нитей, расположенных в некоторый момент времени параллельно их осям, а завихренность распределена равномерно в поперечном сечении ядра [16].

Для исследования равновесных состояний рассматриваемой вращающейся пары винтовых вихрей (см. рис. 1,*б*) определим угловую скорость каждого вихря. Заметим, что в отличие от прямолинейных нитей Гельмгольца (или точечных вихрей), перемещения которых определяются скоростью, индуцированной только другим вихрем пары в точке положения расчетного вихря, в случае винтовых вихрей для каждого из них общая угловая скорость вращения вокруг их общего центра состоит из двух компонент:

$$\Omega^{(a)} = \Omega^{(a)}_{Ind} + \Omega^{(a)}_{Sind}, \qquad \Omega^{(b)} = \Omega^{(b)}_{Ind} + \Omega^{(b)}_{Sind}, \tag{1}$$

где $\Omega^{(a)}_{Ind} = V^{(b)}_{Ind}(a)/a$, $\Omega^{(b)}_{Ind} = V^{(a)}_{Ind}(b)/b$ — угловые скорости в точках положения вихрей a или b, индуцированные другим вихрем из положения b или a соответственно (см. рис. 1); $\Omega^{(a)}_{Sind}$, $\Omega^{(b)}_{Sind}$ — скорость самоиндуцированного движения самого вихря [16], рассчитан-

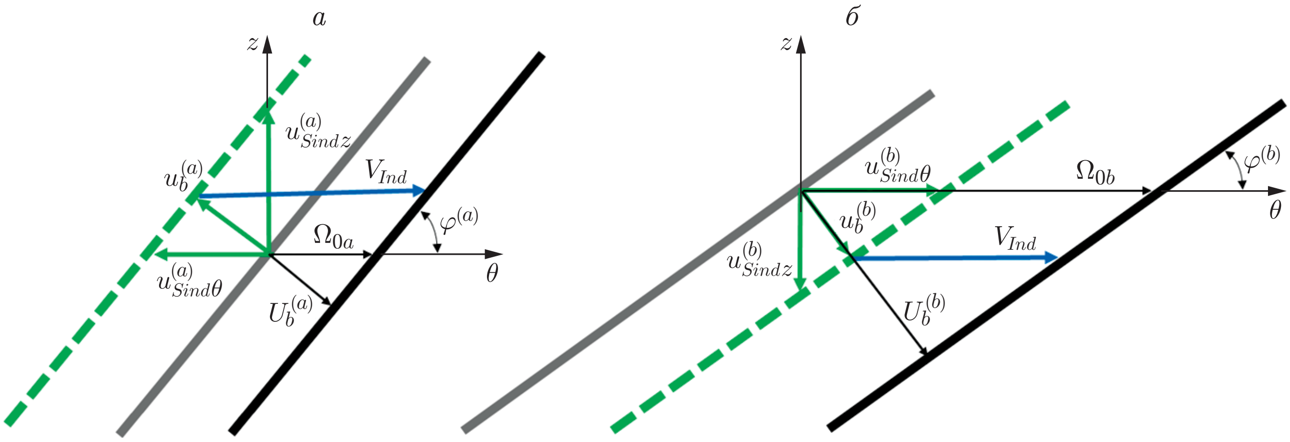

Рис. 2. Многоугольники скоростей для цилиндрических разверток внутреннего (a) и внешнего ($б$) винтовых вихрей

ная в точке a или b. Следует также конкретизировать понятие угловых скоростей для винтовых вихрей, перемещающихся вдоль направления бинормали. Ранее эта задача не рассматривалась, что привело к ошибочным отождествлениям движения винтовых вихрей с перемещением жидких частиц [19]. Чтобы избежать неправильных интерпретаций, построим для каждого вихря из пары многоугольники скоростей в плоской цилиндрической развертке обоих опорных цилиндров (рис. 2).

Фиксируя сечение $z = 0$ в неподвижной полярной системе координат и пренебрегая влиянием конечного размера ядра другого вихря на расчетный вихрь, находим скорости окружного перемещения вихрей в этом фиксированном сечении. Они не совпадают с проекциями бинормальной скорости на тангенциальное направление вследствие дополнительного смещения сечения винтового вихря при его поступательном перемещении. Следуя работам [13, 16], из треугольников скоростей на рис. 2 для самоиндуцированной составляющей получаем

$$\Omega^{(a)}_{Sind}a = -u_b(a)/\sin\varphi^{(a)}, \qquad \Omega^{(b)}_{Sind}b = -u_b(b)/\sin\varphi^{(b)}, \tag{2}$$

где $\sin\varphi^{(x)} = x/\sqrt{l^2+x^2}$.

Определение бинормальной компоненты $u_b(x)$ самоиндуцированного движения представляет собой сложную задачу, решению которой посвящено большое количество работ (см. [13, 20–23] и др.). Для винтового вихря с малым сечением и постоянным распределением завихренности в ядре решение в наиболее полном виде получено в [16]. Используем общую форму записи выражения для самоиндуцируемой скорости обеих вихревых нитей

$$u_b(x) = \frac{\Gamma_x}{4\pi x}\Big\{\frac{x^2}{l^2+x^2}\Big[\ln\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\ln\frac{xl}{l^2+x^2} + 2 + \frac{l^2}{x^2} - \frac{\sqrt{l^2+x^2}\,(x^2+3l^2)}{lx^2}\Big] +$$
$$+\frac{x^6l^2}{(l^2+x^2)^4}\Big[\Big(\frac{l^4}{x^4} - 3\,\frac{l^2}{x^2} + \frac{3}{8}\Big)\zeta^* - \frac{27}{8} + 2\,\frac{l^4}{x^4} + \frac{x^2}{l^2}\Big] + 4\,\frac{x\sqrt{l^2+x^2}}{l^2}\,I_1\Big(\frac{x}{l}\Big)K_1'\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big\} + o(1) \tag{3}$$

при положении вихря в точке $x = a$ или $x = b$ и интенсивности циркуляции Γ_a, Γ_b соответственно (I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя; штрих обозначает их производную; $\zeta^* = 1{,}202\,06$). В формуле (3) учтена поправка на конечный размер ядра винтового вихря с равномерным распределением завихренности в виде слагаемого $1/4$ в первых квадратных скобках [16].

Выражение для проекции окружной скорости $V_{Ind}^{(y)}(x)$, индуцированной в точке x вихрем, находящимся в точке y в сечении $z = 0$, с учетом коррекции на вертикальное перемещение запишем в виде

$$V_{Ind}^{(y)}(x) \equiv w_\chi(x; y) = u_\theta(x; y) - u_z(x; y)x/l, \tag{4}$$

где $u_z(x; y)$, $u_\theta(x; y)$ — осевая и азимутальная скорости в неподвижной полярной системе координат, индуцированные в точке x вихрем, находящимся в точке y при $\theta = 0$. Как и предполагалось, выражение для скорости (4) совпало с выражением для проекции скорости в винтовой системе координат при соответствующей переменной $\chi = \theta - z/l$ [6]. Пренебрегая влиянием конечного размера ядра на поле, индуцированное в точках соседнего вихря, выражение для этой "наведенной" на другой вихрь скорости запишем в виде [15]

$$w_\chi(x, y, \chi) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} -x/l^2 \\ 1/x \end{array} \right\} + \frac{\Gamma y}{\pi l^2} \Big(\frac{l}{x} + \frac{x}{l} \Big) \operatorname{Re} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{0,1}(x/l, y/l, \chi), \ldots \ x \leqslant y \\ H_1^{1,0}(y/l, x/l, \chi), \ldots \ y < x \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Ряды каптейновского типа в (5)

$$H_M^{I,J}(x, y, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} m^M I_m^{\langle I \rangle} \Big(\frac{mx}{l} \Big) K_m^{\langle J \rangle} \Big(\frac{my}{l} \Big) \, \mathrm{e}^{im\chi} \tag{6}$$

выражены через модифицированные функции Бесселя $I_m^{\langle 0 \rangle}(mx/l)$, $K_m^{\langle 0 \rangle}(my/l)$ и их производные $I_m^{\langle 1 \rangle}(mx/l)$, $K_m^{\langle 1 \rangle}(my/l)$ при $x \leqslant y$. Эти ряды можно свернуть в замкнутую конечную форму [16], что позволяет упростить расчет, особенно в предельных случаях, например при сближениях нитей.

Результаты исследования равномерного вращения винтовой вихревой пары. Для совместного равномерного вращения вихревой пары достаточно потребовать совпадения угловых скоростей обоих вихрей:

$$\Omega_0 \equiv \Omega^{(a)} = \Omega^{(b)}, \tag{7}$$

т. е. по формулам (2)–(5) необходимо найти полные окружные скорости перемещения вихрей в фиксированном сечении $z = 0$. Как следует из рис. 1,*a*, в случае вихрей с прямолинейной осью ($h = \infty$) это возможно только при различных значениях интенсивности циркуляции, когда выполняется условие $\Gamma_a/\Gamma_b = -b/a$. Выясним, каким образом изменяется движение винтовых вихрей с конечным значением $h = 2\pi l$ и возможно ли их равномерное вращение (7) при $\Gamma_a = -\Gamma_b$ при наличии дополнительной скорости самоиндуцированного движения, обусловленной искривлением вихревой нити. Можно предположить, что индуцируемые скорости меняются незначительно по сравнению со случаем точечных вихрей (см. рис. 1,*a*), так как они зависят в основном от расстояния между точками a и b и от модуля интенсивности их циркуляций Γ_a, Γ_b в большом диапазоне значений винтового шага h. Поэтому для упрощения на рис. 2 скорости приблизительно равны $V_{Ind} \approx V_{Ind}^{(b)}(a) \approx V_{Ind}^{(a)}(b)$, чтобы показать, что эта составляющая поля скоростей не может быстро уравновесить отношение b/a при выборе одинаковых по модулю значений интенсивности циркуляции. В то же время наличие самоиндуцированной составляющей, в случае если интенсивности циркуляции имеют разные знаки, приводит к вращению вихрей в противоположных направлениях, что может быть достаточным для равномерного вращения пары.

Для проверки данного предположения введем отношение интенсивностей циркуляции $\beta = \Gamma_b/\Gamma_a$. Варьируя отношение a/b, определяющее положение вихрей в паре, с учетом подстановки (1)–(6) для нескольких фиксированных значений винтового шага h найдем значения β, при которых выполняется равенство (7).

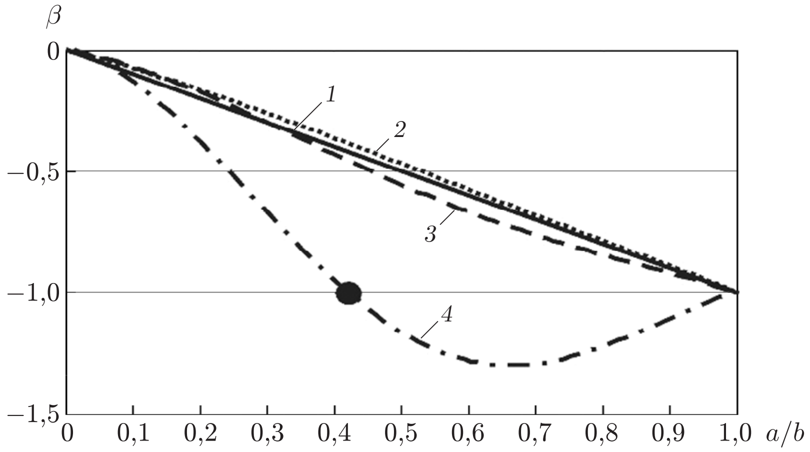

Рис. 3. Зависимость отношения циркуляции β от отношения a/b в случае равновесного вращения вихрей при $\varepsilon = 0{,}05$ и различных значениях винтового шага: *1* — $h = \infty$, *2* — $h = 5$, *3* — $h = 2$, *4* — $h = 1{,}5$; точка — решение с равными по модулю, но противоположными по знаку значениями интенсивности циркуляции

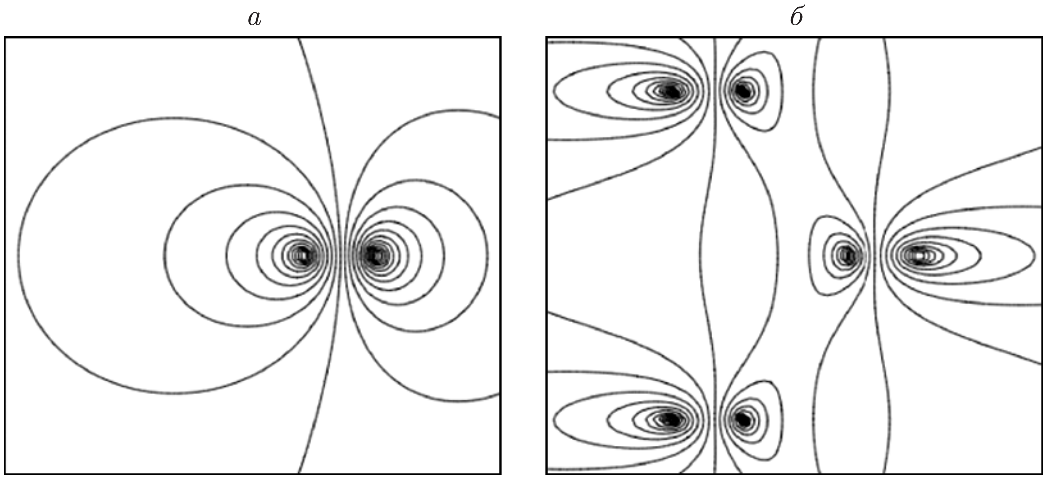

Рис. 4. Горизонтальное (a) и меридиональное ($б$) сечения трубок тока при движении винтовой вихревой пары, смещенной от центра вращения

На рис. 3 представлена зависимость отношения интенсивностей циркуляции β от отношения a/b. Линейная зависимость *1* соответствует случаю решения Гельмгольца для точечных вихрей при $\Gamma_b/\Gamma_a = -a/b$. Из этой зависимости следует, что не существует конечных расстояний между точками a и b, при которых интенсивности циркуляции равны по модулю. Тем не менее для винтового вихря такое решение с равными значениями интенсивности циркуляции, но с противоположными знаками существует (точка на рис. 3). На рис. 3 видно, что равновесное вращение возникает при значениях винтового шага $h < 2$ и фиксирует однозначное положение вихрей в паре ($a/b \approx 0{,}4$, $h = 1{,}5$). Этот результат позволяет объяснить существование равновесных конфигураций винтовых вихрей за вращающимися крыльями и лопастями, наблюдавшихся в немногочисленных расчетах и экспериментах [12, 15]. Это невозможно объяснить с помощью решения для совместно вращающейся пары точечных вихрей, так как в этом случае отсутствует самоиндуцированное движение, описываемое выражением (3). Примеры линий тока для винтовой вихревой пары, обозначенной точкой на рис. 3, приведены на рис. 4 в двух диаметральных сечениях.

На рис. 4,*б* в меридиональном сечении показаны сечения трубок тока при движении винтовой вихревой пары, смещенной от центра вращения на расстояние $a \approx 0{,}4$ при $b = 1$, на рис. 4,*а* показаны их горизонтальные сечения.

Заключение. Результаты проведенного теоретического исследования подтверждают существование равновесно вращающейся пары винтовых вихрей при одинаковой по значению и противоположной по знаку интенсивности циркуляции для определенных значений винтового шага. Существование таких равновесных пар винтовых вихрей имеет большое значение для дальнейшего развития вихревой динамики, а также при решении прикладных задач и проектировании формы лопастей турбомашин с предсказуемым развитием роторных вихревых следов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alekseenko S. V., Shtork S. I.** Experimental observation of vortex filament interaction // JETP Lett. 1994. V. 59. P. 775–780.
2. **Aref H., Kadtke J. B., Zawadzki I., et al.** Point vortex dynamics: recent results and open problems // Fluid Dynamic Res. 1988. V. 3. P. 63–74.
3. **Thomson J. J.** A treatise on the motion of vortex rings. L.: Macmillan, 1883.
4. **Havelock T. H.** The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Philos. Mag. 1931. N 11. P. 617–633.
5. **Thomson W. (Lord Kelvin).** Floating magnets (illustrating vortex-systems) // Nature. 1878. N 18. P. 13–14.
6. **Okulov V. L.** On the stability of multiple helical vortices // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 319–342. DOI: 10.1017/s0022112004001934.
7. **Delbende I., Piton B., Rossi M.** Merging of two helical vortices // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2015. V. 49. P. 363–372.
8. **Selçuk C., Delbende I., Rossi M.** Helical vortices: Quasiequilibrium states and their time evolution // Phys. Rev. Fluids. 2017. N 2. 084701.
9. **Okulov V. L.** An acentric rotation of two helical vortices of the same circulations // Regular Chaotic Dynamics. 2016. V. 21, N 3. P. 267–273.
10. **von Helmholtz H.** Über integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math. 1858. V. 55. P. 25–55.
11. **Alekseenko S. V.** Theory of concentrated vortices: An introduction / S. V. Alekseenko, P. A. Kuibin, V. L. Okulov. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
12. **Salunkhe S., El Fajri O., Bhushan S., et al.** Validation of tidal stream turbine wake predictions and analysis of wake recovery mechanism // J. Marine Sci. Engng. 2019. V. 7. P. 362–386.
13. **Жуковский Н. Е.** Вихревая теория гребного винта I // Тр. Отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. 1912. Т. 16, вып. 14. С. 1–47.
14. **Okulov V. L., Sørensen J. N., Wood D. H.** The rotor theories by professor Joukowsky: Vortex theories // Progr. Aerospace Sci. 2015. V. 73. P. 19–46. DOI: 10.1016/j.paerosci.2014.10.002.
15. **Quaranta H. U., Bolnot H., Leweke T.** Long-wave instability of a helical vortex // J. Fluid Mech. 2015. V. 780. P. 687–716.
16. **Okulov V. L., Sørensen J. N.** The self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 2020. V. 883. A-5.
17. **Ricca R. L.** The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics // Fluid Dynamics Res. 1996. V. 18. P. 245–268.

18. **Fukumoto Y., Okulov V. L., Wood D. H.** The contribution of Kawada to the analytical solution for the velocity induced by a helical vortex filament // Appl. Mech. Rev. 2015. V. 67, N 6. 060801. DOI: 10.1115/1.4031964.
19. **Окулов В. Л., Гешева Е. С., Куйбин П. А. и др.** Различие в перемещении винтового вихря и движении частиц вдоль его оси // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 3. (В печати).
20. **Saffman P. G.** Vortex dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
21. **Ricca R. L.** The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // J. Fluid Mech. 1994. V. 273. P. 241–259.
22. **Boersma J., Wood D. H.** On the self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 1999. V. 384. P. 263–280.
23. **Kuibin P. A., Okulov V. L.** Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament // Phys. Fluids. 1998. V. 10. P. 607–614.

Поступила в редакцию 24/III 2020 г.,
после доработки — 24/III 2020 г.
Принята к публикации 30/III 2020 г.