На фиг. 6 в этих же координатах приведены измеренные поля скоростей для течения без турбулизатора при средней скорости V течения 4.3 *см сек*$^{-1}$ (кривая *1*) и с турбулизатором *1* при средней скорости 5 *см сек*$^{-1}$ (кривая *2*).

Проведенные эксперименты показали, что частотный анализ оптических сигналов от серии точек потока позволяет найти среднюю скорость течения жидкости в заданной области с пространственным осреднением порядка нескольких миллиметров в направлении течения и порядка одного миллиметра в двух других направлениях. Разрешение определялось лишь выбранной геометрией модулятора и может быть значительно лучшим. Разброс полученных значений составлял 2—3% при измерении скорости течения в пределах 0.01—1 *м·сек*$^{-1}$ и определялся главным образом ограниченным временем анализа спектра. При более высоких скоростях течения необходимое время анализа меньше. Диапазон измеренных значений скорости определялся сверху максимальной скоростью, получаемой в установке, а снизу разрешением регистрирующего оборудования. В случае, если перенос поля оптических флуктуаций происходит с переменной по времени скоростью, то это приводит к уширению спектра, что может быть использовано для измерения турбулентности.

В качестве иллюстрации на фиг. 7 приведены спектры сигналов для турбулентного *а* и ламинарного *б* течений, а также турбулентного течения со средней скоростью, такой же, что и в случае *а*, но с дополнительным введением турбулизирующей решетки *1*. Средние скорости течений для спектров *а* и *б* равны 27.2 *см сек*$^{-1}$, а для спектра *б* ее значение 7.56 *см·сек* ^{1}.

Авторы благодарны С. А. Христиановичу за внимание и интерес к работе.

Поступила 12 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Freeman M. P., Li S. U., Jaskowsky W. Velocity of propagation and nature of luminosity fluctuations in a plasma jet. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 9, p. 2845—2848.
2. Деревянко Н. Ф., Трохан А. М. О применении корреляционного метода для измерения скорости плазменных потоков. Измерительная техника, 1966, № 10, стр. 24—28.
3. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
4. Duxon — Lewis G., Isles G. L. Shap—focusing schlieren systems for studies of flat flames. J. Scient. Instrum., 1962, vol. 39, No. 4, p. 148—151.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ РАВНОМЕРНО-ЗАВИХРЕННОГО ПОТОКА НА ОБТЕКАЕМЫЙ КОНТУР

А. Г. Ярмицкий (*Днепропетровск*)

Рассматривается обтекание контура плоским потоком несжимаемой идеальной жидкости с постоянным вихрем. Такой поток жидкости назовем равномерно-завихренным. Силы, действующие на контур в равномерно-завихренном потоке, анализировались в ряде работ [1-3]. Работа [1] посвящена изучению кругового равномерно-завихренного потока, а в работах [2-4] исследуется равномерное течение с поперечным градиентом скорости. Указанные исследования в основном были связаны с задачами об обтекании тел в карусельном гидроканале, а также при ветре в природных условиях.

Ниже показано, что метод определения функции тока возмущенного кругового потока, разработанный в [1], может быть обобщен на любой равномерно-завихренный поток, в частности на равномерное течение с поперечным градиентом скорости. Получена формула для определения гидродинамической реакции любого равномерно-завихренного потока на обтекаемый контур. Выводится конечное аналитическое выражение для аэродинамической силы, действующей на круговой цилиндр в равномерно-завихренном расходящемся потоке.

Будем предполагать, что внесенный в поток с постоянным вихрем Ω контур не изменяет распределения вихря в этом потоке. Экспериментально показано, что это предположение вполне приемлемо, например, при изучении обтекания тел в карусельном гидроканале. Обтекание контура описывается уравнением для функции тока Ψ:

$$4\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial\bar{z}} = -\Omega \tag{1}$$

с условием на контуре

$$\Psi|_L = \mathrm{const} \tag{2}$$

На достаточно большом расстоянии от контура функция тока будет сколь угодно мало отличаться от функции тока невозмущенного течения Ψ_∞, на которое наложена циркуляция, так как возмущения от контура затухают по мере удаления от него. Отсюда следует, что на бесконечности функция тока Ψ имеет порядок

$$\Psi = \Psi_\infty + O(\ln |z|) \tag{3}$$

где через $O(\ln|z|)$ обозначены выражения, возрастающие при $|z| \to \infty$ не быстрее, чем $\ln|z|$.

Краевая задача (1)—(3) отличается от краевой задачи, рассмотренной в [1], только лишь более общим условием на бесконечности (3).

Как показано в [2], самое общее равномерно-завихренное течение может быть получено путем наложения кругового равномерно-завихренного потока с центром вращения в начале координат и потенциального течения [1]. Так что

$$\Psi = -{}^1/_4\, \Omega\, z \bar{z} + \Psi^\circ \tag{4}$$

Здесь Ψ° — функция тока некоторого потенциального течения.

Согласно (1) —(4), потенциальное течение, определяемое функцией Ψ°, описывается уравнением Лапласа со следующим краевым условием и условием на бесконечности:

$$\Psi^\circ = {}^1/_4\Omega z\bar{z} + \mathrm{const} \quad \text{на } L, \quad \Psi^\circ = \Psi^\circ_\infty + O(\ln|z|) \tag{5}$$

Здесь Ψ°_∞ — функция тока невозмущенного потенциального потока.

Таким образом, краевая задача (1)—(3) сводится к определению гармонической функции Ψ°, удовлетворяющей условиям (5).

Решение этой задачи будем вести методом, предложенным в [1]. Представим функцию Ψ° в виде суммы гармонических функций $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, которые подчиним следующим условиям на бесконечности

$$\Psi^{(1)} = {}^1/_4\Omega z\bar{z} + \mathrm{const} \quad \text{на} \quad L, \quad \Psi^{(1)} = O(|z|^{-1}) \tag{6}$$

$$\Psi^{(2)} = 0 \text{ на } L, \qquad \Psi^{(2)} = \Psi_\infty^\circ + O(\ln|z|) \tag{7}$$

Тогда, как легко видеть, функция

$$\Psi = -{}^1/_4\Omega z\bar{z} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} \tag{8}$$

будет решением поставленной задачи (1)—(3).

Для определения функции $\Psi^{(2)}$ можно воспользоваться теоремой об окружности и конформным отображением. Функция $\Psi^{(1)}$ для случая обтекания профиля Жуковского найдена в работе [1]. При обтекании эллипса с полуосями a и b, центром в начале координат и полуосью a, направленной вдоль оси x, эта функция имеет вид

$$\Psi^{(1)} = \mathrm{Im}\, w^{(1)} = \mathrm{Im}\left(\frac{i}{8}\,\Omega r^2 \frac{c^2}{\zeta^2}\right), \quad \left(\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{2}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad r = \frac{a+b}{2}\right) \tag{9}$$

Вводя в рассмотрение комплексную скорость $\bar{v}$, на основании (4) получаем

$$\bar{v} = \bar{v}^* + \bar{v}^\circ \ (\bar{v}^* = -{}^1/_2 i\Omega\bar{z}) \tag{10}$$

Здесь $\bar{v}^*$ — комплексная скорость кругового равномерно-завихренного потока с центром вращения в начале кординат, а $\bar{v}^\circ$ — комплексная скорость потенциального течения, определяемого функциями $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$.

Если поток, обтекающий профиль, представляет собой результат наложения двух плоских установившихся потоков, то аэродинамическую силу в этом случае можно рассматривать, как сумму аэродинамических сил, соответствующих каждому из накладываемых потоков, и аэродинамической силы, происходящей от их взаимного влияния $R^{*\circ}$(т. е. зависящей от компонентов скоростей обоих потоков), так что

$$\bar{R} = \bar{R}^* + \bar{R}^\circ + \bar{R}^{*\circ} \tag{11}$$

Определим аэродинамическую силу, обусловленную круговым равномерно-завихренным потоком с центром вращения в начале координат, и аэродинамическую силу, происходящую от взаимного влияния накладываемых потоков.

По теореме Чаплыгина — Блазиуса, учитывая (10), имеем

$$\bar{R}^* = \frac{i\rho}{2} \oint_{(L)} \bar{v}^{*2}\, dz = -\frac{i\rho}{8}\, \Omega^2 \oint_{(L)} \bar{z}^2\, dz$$

---

[1] Вывод формулируется в принятом здесь терминах

Использовав комплексную форму теоремы Стокса [1 2], получим

$$\oint\limits_{(L)} \bar{z}^2\, dz = 4i \iint\limits_{(S)} \bar{z}\, dS = 4iS\bar{z}_c \quad (z_c = x_c + iy_c)$$

Здесь S — площадь, ограниченная контуром L, z_c — положение центра тяжести этой площади. Следовательно

$$\bar{R}^* = {}^1/_4 \rho\Omega^2 S\bar{z}_c \tag{12}$$

Найдем теперь аэродинамическую силу, обусловленную интерференцией накладываемых потоков

$$\bar{R}^{*0} = i\rho \oint\limits_{(L)} \bar{v}^* \bar{v}^\circ\, dz = \frac{1}{2}\rho\Omega \oint\limits_{L} \bar{z}\, dw$$

Здесь w — комплексный потенциал безвихревого течения. Как показано в [2]

$$\oint\limits_{(L)} \bar{z}\, dw = \oint\limits_{(L)} \bar{z}\, d\bar{w} - 2i \oint\limits_{(L)} \Psi^\circ\, d\bar{z}$$

Вновь используя комплексную форму теоремы Стокса, с учетом первого из выражений (5) для Ψ°, получаем

$$\oint\limits_{(L)} \Psi^\circ\, d\bar{z} = -\frac{1}{2} i\Omega \iint\limits_{(S)} \bar{z}\, dS = -\frac{1}{2} i\Omega S\bar{z}_c$$

С учетом этого

$$\oint\limits_{(L)} \bar{z}\, dw = \oint\limits_{(L)} \bar{z}\, d\bar{w} - \Omega S\bar{z}_c$$

Таким образом

$$\bar{R}^{*\circ} = {}^1/_2 \rho\Omega \left(\oint\limits_{(L)} \bar{z}\, d\bar{w} - \Omega S\bar{z}_c \right) \tag{13}$$

Обозначив составляющую аэродинамической силы, обусловленную завихренностью потока, через R^{**}, на основании выражений (11)—(13) найдем

$$\bar{R} = \bar{R}^\circ + \bar{R}^{**} \tag{14}$$

$$\bar{R}^\circ = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_{(L)} \bar{v}^{\circ 2}\, dz, \qquad R^{**} = R^* + R^{*\circ} = \frac{1}{2}\rho\Omega \oint\limits_{(L)} z\bar{v}^\circ\, dz$$

Предполагая отсутствие особенностей в потоке, будем считать комплексную скорость $\bar{v}^\circ$ голоморфной функцией z во внешней по отношению к контуру L части плоскости z. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки имеем ряд Лорана

$$\bar{v}^\circ = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \tag{15}$$

Выполнив интегрирование по окружности достаточно большого радиуса, чтобы было справедливо разложение (15), выразим компоненты аэродинамической силы R° и R^{**} через коэффициенты этого разложения

$$\bar{R}^\circ = -2\pi\rho \sum_{n=0}^{m} a_n a_{-(n+1)}, \qquad R^{**} = \pi\rho\Omega i a_{-2} \tag{16}$$

Таким образом, главный вектор сил давления жидкости на обтекаемый равномерно-завихренным потоком профиль выразится следующим образом:

$$R = X + iY = -\pi\rho \left(2 \sum_{n=0}^{m} \bar{a}_n \bar{a}_{-(n+1)} - i a_{-2}\Omega \right) \tag{17}$$

Положив

$$\Omega = 0, \quad a_{-1} = -i\chi, \quad a_n = \bar{v}_\infty\ (n = 0), \quad a_n = 0\ (n \neq 0)$$

Здесь $\chi = \Gamma / 2\pi$ — интенсивность циркуляции Γ вокруг профиля, а $\bar{v}_\infty$ — комплексная скорость плоско-параллельного потока на бесконечности, получим известную теорему Н. Е. Жуковского. Рассмотрим теперь некоторые примеры.

Эллипс в равномерном потоке с поперечным градиентом скорости. Пусть распределение скоростей невозмущенного потока в плоскости $\zeta(\xi,\eta)$ имеет вид

$$U = -\Omega\eta + U_\infty, \qquad V = 0$$

Здесь U_∞ — скорость равномерного потока на бесконечности ($\xi \to \infty$, $\eta = 0$). Тогда комплексная скорость невозмущенного потока, а также его потенциальной части, соответственно будут

$$\bar v_\infty = {}^1/_2\, i\Omega(\zeta - \bar\zeta) + U_\infty, \qquad \bar v_\infty{}^\circ = {}^1/_2\, i\Omega\zeta + U_\infty$$

По теореме об окружности [2] комплексная скорость возмущенного потенциального потока, обтекающего круговой цилиндр радиуса r

$$\bar v_\zeta^{(2)} = \frac{1}{2} i\Omega\zeta + U_\infty + \frac{r^2}{\zeta^2}\left(\frac{1}{2} i\Omega\frac{r^2}{\zeta} - U_\infty\right)$$

В более общем случае обтекания цилиндра, когда скорость невозмущенного потока направлена под углом α к оси x и на поток наложена циркуляция $\Gamma = 2\pi\chi$ вокруг цилиндра, комплексная скорость возмущенного безвихревого течения имеет вид

$$\bar v_\zeta^{(2)} = \frac{1}{2} i\Omega e^{-2i\alpha}\zeta + U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{i\chi}{\zeta} - \frac{U_\infty r^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2} + \frac{{}^1/_2\, i\Omega r^4 e^{2i\alpha}}{\zeta^3}$$

Используя конформное преобразование, найдем, что комплексная скорость обтекания эллиптического цилиндра $\bar v_z^{(2)}$ связана с комплексной скоростью обтекания кругового цилиндра $\bar v_\zeta^{(2)}$ соотношением

$$\bar v_z^{(2)} = \frac{\zeta^2}{\sqrt{z^2 - c^2}}\, \bar v_\zeta^{(2)}$$

Следовательно, комплексная скорость обтекания эллиптического цилиндра, обусловленная функцией тока $\Psi^{(2)}$, имеет вид

$$\bar v^{(2)}{}_z = \frac{1}{2} i\Omega e^{-2i\alpha}\frac{\zeta^2}{\sqrt{z^2-c^2}} + U_\infty e^{-i\alpha}\frac{\zeta}{\sqrt{z^2-c^2}} -$$

$$- i\chi\frac{1}{\sqrt{z^2-c^2}} - U_\infty r^2 e^{i\alpha}\frac{1}{\zeta\sqrt{z^2-c^2}} + \frac{1}{2} i\Omega r^4 e^{2i\alpha}\frac{1}{\zeta^2\sqrt{z^2-c^2}}$$

Найдем теперь комплексную скорость $\bar v_z{}^{(1)}$, соответствующую функции $\Psi^{(1)}$

$$\bar v_z{}^{(1)} = \frac{d\,[w^{(1)}(\varphi(z))]}{dz}$$

где согласно изложенному ранее

$$w^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} i\Omega r^2\frac{c^2}{\zeta^2}, \qquad \zeta = \varphi(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$$

Следовательно, для $\bar v_z{}^{(1)}$ получаем

$$\bar v_z{}^{(1)} = -\frac{1}{4} i\Omega r^2\frac{c^2}{\zeta^2\sqrt{z^2-c^2}} \qquad (18)$$

Комплексная скорость обтекания эллиптического цилиндра потенциальной частью возмущенного потока

$$\bar v^\circ = \bar v_z^{(1)} + \bar v_z^{(2)} \qquad (19)$$

В окрестности бесконечно удаленной точки

$$\bar v^\circ = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

где

$$a_1 = {}^1/_2 i\Omega e^{-2i\alpha}, \quad a_0 = U_\infty e^{-i\alpha}, \quad a_{-1} = -i\chi, \quad a_{-2} = ({}^1/_4 c^2 e^{-i\alpha} - r^2 e^{i\alpha})\; U_\infty$$

Исходя из формулы (17), в этом случае можно записать

$$R = -\pi\rho[2(\bar a_0\bar a_{-1} + \bar a_1\bar a_{-2}) - i a_{-2}\Omega] = -i[\rho U_\infty\Gamma + \pi\rho\Omega U_\infty(a+b)\,(a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha)]b^{i\alpha}$$

Отсюда величина подъемной силы

$$F = -\rho U_\infty\Gamma - \pi\rho\Omega U_\infty(a+b)\quad(a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha) \qquad (20)$$

В случае отсутствия вокруг контура циркуляции Г полученный результат совпадает с результатом работы [3] [1]. Полагая в этом случае $a = b = r$, находим

$$F = -2\rho U_\infty \Gamma', \quad \Gamma' = \Omega \pi r^2 \tag{21}$$

Выражение (21) совпадает с известным выражением подъемной силы для кругового цилиндра [3,4]. Если положить в (20) $\Gamma = 0, b = 0, 0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2\,\pi$, то получим величину подъемной силы при бесциркуляционном обтекании пластинки

$$F = -\rho U_\infty \Omega \pi a^2 \sin^2\alpha \tag{22}$$

максимума эта сила достигает при $\alpha = {}^1/_2\,\pi$, когда пластинка расположена перпендикулярно к потоку. Это также согласуется с выводами работы [3].

Эллипс в круговом равномерно-завихренном потоке. Пусть центр вращения потока находится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда компоненты скорости в каждой точке невозмущенного потока можно представить в виде $U = -\omega(y - y_0)$, $V = \omega(x - x_0)$, где $\omega = {}^1/_2\,\Omega$ — угловая скорость потока.

Отсюда комплексная скорость невозмущенного течения

$$\bar{v}_\infty = -i\omega(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

Привлекая соотношение (10), выделим комплексную скорость потенциальной части этого течения

$$\bar{v}_\infty{}^\circ = i\omega\bar{z}_0$$

Обтекание эллиптического цилиндра потенциальным потоком с постоянной скоростью на бесконечности хорошо изучено [5]; комплексная скорость в этом случае

$$\bar{v}_z^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\bar{v}_\infty{}^\circ\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right) + \frac{(a+b)^2}{c^2}\, v_\infty{}^\circ\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right)\right] - \frac{i\chi}{\sqrt{z^2 - c^2}}$$

С учетом (18) и (19) найдем

$$\bar{v}^\circ = \bar{v}_z^{(2)} - i\Omega r^2 \frac{c^2}{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^2 \sqrt{z^2 - c^2}} \tag{23}$$

Разложив правую часть последнего выражения в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана, получим

$$\bar{v}^\circ = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

$$a_0 = \bar{v}_\infty{}^\circ, \quad a_{-1} = -i\chi, \quad a_{-2} = {}^1/_4\,[\bar{v}_\infty{}^\circ c^2 - v_\infty{}^\circ (a+b)^2]$$

Применим теперь формулу (17)

$$R = -2\pi\rho(\bar{a}_0 \bar{a}_{-1} - i\omega a_{-2}) = -i\rho v_c(\Gamma + \Gamma') \tag{24}$$

где $v_c = -i\omega z_0$ — скорость невозмущенного потока на оси цилиндра

$$\Gamma' = \frac{1}{2}\pi\omega\,[(a+b)\,z_0 + (a-b)\,\bar{z}_0]\,\frac{a+b}{z_0}$$

Полагая $z_0 = iy_0$, $a = b = r$, находим

$$\bar{R} = i\rho v_c(\Gamma + \Gamma') \quad (v_c = \omega y_0, \ \Gamma' = \Omega\pi r^2) \tag{25}$$

Этот результат совпадает с известным выражением аэродинамической силы для круга [1], когда центр вращения потока находится на мнимой оси.

Если положить в (24) $b = 0$, $a = c$, то получим выражение для аэродинамической силы, действующей на плоскую пластинку длиной $2c$

$$R = -i\rho v_c(\Gamma + \Gamma'), \quad \Gamma' = {}^1/_2\,\omega\pi c^2(1 + \bar{z}_0 / z_0) \tag{26}$$

где v_c — скорость невозмущенного потока в центре пластинки.

Циркуляцию Г определим из условия конечности скорости на задней кромке пластинки. С этой целью проанализируем выражение для комплексной скорости обтекания пластинки. На основании (10) и (23) найдем

$$\bar{v} = -i\omega\bar{z} + U^0 - \frac{i}{\sqrt{z^2 - c^2}}\left(V^\circ z + \chi + \frac{1}{2}\,\omega\,\frac{c^4}{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^2}\right)$$

Здесь U° и V° — компоненты скорости потенциальной части невозмущенного течения. При произвольной величине циркуляции $\Gamma = 2\pi\chi$ и $z = \pm c$ скорость имеет бесконечные значения, что соответствует обтеканию острых передней и задней кромок.

---

[1] Различие в знаках объясняется противоположным правилом знаков для вихря Ω.