УДК 517.9+533.6+539.3

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: chr01@rambler.ru

Для системы дифференциальных уравнений вводится понятие обобщенных преобразований эквивалентности, для которых преобразования эквивалентности, рассмотренные Л. В. Овсянниковым, являются универсальными преобразованиями эквивалентности. Предложен алгоритм групповой классификации системы дифференциальных уравнений с помощью этих обобщенных преобразований эквивалентности. На примерах уравнений газовой динамики и уравнений нелинейных продольных колебаний вязкоупругого стержня в модели Кельвина показаны эффективность и преимущества данного алгоритма.

Ключевые слова: групповая классификация систем дифференциальных уравнений, обобщенные и универсальные преобразования эквивалентности, группа эквивалентностей, уравнения газовой динамики, нелокальные симметрии.

Введение. Математические модели различных явлений формулируются в виде систем дифференциальных уравнений, содержащих произвольный элемент — параметры или функции, которые находятся экспериментально и не являются строго фиксированными. Групповая классификация дифференциальных уравнений позволяет, в частности, выявить значения экспериментально определяемых физических величин и формы зависимостей между ними, наиболее удобных для математического исследования.

1. Групповая классификация систем дифференциальных уравнений. Рассматривается система (S) дифференциальных уравнений n-го порядка $(n \geqslant 1)$ с независимыми переменными $\boldsymbol{x}$ и зависимыми переменными $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, содержащая произвольный элемент $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \dots, \underset{n}{\boldsymbol{u}})$ $(n \geqslant 1)$, где $\underset{i}{\boldsymbol{u}}$ — набор производных i-го порядка зависимых переменных $\boldsymbol{u}$ по независимым переменным $\boldsymbol{x}$.

Пусть произвольный элемент удовлетворяет структурным уравнениям (Q), в которых независимыми переменными являются $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\underset{1}{\boldsymbol{u}}$, …, $\underset{n}{\boldsymbol{u}}$, а зависимыми переменными — $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \dots, \underset{n}{\boldsymbol{u}})$.

Задача групповой классификации системы (S) включает [1]:

— отыскание ядра основных групп;

— перечисление с точностью до преобразований эквивалентности всех специализаций произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, при которых происходит расширение ядра;

— поиск основной группы для каждой специализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-12075-офи-м-2011).

При решении данной задачи основную роль играют преобразования эквивалентности, т. е. преобразования переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S). Эти преобразования характеризуются следующими двумя признаками [1]:

А. Преобразования эквивалентности порождаются операторами

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\cdot\partial_{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\cdot\partial_{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\underset{1}{\boldsymbol{u}},\ldots,\underset{n}{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{f})\cdot\partial_{\boldsymbol{f}} \qquad (1)$$

и являются точечными симметриями системы $(S)\cup(Q)$. При этом продолжение указанных операторов осуществляется с учетом того, что в системе (S) независимыми переменными являются $\boldsymbol{x}$, зависимыми переменными — $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$, а в системе (Q) независимыми переменными являются $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\underset{1}{\boldsymbol{u}}$, …, $\underset{n}{\boldsymbol{u}}$, зависимыми переменными — $\boldsymbol{f}$. Соответствующие формулы продолжения указаны в [1].

Б. Преобразования эквивалентности допускаются системой $(S)\cup(Q)$ при всех специализациях произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, имеющих данный функциональный или параметрический произвол.

Как показано в [1], преобразования эквивалентности обладают следующими двумя важными свойствами. Во-первых, данные преобразования действуют только на произвольный элемент $\boldsymbol{f}$, сохраняя дифференциальную структуру системы (S); при этом произвольный элемент $\boldsymbol{f}$ сохраняет функциональный или параметрический произвол, задаваемый структурными уравнениями (Q). Во-вторых, преобразования эквивалентности образуют группу Ли, называемую группой эквивалентностей системы (S) для данной специализации произвольного элемента.

При уменьшении функционального или параметрического произвола для произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, удовлетворяющего структурным уравнениям (Q), т. е. при сужении специализации произвольного элемента, группа эквивалентностей системы (S), вообще говоря, изменяется.

Одной из первых работ, в которых была предпринята попытка учесть влияние специализации произвольного элемента на группу эквивалентностей, является работа [2]. Такая же попытка была предпринята в работе [3] при групповой классификации уравнений двумерных движений газа. В работах [2, 3] рассматривались преобразования эквивалентности, в которых преобразования независимых и зависимых переменных явно зависели от произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, сохраняя вид системы (S) при всех специализациях этого элемента, имеющих данный функциональный или параметрический произвол.

В настоящей работе для системы дифференциальных уравнений вводится понятие обобщенных преобразований эквивалентности, для которых преобразования эквивалентности, рассмотренные в [1], являются универсальными преобразованиями эквивалентности, и предлагается алгоритм, позволяющий с помощью обобщенных преобразований эквивалентности получить все специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, при которых происходит расширение группы эквивалентностей системы (S), и найти все эти расширения. В отличие от классического алгоритма, приведенного в [1], данный алгоритм позволяет, во-первых, избежать значительных трудностей, возникающих при анализе классифицирующих уравнений, во-вторых, существенно сократить объем вычислений, в-третьих, сразу найти наиболее широкую группу эквивалентностей системы (S) для каждой конкретной специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$.

Преобразования, задаваемые условиями А, Б, будем называть универсальными преобразованиями эквивалентности системы (S).

Предлагается отказаться от условия Б и искать оператор вида (1), допускаемый в соответствии с условием А системой $(S)\cup(Q)$. Как показано в [1], условие А определяет общий вид преобразований эквивалентности системы (S).

Отказ от условия Б означает, что в системе определяющих уравнений, полученных с помощью условия А, неизвестными функциями являются не только $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, но и $\boldsymbol{f}$. Каждое решение этой системы определяет специализацию произвольного элемента $\boldsymbol{f}$ и группу эквивалентностей системы (S) для данной специализации. В результате получаются все возможные специализации, поскольку условие А определяет общий вид преобразований эквивалентности системы (S).

Таким образом, отказ от условия Б позволяет получить все специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, при которых происходит расширение группы эквивалентностей системы (S), и найти все эти расширения.

Определение. Преобразования, задаваемые условием А, называются обобщенными преобразованиями эквивалентности системы (S).

Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) состоит из преобразований эквивалентности этой системы, сохраняющих ее дифференциальную структуру при всех специализациях произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, задаваемых уравнениями структуры (Q). Это множество содержит универсальные преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S) при любом произвольном элементе $\boldsymbol{f}$, и преобразования, сохраняющие дифференциальную структуру системы (S) при каждой конкретной специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$.

Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S), вообще говоря, не образует группу Ли преобразований, так как состоит из преобразований, сохраняющих дифференциальную структуру этой системы при различных специализациях произвольного элемента $\boldsymbol{f}$.

Пусть Ω — множество решений структурных уравнений (Q), а $F(\Omega)$ — множество его подмножеств. Множество $F(\Omega)$ состоит из всех специализаций произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, определяемого структурными уравнениями (Q). Множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) является множеством сохраняющих дифференциальную структуру этой системы преобразований переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$, для каждого из которых в множестве $F(\Omega)$ найдется хотя бы один инвариантный элемент. Множество универсальных преобразований эквивалентности системы (S) представляет собой множество сохраняющих дифференциальную структуру этой системы преобразований переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$, для которых каждый элемент множества $F(\Omega)$ является инвариантным.

Выполнить групповую классификацию системы (S) — значит найти для каждого элемента $q \in F(\Omega)$ максимальное подмножество множества обобщенных преобразований эквивалентности этой системы, для которого элемент q инвариантен, т. е. является неподвижной точкой для всех преобразований этого максимального подмножества. Каждое такое максимальное подмножество для фиксированного элемента $q \in F(\Omega)$ есть не что иное, как группа эквивалентностей системы (S) для данной специализации q произвольного элемента $\boldsymbol{f}$.

Пересечением групп эквивалентностей для всех специализаций произвольного элемента $\boldsymbol{f}$ является множество универсальных преобразований эквивалентности системы (S), т. е. образуемая универсальными преобразованиями эквивалентности группа Ли представляет собой ядро групп эквивалентностей для всех специализаций данной системы.

Универсальные преобразования эквивалентности, действующие на произвольный элемент $\boldsymbol{f}$ тождественно, образуют ядро основных групп системы (S), являющееся нормальным делителем группы эквивалентностей для каждой специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$.

Для множества обобщенных преобразований эквивалентности системы (S) справедлива следующая оценка снизу: множество точечных симметрий этой системы при всех специализациях произвольного элемента $\boldsymbol{f}$ является подмножеством множества обобщенных преобразований эквивалентности системы (S).

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм решения задачи групповой классификации системы дифференциальных уравнений включает два этапа:

1. Сначала ищется оператор (1) обобщенных преобразований эквивалентности системы (S). В силу инфинитезимального критерия инвариантности многообразия $(S) \cup (Q)$ относительно оператора (1) из условия А после расщепления по параметрическим производным следует система определяющих уравнений для $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{f}$. Решением этой переопределенной системы являются все специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, а для каждой специализации — соответствующие преобразования эквивалентности системы (S). Множество этих преобразований эквивалентности составляет множество обобщенных преобразований эквивалентности системы (S). Для каждой специализации произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, не имеющей функционального или параметрического произвола, множество преобразований эквивалентности системы (S) образует ее основную группу Ли преобразований. (Наиболее широкая основная группа, как правило, выделяется сразу.)

2. Для специализаций произвольного элемента $\boldsymbol{f}$, имеющих функциональный или параметрический произвол, исследуется действие группы эквивалентностей системы (S) с этим произвольным элементом, точнее, действие факторгруппы данной группы эквивалентностей по ядру основных групп системы (S), на систему (S) с этим произвольным элементом $\boldsymbol{f}$. В результате такого действия получаются эквивалентные системы. Для выявления всех неэквивалентных систем строится оптимальная система подгрупп для рассматриваемой группы эквивалентностей, точнее, для факторгруппы этой группы эквивалентностей по ядру основных групп системы (S). Преобразования эквивалентности, действующие на $\boldsymbol{f}$ тождественно, образуют ядро основных групп системы (S) при данном произвольном элементе $\boldsymbol{f}$, т. е. допускаются системой (S) при всех имеющих рассматриваемый произвол элементах $\boldsymbol{f}$. Система (S) допускает в дополнение к ядру основных групп каждую подгруппу группы эквивалентностей при условии, что данная подгруппа действует на элемент $\boldsymbol{f}$ тождественно. Для каждой подгруппы из построенной оптимальной системы подгрупп элемент $\boldsymbol{f}$ конкретизируется из условия, состоящего в том, что данная подгруппа действует на элемент $\boldsymbol{f}$ тождественно. Для группы Ли универсальных преобразований эквивалентности системы такая процедура осуществлялась в работе [4] при частичной групповой классификации некоторых конкретных систем дифференциальных уравнений и была названа методом предварительной групповой классификации.

Ниже приведены примеры, показывающие эффективность данного алгоритма. Сначала рассматривается классическая задача групповой классификации уравнений одномерного движения газа с плоскими волнами [1].

2. Групповая классификация уравнений одномерного движения газа. Уравнения одномерного движения газа с плоскими волнами с калорическим уравнением состояния $p = h(\rho, S)$ (S — энтропия) имеют вид

$$\begin{gathered} \rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \qquad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ p_t + up_x + f(p, \rho)u_x = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где t — время; $x \in \mathbb{R}$; $u = u(t, x)$ — скорость; $\rho = \rho(t, x)$ — плотность; $p = p(t, x)$ — давление; $f = f(p, \rho) = \rho c^2$ — произвольный элемент; $c = c(p, \rho)$ — скорость звука, задаваемая уравнением состояния $c^2 = h_\rho(\rho, S)$.

Уравнения структуры произвольного элемента записываются следующим образом:

$$f_t = 0, \qquad f_x = 0, \qquad f_u = 0. \tag{3}$$

Оператор обобщенных преобразований эквивалентности системы (2) задается в виде

$$\xi^0(t,x,u,\rho,p)\,\partial_t + \xi^1(t,x,u,\rho,p)\,\partial_x + \eta^1(t,x,u,\rho,p)\,\partial_u + \\ + \eta^2(t,x,u,\rho,p)\,\partial_\rho + \eta^3(t,x,u,\rho,p)\,\partial_p + \zeta(t,x,u,\rho,p,f)\,\partial_f, \qquad (4)$$

где ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, η^3, ζ, f — искомые функции своих переменных.

Из условия инвариантности многообразия, определяемого уравнениями (2), (3), относительно оператора (4) с учетом указанного в условии А правила продолжения этого оператора после расщепления по параметрическим производным следует система уравнений, определяющих обобщенные преобразования эквивалентности системы (2) и специализации произвольного элемента f:

$$\begin{gathered}
\xi^i = \xi^i(t,x) \quad (i=0,1),\\
\eta^1 + \rho\eta^1_\rho + u(\xi^0_t - \xi^1_x + u\xi^0_x) - \xi^1_t = 0,\\
2\eta^1 - f\eta^1_p + (\eta^3_u + f\xi^0_x)/\rho + 2u(\xi^0_t - \xi^1_x + u\xi^0_x) - 2\xi^1_t = 0,\\
\eta^2 - f\eta^2_p + \rho(\xi^0_t - \xi^1_x + 2u\xi^0_x + \eta^1_u - \eta^2_\rho) = 0,\\
\rho(\eta^3_p - \eta^2_\rho + 2(\xi^0_t - \xi^1_x + 2u\xi^0_x)) - f\eta^2_p = 0, \qquad \eta^3_\rho = 0,\\
\rho^2\eta^1_p - \eta^2_u + \rho\xi^0_x = 0, \qquad \rho^2\eta^1_\rho + 2\rho f\eta^1_p - 2\eta^3_u = 0,\\
f(\xi^0_t - \xi^1_x + 2u\xi^0_x + \eta^1_u - \eta^3_p) + \zeta = 0,\\
\zeta_t = f_\rho\eta^2_t + f_p\eta^3_t, \qquad \zeta_x = f_\rho\eta^2_x + f_p\eta^3_x, \qquad \zeta_u = f_\rho\eta^2_u + f_p\eta^3_u,\\
\rho(\eta^1_t + u\eta^1_x) + \eta^3_x = 0, \qquad \eta^2_t + u\eta^2_x + \rho\eta^1_x = 0,\\
\eta^3_t + u\eta^3_x + f\eta^1_x = 0, \qquad f\eta^1_\rho = 0.
\end{gathered} \qquad (5)$$

Из последнего уравнения системы (5) вытекает первая не имеющая ни функционального, ни параметрического произвола специализация произвольного элемента $f = 0$. При этом движение газа происходит таким образом, что давление в частице сохраняется. В данном случае система (5) легко решается. При $f = 0$ основная алгебра Ли системы (2) оказывается бесконечномерной [5] и содержит идеал, порождаемый операторами

$$Y_g = g'(p)\rho\,\partial_\rho + g(p)\,\partial p,$$

где g — произвольная функция. Факторалгебра по этому идеалу конечномерна и имеет базис

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\,\partial_x + \partial_u, \quad t\,\partial_t + x\,\partial_x, \quad t\,\partial_t - u\,\partial_u + 2\rho\,\partial_\rho.$$

При $f \neq 0$ система (5) после второго продолжения приводится в инволюцию и интегрируется. Ее общее решение имеет вид

$$\begin{gathered}
\xi^0 = c^1t^2 + c^2t + c^3, \qquad \xi^1 = c^1tx + c^4x + c^5t + c^6,\\
\eta^1 = c^1x + (c^4 - c^2 - c^1t)u + c^5, \qquad \eta^2 = (-c^1t + 2c^2 - 2c^4 + c^7)\rho,\\
\eta^3 = (-3c^1t + c^7)p + c^1t(3p - f) + c^8, \quad \zeta = (-3c^1t + c^7)f, \quad c^1((f_\rho)^2 + (f_p - 3)^2) = 0,
\end{gathered} \qquad (6)$$

где c^i $(i = 1, \ldots, 7)$ — произвольные постоянные.

Из последнего уравнения системы (6) следует еще одна специализация произвольного элемента $f = 3p + k$ ($k = \text{const}$). В результате преобразования $p' = p + k/3$ система (2) приводится к системе с произвольным элементом $f' = 3p'$. Эта специализация является второй специализацией произвольного элемента, не имеющей ни функционального, ни параметрического произвола. В данном случае уравнение $f = 3p$ добавляется к уравнениям структуры (3), а уравнение $\zeta = 3\eta^3$ — к уравнениям (6). Решение полученной системы показывает, что при $f = 3p$ основная алгебра Ли системы (2) является семимерной и совпадает с известной алгеброй Ли, приведенной в [1].

При $(f_\rho)^2 + (f_p - 3)^2 \neq 0$ из системы (6) следует, что обобщенные преобразования эквивалентности ограничиваются универсальными преобразованиями эквивалентности и порождаются операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\,\partial_x + \partial_u, \quad X_4 = t\,\partial_t + x\,\partial_x,$$
$$X_5 = t\,\partial_t - u\,\partial_u + 2\rho\,\partial_\rho, \quad X_6 = \rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p + f\,\partial_f, \quad X_7 = \partial_p.$$

Группа Ли $G_4\langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$ преобразует произвольный элемент f тождественно и является ядром основных групп системы (2), т. е. допускается этой системой при всех произвольных элементах f. В результате действия группы $G_3\langle X_5, X_6, X_7\rangle$ система (2) разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных систем. Для выявления всех неэквивалентных систем строится оптимальная система подгрупп для группы $G_3\langle X_5, X_6, X_7\rangle$. Система (2) допускает в дополнение к ядру $G_4\langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$ основных групп каждую подгруппу группы $G_3\langle X_5, X_6, X_7\rangle$ при условии, что данная подгруппа действует на элемент f тождественно.

Оптимальная система θ_1 однопараметрических подгрупп состоит из подгрупп $\theta_{1.1}\langle X_5\rangle$, $\theta_{1.2}\langle X_7\rangle$, $\theta_{1.3}\langle X_5 + X_7\rangle$, $\theta_{1.4}\langle X_6 + \alpha X_5\rangle$, а оптимальная система θ_2 двухпараметрических подгрупп — из подгрупп $\theta_{2.1}\langle X_5, X_6\rangle$, $\theta_{2.2}\langle X_5, X_7\rangle$, $\theta_{2.3}\langle X_7, X_6 + \alpha X_5\rangle$ (α — произвольная постоянная).

Для каждой подгруппы построенной оптимальной системы подгрупп группы $G_3\langle X_5, X_6, X_7\rangle$ элемент f определяется из условия, согласно которому данная подгруппа действует на этот элемент тождественно.

Так как подгруппа $\theta_{1.1}$ действует на элемент f тождественно, то $f = g(p)$, где g — произвольная функция. Основная группа системы (2) порождается операторами ядра основных групп этой системы и дополнительным оператором X_5.

Так как подгруппа $\theta_{1.2}$ действует на элемент f тождественно, то $f = g(\rho)$, где g — произвольная функция. К операторам ядра основных групп системы (2) добавляется оператор X_7.

Так как подгруппа $\theta_{1.3}$ действует на элемент f тождественно, то $f = g(\rho \exp(-2p))$, где g — произвольная функция. К операторам ядра основных групп системы (2) добавляется оператор $X_5 + X_7$.

Так как подгруппа $\theta_{1.4}$ действует на элемент f тождественно, то $f = pg(\rho^{-1}p^{2\alpha+1})$, где g — произвольная функция. К операторам ядра основных групп системы (2) добавляется оператор

$$\alpha(t\,\partial_t - u\,\partial_u) + (2\alpha + 1)\rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p.$$

Так как подгруппа $\theta_{2.1}$ действует на элемент f тождественно, то $f = \gamma p$, где γ — произвольная ненулевая постоянная. К операторам ядра основных групп системы (2) добавляются операторы

$$t\,\partial_t - u\,\partial_u + 2\rho\partial_\rho, \qquad \rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p.$$

Так как подгруппа $\theta_{2.2}$ действует на элемент f тождественно, то $f = 1$ (этого можно добиться с помощью преобразования растяжения). К операторам ядра основных групп системы (2) добавляются операторы X_5, X_7.

Так как подгруппа $\theta_{2.3}$ действует на элемент f тождественно, то $f = \gamma\rho^m$, где γ — произвольная ненулевая постоянная; $\alpha = (1-m)/(2m)$ $(m \neq 0)$. К операторам ядра основных групп системы (2) добавляются операторы

$$\alpha(t\,\partial_t - u\,\partial_u) + (2\alpha+1)\rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p, \qquad \partial_p.$$

Группа $G_3\langle X_5, X_6, X_7\rangle$ преобразует элемент f нетождественно, поэтому она не допускается системой (2) ни при каких f.

Таким образом, результат групповой классификации системы (2), выполненной по предложенному алгоритму, совпадает с известным результатом [1, 5].

Следует отметить, что в отличие от алгоритма, приведенного в [1], при групповой классификации системы (2) с помощью предложенного алгоритма удалось избежать значительных трудностей, связанных с анализом классифицирующих уравнений, и существенно уменьшить объем вычислений.

3. Групповая классификация систем уравнений нелинейных продольных колебаний вязкоупругого стержня в модели Кельвина. В модели Кельвина [6, 7] продольные нелинейные колебания одномерного вязкоупругого стержня описываются уравнением

$$u_{tt} = \varphi(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt}, \tag{7}$$

где t — время; x — координата, характеризующая положение поперечного сечения стержня; $u = u(t,x)$ — продольное перемещение сечения стержня за время t; $\lambda \neq 0$ — вязкость; $\varphi(u_x) = \sigma'(u_x)$; $\sigma(u_x)$ — напряжение; штрих обозначает дифференцирование по u_x. Предполагается, что выполнено условие $\varphi'(u_x) \neq 0$, т. е. колебания стержня являются нелинейными. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = 1$. Действительно, значение $\lambda = 1$ можно получить с помощью преобразования растяжения

$$\bar{t} = t/\lambda, \qquad \bar{x} = x/\lambda, \qquad \bar{u} = u/\lambda.$$

3.1. *Законы сохранения второго порядка для уравнения нелинейных продольных колебаний вязкоупругого стержня в модели Кельвина.* Решается задача классификации уравнения (7) по законам сохранения второго порядка. Законы сохранения второго порядка для уравнения (7) определяются вектором $\boldsymbol{A} = (A^0, A^1)$, компоненты которого являются функциями переменных t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx} и в силу уравнения (6) удовлетворяют соотношению [1]

$$(D_tA^0 + D_xA^1) = 0, \tag{8}$$

где D_t, D_x — операторы полного дифференцирования по t, x соответственно.

В результате расщепления равенства (8) по параметрическим производным функции u имеет место система определяющих уравнений

$$\begin{gathered} A^0_{u_{tt}} = 0, \qquad A^1_{u_{xx}} = 0, \qquad A^0_{u_{tx}} + A^1_{u_{tt}} = 0, \\ A^0_t + u_tA^0_u + u_{tt}A^0_{u_t} + u_{tx}A^0_{u_x} + (u_{tt} - \varphi(u_x)u_{xx})(A^0_{u_{xx}} + A^1_{u_{tx}}) + \\ + A^1_x + u_xA^1_u + u_{xx}A^1_{u_x} + u_{tx}A^1_{u_t} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

После третьего продолжения системы (9) к ней добавляются уравнения

$$\begin{gathered} A^0_{u_{tx}u_{xx}} = A^0_{u_{tx}u_{tx}} = A^1_{u_{tt}u_{tt}} = A^1_{u_{tt}u_{tx}} = A^1_{u_{tx}u_{tx}} = 0, \\ A^0_t + A^0_{u_{xx}} + A^1_{u_{tx}} + A^1_{xu_{tt}} + u_xA^1_{uu_{tt}} + u_{tt}A^1_{u_xu_{tt}} + u_{tx}A^1_{u_tu_{tt}} = 0, \\ A^0_{u_tu_{xx}} + A^0_{u_{xx}u_{xx}} + A^1_{u_xu_{tt}} = 0, \end{gathered}$$

$$A^0_{tu_{xx}} + u_t A^0_{uu_{xx}} + u_{tt} A^0_{u_t u_{xx}} + u_{tx} A^0_{u_x u_{xx}} - \varphi(u_x)(A^0_{u_{xx}} + A^1_{u_{tx}}) + \\ + (u_{tt} - \varphi(u_x) u_{xx}) A^0_{u_{xx} u_{xx}} + A^1_{u_x} = 0, \qquad (10)$$

$$A^0_{u_x u_{xx} u_{xx}} = 0, \qquad A^0_{u_{xx} u_{xx} u_{xx}} + A^0_{u_t u_{xx} u_{xx}} = 0,$$

$$A^0_{tu_{xx} u_{xx}} + u_t A^0_{uu_{xx} u_{xx}} + \varphi(u_x)(u_{xx} A^0_{u_t u_{xx} u_{xx}} - 2A^0_{u_{xx} u_{xx}}) = 0,$$

$$A^0_{u_x u_{xx}} + A^1_{u_x u_{tx}} = 0, \qquad A^0_{u_t u_{xx}} + A^0_{u_{xx} u_{xx}} - A^0_{u_x u_{tx}} = 0,$$

$$\varphi'(u_x)(u_{xx} A^0_{u_t u_{xx} u_{xx}} - 2A^0_{u_{xx} u_{xx}}) = 0.$$

После четвертого продолжения системы (9) к ней добавляется уравнение $A^0_{u_{xx} u_{xx}} = 0$, в силу которого система (9), (10) находится в инволюции и интегрируется. Общее решение этой системы имеет вид

$$A^0 = c^1(u - tu_t) - c^2 u_t + D_x \psi,$$

$$A^1 = c^1 t(u_{tx} + \sigma(u_x)) + c^2(u_{tx} + \sigma(u_x)) - D_t \psi,$$

где c^1, c^2 — произвольные постоянные; $\psi = \psi(t, x, u, u_t, u_x)$ — произвольная функция.

Функция ψ задает тривиальные законы сохранения [1]. Нетривиальные законы сохранения второго порядка для уравнения (7) порождаются двумя следующими законами сохранения:

$$A^0 = u - tu_t, \qquad A^1 = t(u_{tx} + \sigma(u_x)); \qquad (11)$$

$$A^0 = -u_t, \qquad A^1 = u_{tx} + \sigma(u_x). \qquad (12)$$

Каждый из этих законов определяет нелокальную переменную, с помощью которой уравнение (7) можно записать в виде системы уравнений, симметрии которой являются нелокальными симметриями уравнения (7). Для закона сохранения (11) эта система имеет вид

$$tu_t = w_x + u, \qquad w_t = w_{xx} + t\sigma(u_x) + u_x, \qquad (13)$$

для закона сохранения (12) —

$$u_t = v_x, \qquad v_t = v_{xx} + \sigma(u_x), \qquad (14)$$

где $w = w(t, x)$, $v = v(t, x)$ — нелокальные переменные. Предполагается, что в этих системах $\sigma''(u_x) \neq 0$.

С помощью алгоритма, предложенного в п. **1**, осуществляется групповая классификация систем уравнений (13), (14).

3.2. *Групповая классификация системы* (13). Произвольным элементом, по которому проводится групповая классификация, является напряжение $\sigma(u_x)$.

Уравнения структуры произвольного элемента имеют вид

$$\sigma_t = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_u = 0, \quad \sigma_w = 0, \quad \sigma_{u_t} = 0, \quad \sigma_{w_t} = 0, \quad \sigma_{w_x} = 0. \qquad (15)$$

Оператор обобщенных преобразований эквивалентности системы (13) задается в виде

$$\xi^0(t, x, u, w)\,\partial_t + \xi^1(t, x, u, w)\,\partial_x + \eta^1(t, x, u, w)\,\partial_u + \\ + \eta^2(t, x, u, w)\,\partial_w + \zeta(t, x, u, w, u_t, u_x, w_t, w_x, \sigma)\,\partial_\sigma, \qquad (16)$$

где ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, ζ, σ — искомые функции своих переменных.

Из условия инвариантности многообразия, задаваемого уравнениями (13), (15), относительно оператора (16) с учетом указанного в условии А правила продолжения этого оператора после расщепления по параметрическим производным следует система уравнений, определяющих обобщенные преобразования эквивалентности системы (13) и специализации произвольного элемента σ. После четвертого продолжения эта система приводится в инволюцию и интегрируется:

$$\xi^0 = 2c^5 t, \qquad \xi^1 = c^5 x + c^1, \qquad \eta^1 = (c^6 + c^5)u + 2c^8 x + c^2 t + c^3,$$
$$\eta^2 = (c^6 + 2c^5)w - c^8 x^2 - c^3 x + c^7 t^2 + c^4, \qquad \zeta = (c^6 - 2c^5)\sigma + 2c^7.$$

Здесь $\sigma = \sigma(u_x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\sigma'' \neq 0$, а обобщенные преобразования эквивалентности ограничиваются универсальными преобразованиями эквивалентности и порождаются операторами

$$Y_1 = \partial_x, \qquad Y_2 = t\,\partial_u, \qquad Y_3 = \partial_u - x\,\partial_w, \qquad Y_4 = \partial_w,$$
$$Y_5 = 2t\,\partial_t + x\,\partial_x + 3u\,\partial_u + 4w\,\partial_w, \qquad Y_6 = u\,\partial_u + w\,\partial_w + \sigma\,\partial_\sigma,$$
$$Y_7 = t^2\,\partial_w + 2\,\partial_\sigma, \qquad Y_8 = 2x\,\partial_u - x^2\,\partial_w.$$

Группа Ли $G_4\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$ преобразует произвольный элемент σ тождественно и является ядром основных групп системы (13), т. е. допускается этой системой при всех произвольных элементах σ. В результате действия группы $G_4\langle Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\rangle$ система (13) разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных систем. Для выявления всех неэквивалентных систем строится оптимальная система подгрупп для группы $G_4\langle Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\rangle$.

Оптимальная система T_1 однопараметрических подгрупп состоит из подгрупп $T_{1.1}\langle Y_6 + \alpha Y_5\rangle$, $T_{1.2}\langle Y_5\rangle$, $T_{1.3}\langle Y_5 + Y_7\rangle$, $T_{1.4}\langle Y_5 - 2Y_6 \mp Y_8\rangle$, $T_{1.5}\langle Y_7 + Y_8\rangle$, $T_{1.6}\langle Y_7\rangle$, $T_{1.7}\langle Y_8\rangle$ (α — произвольная постоянная).

Для каждой подгруппы построенной оптимальной системы T_1 однопараметрических подгрупп элемент σ определяется из условия, согласно которому данная подгруппа действует на этот элемент тождественно.

Поскольку подгруппа $T_{1.1}$ ($\alpha \neq -1/2$) действует на элемент σ тождественно, в системе (13) после преобразования растяжения переменных произвольный элемент принимает вид

$$\sigma = \pm(u_x)^\beta, \tag{17}$$

где $\beta = 1/(1 + 2\alpha)$. Так как $\sigma'' \neq 0$, то $\beta(\beta - 1) \neq 0$. В этом случае основная группа системы (13) порождается операторами ядра $G_4\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$ и дополнительным оператором

$$(1 - \beta)(2t\,\partial_t + x\,\partial_x) + (3 - \beta)u\,\partial_u + 2(2 - \beta)w\,\partial_w. \tag{18}$$

Поскольку подгруппа $T_{1.3}$ действует на элемент σ тождественно, в системе (13) после линейного невырожденного преобразования переменных произвольный элемент принимает вид

$$\sigma = \ln u_x. \tag{19}$$

К операторам ядра $G_4\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$ добавляется оператор

$$2t\,\partial_t + x\,\partial_x + 3u\,\partial_u + (t^2 + 4w)\,\partial_w. \tag{20}$$

Так как подгруппа $T_{1.4}$ действует на элемент σ тождественно, то в системе (13) после преобразования растяжения переменных произвольный элемент приводится к виду

$$\sigma = \exp{(\pm u_x)}. \tag{21}$$

К операторам ядра $G_4\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$ добавляется оператор

$$2t\,\partial_t + x\,\partial_x + (u \mp 2x)\,\partial_u + (2w \pm x^2)\,\partial_w. \tag{22}$$

Подгруппы $T_{1.1}$ ($\alpha = -1/2$), $T_{1.6}$ преобразуют элемент σ нетождественно, поэтому они не допускаются системой (13) ни при каких σ.

Так как подгруппа $T_{1.5}$ действует на элемент σ тождественно, то $\sigma = u_x + c$, где $c = \text{const}$, что противоречит условию $\sigma'' \neq 0$.

Так как подгруппа $T_{1.2}$ действует на элемент σ тождественно, то $\sigma = \text{const}$, что противоречит условию $\sigma'' \neq 0$. Это справедливо и для подгруппы $T_{1.7}$.

Для всех расширений ядра основных групп системы (13) на один допускаемый оператор функция $\sigma = \sigma(u_x)$ имеет произвол только при $\sigma = \pm(u_x)^\beta$, где $\beta(\beta - 1) \neq 0$. В этом случае система (13) допускает дополнительный оператор (18), порождающий подгруппу $T_{1.1}$ ($\alpha = (1 - \beta)/(2\beta)$), поэтому она может допускать два дополнительных оператора, только если одним из них будет оператор (18).

Множество неподобных двухпараметрических подгрупп группы $G_4\langle Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\rangle$, содержащих подгруппу $T_{1.1}$ ($\alpha = (1 - \beta)/(2\beta)$), состоит из трех подгрупп: $T_{2.1}\langle Y_5, Y_6\rangle$, $T_{2.2}\langle (1 - \beta)Y_5 + 2\beta Y_6, Y_7\rangle$, $T_{2.3}\langle (1 - \beta)Y_5 + 2\beta Y_6, Y_8\rangle$. Эти подгруппы действуют на элемент σ нетождественно, поэтому они не допускаются системой (13) ни при каких σ.

Вследствие разрешимости группы $G_4\langle Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\rangle$ возможно расширение основной алгебры Ли системы (13) только на один оператор. Такое расширение происходит только в трех указанных выше случаях. Дополнительные операторы определяются по формулам (18), (20), (22). Эти операторы, а также операторы Y_3, Y_4 являются нелокальными симметриями для уравнения (7).

3.3. *Групповая классификация системы* (14). Произвольным элементом, относительно которого проводится групповая классификация, является напряжение $\sigma(u_x)$.

Структура произвольного элемента определяется уравнениями (15), а оператор обобщенных преобразований эквивалентности системы (14) ищется в виде (16). При этом нужно заменить w на v.

Решение системы определяющих уравнений показывает, что обобщенные преобразования эквивалентности ограничиваются универсальными преобразованиями эквивалентности и порождаются операторами

$$Z_1 = \partial_t, \quad Z_2 = \partial_x, \quad Z_3 = \partial_u, \quad Z_4 = \partial_v, \quad Z_5 = t\,\partial_u + x\,\partial_v,$$
$$Z_6 = u\,\partial_u + v\,\partial_v + \sigma\,\partial_\sigma, \quad Z_7 = 2t\,\partial_t + x\,\partial_x + u\,\partial_u - 2\sigma\,\partial_\sigma,$$
$$Z_8 = x\,\partial_u, \quad Z_9 = t\,\partial_v + \partial_\sigma.$$

Здесь $\sigma = \sigma(u_x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\sigma'' \neq 0$.

Группа Ли $G_5\langle Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\rangle$ преобразует произвольный элемент σ тождественно и является ядром основных групп системы (14).

По аналогии с системой (13) устанавливается, что возможно расширение ядра $G_5\langle Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\rangle$ только на один оператор. Такое расширение происходит в тех же трех случаях, что и для системы (13):

1) при $\sigma = \pm(u_x)^\beta$, где $\beta(\beta-1) \neq 0$, система (14) допускает дополнительный оператор

$$(1 - \beta)(2t\,\partial_t + x\,\partial_x) + (3 - \beta)u\,\partial_u + 2v\,\partial_v; \tag{23}$$

2) при $\sigma = \ln u_x$ система (14) допускает дополнительный оператор

$$2t\,\partial_t + x\,\partial_x + 3u\,\partial_u + 2(t + v)\,\partial_v; \tag{24}$$

3) при $\sigma = \exp(\pm u_x)$ система (14) допускает дополнительный оператор

$$2t\,\partial_t + x\,\partial_x + (u \mp 2x)\,\partial_u. \tag{25}$$

Оператор Z_4 и операторы, задаваемые формулами (23)–(25), являются нелокальными симметриями уравнения (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Хабиров С. В.** Групповая классификация систем Гамильтона // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 44. С. 139–146.
3. **Мелешко С. В.** Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 56–62.
4. **Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Нелокальные симметрии. Эвристический подход. М.: ВИНИТИ, 1989. (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения; Т. 34).
5. **Чиркунов Ю. А.** Законы сохранения и групповые свойства уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 587–593.
6. **Greenberg J. M., MacCamy R. C., Mizel V. J.** On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\delta'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. Mech. 1968. V. 17, N 7. P. 707–728.
7. **Greenberg J. M.** On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0\bar{\lambda}_{tt} = E(\bar{\lambda}_x)\bar{\lambda}_{xx} + \lambda\bar{\lambda}_{xxt}$ // J. Math. Anal. Appl. 1969. V. 25. P. 575–591.

Поступила в редакцию 14/IV 2011 г.