УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ КЛИНА МЕТОДОМ БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В. А. Бабешко[*,**], О. В. Евдокимова[*], О. М. Бабешко[**]

[*] Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону, Россия
[**] Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар, Россия
E-mails: babeshko41@mail.ru, evdokimova.olga@mail.ru, babeshko49@mail.ru

Для граничных задач уравнения Гельмгольца в клиновидных областях показано, что в упакованном виде блочные элементы, соответствующие одной и той же граничной задаче, могут объединяться с учетом вида граничных условий, также образуя упакованный блочный элемент. Полученный результат проверяется с использованием другого метода. Показано, что при наличии угловых точек в области, в которой рассматривается граничная задача, не возникает дополнительных сложностей при объединении блочных элементов. Установлено, что поскольку решения ряда граничных задач механики сплошных сред и физики можно представить в виде комбинации решений граничных задач уравнения Гельмгольца, этот подход позволяет исследовать более сложные граничные задачи и создавать материалы с мозаичной структурой.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, уравнение Гельмгольца, псевдодифференциальные уравнения.

DOI: 10.15372/PMTF20210502

Введение. При исследовании и решении уравнений Гельмгольца применяется метод блочного элемента [1–12]. Этот метод используется, в частности, в сейсмологии, теории прочности [13–15]. В то же время точные решения граничных задач для уравнения Гельмгольца при произвольных граничных условиях построены только для ограниченного числа классических областей, в которые не входят прямоугольники, параллелепипеды, клиновидные области.

Построение решений граничных задач для уравнений Гельмгольца в неклассических областях при произвольных граничных условиях предоставляет возможность объединять решения в сопрягаемых областях с учетом граничных условий. Это позволяет продолжать решение граничной задачи для уравнений Гельмгольца в области, более сложные, чем классические.

Решения ряда граничных задач механики сплошных сред и физики представляются в виде комбинаций решений граничных задач для уравнения Гельмгольца [16–18], что дает возможность строить решения более сложных граничных задач в сложных областях,

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки (код проекта FZEN-2020-0020), Южного научного центра (код проекта 00-19-13, номер государственной регистрации 01201354241) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

создавать материалы с мозаичной структурой, исследовать процесс появления трещин на межблочных границах.

В данной работе на примере граничных задач для уравнения Гельмгольца исследуется важное свойство упакованных блочных элементов, соответствующих одной и той же граничной задаче. С точки зрения топологии множество таких упакованных блочных элементов представляет собой топологическую дискретизацию решения граничной задачи. Это означает, что множество упакованных блочных элементов является дискретным топологическим пространством [19]. В данном случае решение граничной задачи может быть представлено в виде комбинаций любых совокупностей упакованных блочных элементов, объединение носителей которых совпадает с областью постановки граничной задачи. При разработке блочного элемента возникает проблема сопряжения блочных элементов, имеющих носители с угловыми точками, в которых решение граничной задачи может иметь сингулярности. Приводимый в данной работе пример сопряжения двух упакованных блочных элементов граничной задачи для уравнения Гельмгольца с клиновидными носителями показывает, что сопряжение блочных элементов, имеющих носители с угловыми точками, не вызывает затруднений. Таким образом, появляются новые возможности для исследования и решения различных граничных задач, что позволяет использовать большой набор блочных элементов, носители которых могут с высокой точностью покрывать область, для которой ставится граничная задача [20].

Постановка задачи. Введем правую прямоугольную систему координат, в которой оси Ox_1, Ox_3 направлены горизонтально, а ось Ox_2 — вертикально вверх [1]. Рассмотрим полуплоскость Ω ($|x_1| \leqslant \infty$, $x_2 \leqslant 0$). Конечным числом взаимно перпендикулярных линий $x_1 = c_m$, $-\infty < c_m < \infty$, $x_2 = c_n$, $-\infty < c_n < 0$ разобьем ее на прямоугольники, в том числе неограниченные. Будем полагать, что прямоугольники, а также полуплоскость являются носителями упакованных блочных элементов некоторой граничной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Совокупность построенных упакованных блочных элементов в каждом прямоугольнике или в областях со связным носителем представляет собой дискретное топологическое пространство, если при объединении соседних блочных элементов соотношения эквивалентности удовлетворяют требованию их связности. Исследуем это свойство, рассматривая трехблочную структуру, состоящую из двух носителей, которые представляют собой прямоугольные клинья, занимающие третий Ω_1 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$) и четвертый Ω_2 ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$) квадранты, и полуплоскости $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. В качестве граничных задач примем уравнения Гельмгольца, решения которых в форме упакованных блочных элементов будем строить в каждом из указанных выше носителей.

Определяющие уравнения. Ниже рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2)\, u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

в области ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$, $|x_3| \leqslant 0$). Здесь p может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента при исследовании граничной задачи в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построения фактор-топологии. Поскольку рассматривается лишь один блочный элемент, необходимость выполнения последнего алгоритма отсутствует.

Рассмотрим для приведенного выше уравнения Гельмгольца граничную задачу Дирихле. Граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_3), \qquad u(x_1, 0, x_3) = f_1(x_1, x_3). \tag{1}$$

Здесь произвольные функции f_n обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно возрастающих обобщенных функций. Поскольку область Ω содержит бесконечно удаленные точки, в том случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с использованием принципа излучения.

Метод решения. Исследованию уравнения Гельмгольца и связанных с ним граничных задач посвящено большое количество работ. Некоторые применяемые подходы описаны в [1–12]. В работе [1] при исследовании акустических свойств решения граничной задачи Неймана с произвольными граничными условиями для уравнения Гельмгольца для прямоугольного клина использован метод блочного элемента. В настоящей работе исследуется граничная задача Дирихле с произвольными граничными условиями для того же уравнения. При использовании метода блочного элемента установлено, что особый интерес вызывает исследование совокупностей блочных элементов. Это позволяет выявлять новые свойства блочных структур. В настоящей работе выявляются новые закономерности для упакованных блочных элементов, а также их связь с дискретными топологическими пространствами.

Ниже рассмотрен пример сопряжения упакованных блочных элементов, имеющих носители в виде неограниченных клиновидных областей.

Применяя преобразование Фурье по параметру x_3 к дифференциальному уравнению и граничным условиям, получаем двумерное дифференциальное уравнение с параметром k^2 вида

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2)\, u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \qquad k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Используя один из способов касательного расслоения границы, после применения двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм получаем функциональные уравнения вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int\limits_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1}\, e^{i\alpha_2 x_2}\, dx_2 - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3)\, e^{i\alpha_2 x_2}\, dx_2 + \\ + \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}\, e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1 - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3)\, e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1,$$

где

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iiint\limits_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3)\, e^{i\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle}\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad \langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3.$$

Таким образом, граничная задача сведена к двумерной.

Правую часть функционального уравнения можно представить в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1}\, e^{i\alpha_2 x_2}\, dx_2 - i\alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{0} u(c, x_2, \alpha_3)\, e^{i\alpha_2 x_2}\, dx_2 + \\ + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}\, e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1 - i\alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{0} u(x_1, b, \alpha_3)\, e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1.$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можно представить функциональное уравнение в форме

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{\partial U(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1}-i\alpha_1U(0,\alpha_2,\alpha_3)+\\+\frac{\partial U(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}-i\alpha_2U(\alpha_1,0,\alpha_3). \qquad (2)$$

Здесь и далее для преобразований Фурье, обозначенных строчными буквами, будем использовать прописные буквы.

Рассмотрим задачу Дирихле. Подставляя в правую часть (2) значения функций (1), имеем

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{\partial U(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1}-i\alpha_1F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)+\\+\frac{\partial U(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}-i\alpha_2F_1(\alpha_1,0,\alpha_3).$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2=(\alpha_1-\alpha_{1-})(\alpha_1+\alpha_{1-})=(\alpha_2-\alpha_{2-})(\alpha_2+\alpha_{2-}),$$

$$\alpha_{1-}=-i\sqrt{\alpha_2^2-k^2},\qquad \alpha_{2-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-k^2},\qquad \operatorname{Im}\alpha_{1-}\leqslant 0,\qquad \operatorname{Im}\alpha_{2-}\leqslant 0.$$

Из условия автоморфизма для носителя и функций на нем следуют псевдодифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial U(0,\alpha_{2-},\alpha_3)}{\partial x_1}-i\alpha_1F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3)+\frac{\partial U(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}-i\alpha_{2-}F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)=0,$$

$$\frac{\partial U(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1}-i\alpha_{1-}F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)+\frac{\partial U(\alpha_{1-},0,\alpha_3)}{\partial x_2}-i\alpha_2F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)=0.$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции $\partial U(0,\alpha_{2-},\alpha_3)/\partial x_1$, $\partial U(\alpha_{1-},0,\alpha_3)/\partial x_2$, $\partial U(0,\alpha_2,\alpha_3)/\partial x_1$, $\partial U(\alpha_1,0,\alpha_3)/\partial x_2$. Из решения псевдодифференциальных уравнений, обращающегося в нуль вне области Ω_1, в результате преобразований получаем функциональное уравнение следующего вида:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)-F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)]\,(\alpha_2-\alpha_{2-})+\\+[F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3)-F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)]\,(\alpha_1-\alpha_{1-}).$$

Тогда решение, представляющее собой упакованный блочный элемент, принимает вид

$$u(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{R^3}U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\langle\boldsymbol{\alpha x}\rangle}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

$$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{i}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2}\big\langle[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)-F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)]\,(\alpha_2-\alpha_{2-})+\\+[F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3)-F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)]\,(\alpha_1-\alpha_{1-})\big\rangle.$$

Для осуществления сопряжения упакованных блочных элементов аналогично построим еще один упакованный блочный элемент, имеющий носитель в области Ω_2.

Используем алгоритм внешнего анализа для построения решения $w(x_1, x_2, x_3)$ граничной задачи для уравнения Гельмгольца в указанной области:

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2)\, w(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \qquad k^2 = p^2 - \alpha_3^2,$$
$$w(0, x_2, x_3) = f_4(x_2, x_3), \qquad w(x_1, 0, x_3) = f_3(x_1, x_3).$$

После выполнения описанного выше алгоритма получаем представление решения в форме упакованного блочного элемента:

$$w(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\ \mathrm{e}^{-i\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle}\ d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3,$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2} \big\langle [F_3(\alpha_{1+}, 0, \alpha_3) - F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3)]\, (\alpha_2 - \alpha_{2-}) +$$
$$+ [F_4(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_4(0, \alpha_2, \alpha_3)]\, (\alpha_1 - \alpha_{1+})\big\rangle.$$

Основное свойство построенных упакованных блочных элементов. Докажем, что в результате сопряжения построенных упакованных блочных элементов образуется упакованный блочный элемент той же граничной задачи с носителем, являющимся объединением носителей сопрягаемых блочных элементов. Наличие угловых точек границ носителей блочных элементов не приводит к затруднениям при сопряжении этих элементов. Таким образом, решение граничной задачи в полупространстве разложено на топологическую дискретную сумму построенных блочных элементов. Требуя на вертикальных и горизонтальных границах блочных элементов выполнения соотношений эквивалентности, определяющих слияние границ носителей и совпадение на них напряжений и перемещений, получаем выражения

$$F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) = F_4(0, \alpha_2, \alpha_3), \qquad F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) + F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3) = F(\alpha_1, 0, \alpha_3).$$

Используя эти выражения, а также свойства факторизованных функций, получаем упакованный блочный элемент в полупространстве

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$
$$= \frac{i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2} \big\langle [F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)](\alpha_2 - \alpha_{2-}) +$$
$$+ [F_3(\alpha_{1+}, 0, \alpha_3) - F_3(\alpha_1, 0, \alpha_3)]\, (\alpha_2 - \alpha_{2-})\big\rangle = -\frac{i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2}\, F(\alpha_1, 0, \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_{2-}).$$

Для проверки построим решение той же граничной задачи

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2) v(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \qquad k^2 = p^2 - \alpha_3^2, \qquad x_2 \leqslant 0,$$
$$v(x_1, 0, \alpha_3) = f(x_1, 0, \alpha_3), \qquad |x_1| \leqslant \infty$$

в области Ω, используя как метод блочного элемента, так и метод интегральных преобразований. Повторяя описанную выше процедуру метода блочного элемента для этой граничной задачи, получаем решение в форме упакованного блочного элемента

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2}\, F(\alpha_1, 0, \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_{2-}),$$

$$v(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, \mathrm{e}^{-i\langle \boldsymbol{\alpha x}\rangle}\ d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3,$$

совпадающее с найденным выше решением.

Распакуем блочный элемент для $x_2 \leqslant 0$, вычислив интеграл по вычету:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2}\, F(\alpha_1,0,\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_{2-})\,\mathrm{e}^{-i\alpha_2 x_2}\, d\alpha_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\alpha_2-\alpha_{2+}}\, F(\alpha_1,0,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_2 x_2}\, d\alpha_2 = -2\pi F(\alpha_1,0,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_{2+} x_2}, \qquad x_2 \leqslant 0.$$

Таким образом, получаем

$$v(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} F(\alpha_1,0,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_{2+}x_2+\alpha_3 x_3)}\, d\alpha_1\, d\alpha_3.$$

Решим ту же задачу, применив преобразование Фурье по x_1:

$$(-\alpha_1^2+\partial^2 x_2+k^2)V(\alpha_1,x_2,\alpha_3) = 0, \qquad V(\alpha_1,0,\alpha_3) = F(\alpha_1,0,\alpha_3).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$V(\alpha_1,x_2,\alpha_3) = F(\alpha_1,0,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_{2+}x_2}$$

и совпадает с решением, представляющим собой распакованный блочный элемент.

Выводы. Таким образом, упакованные блочные элементы представляют собой топологическую дискретизацию решения граничной задачи в полупространстве и образуют дискретное топологическое пространство [20]. Указанное свойство справедливо для граничных задач, поставленных в областях с кусочно-гладкими границами для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами или их систем. Этот результат может быть использован при проектировании композиционных материалов, в том числе с мозаичной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.** К проблеме исследования акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область в виде трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610.
2. **Ткачева Л. А.** Колебания плавающей упругой пластины при периодических смещениях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 166–179.
3. **Ткачева Л. А.** Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 136–145.
4. **Ткачева Л. А.** Поведение плавающей упругой пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 98–108.
5. **Ткачева Л. А.** Взаимодействие поверхностных и изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 158–170.
6. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
7. **Бабич В. М.** О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 4. С. 577–630.
8. **Бабич В. М.** Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. М.: Наука, 1972.
9. **Cerveny V.** Rey method in seismology / V. Cerveny, I. A. Molotkov, I. Psencik. Praha: Univ. Karlova, 1977.

10. **Мухина И. В.** Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 4. С. 667–671.
11. **Молотков Л. А.** Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001.
12. **Беркович В. Н.** К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // Докл. АН. 1990. Т. 314, № 1. С. 172–176.
13. **Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.** On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech. 2018. V. 229, N 5. P. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0.
14. **Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.** On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229, N 6. DOI: 10.1007/s00707-018-2255-7.
15. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.** Метод блочного элемента в теории трещин нового типа // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 77–80. DOI: 10.31857/S2686740020030050.
16. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
17. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
18. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
19. **Голованов Н. Н.** Компьютерная геометрия / Н. Н. Голованов, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко. М.: Академия, 2006.
20. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Рядчиков И. В.** Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014.

Поступила в редакцию 17/VI 2020 г.,
после доработки — 25/IX 2020 г.
Принята к публикации 28/IX 2020 г.