

УДК 502/504:630\*53:54

## ПОСТРОЕНИЕ БОНИТЕТНОЙ ШКАЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО ПОДХОДА

**А. В. Лебедев, В. В. Кузьмичев**

*Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К. А. Тимирязева  
127550, Москва, ул. Тимирязевская, 49*

E-mail: avl1993@mail.ru

*Поступила в редакцию 19.08.2021 г.*

Основой прогноза роста древостоев являются бонитетные шкалы. Расширение знаний о процессах функционирования лесных экосистем, характере изменений морфолого-таксационных показателей деревьев и древостоев, их взаимосвязей и взаимообусловленностей и создание более пригодного для описания биологических процессов математического аппарата и соответствующего программного обеспечения формируют предпосылки для постановки и решения проблемы прогноза роста древостоев на более высоком методическом уровне. Цель работы – дать оценку прогностической способности уравнений роста, полученных с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода (GADA), для описания хода роста древостоев по средней высоте и построения бонитетной шкалы. Данными для исследования послужили общие таблицы хода роста полных (нормальных) сосновых древостоев Северной Евразии. В общей сложности анализируются 25 уравнений, полученных с помощью подхода GADA. Сравнительный анализ показал, что наилучшее качество выравнивания данных обеспечивает уравнение, основанное на функции Митчерлиха (известной также как Дракина – Вуевского, Чапмана – Ричардса) с заменой параметров, отвечающих за предельные значения высоты и форму кривой. Данная модель полиморфна, имеет форму сигмовидной кривой и переменные асимптоты, т. е. учитывает большинство предъявляемых свойств к моделям хода роста по высоте. Ошибки модели зависят от временного интервала прогнозирования и уровня производительности древостоя. С увеличением срока прогнозирования происходит увеличение ошибки. Для всех интервалов дальности прогноза получено значение средней абсолютной ошибки, не превышающее 2.01 %. Наибольшей средней абсолютной ошибкой прогноза (1.1–2.2 %) характеризуются крайние классы бонитета ( $I^b$ ,  $V$ ,  $V^a$  и  $V^b$ ). Рассмотренная в исследовании методика может быть применена для разработки моделей хода роста таксационных показателей других лесообразующих пород России.

**Ключевые слова:** ход роста древостоев, средняя высота, динамические уравнения.

DOI: 10.15372/SJFS20220306

### ВВЕДЕНИЕ

Вследствие долговечности древесных пород лесоводы вынуждены составлять планы ведения хозяйства на долгосрочную перспективу, охватывающую период от возникновения древостоя до его спелости (возраста, когда он удовлетворяет цели ведения хозяйства и может быть включен в хозяйственное использование). Однако в последние десятилетия произошли существенные изменения, касающиеся принципиальных основ этого планирования. Пришло понимание плане-

тарной роли леса, многообразия выполняемых им защитных функций, в связи с чем лесосырьевая функция была признана второстепенной. Для лесов защитного назначения понятие хозяйственной спелости потеряло смысл, важным становится период достаточно полного выполнения древостоями защитных функций (Лебедев, 2019; Дубенок и др., 2020). Но при любых целях ведения хозяйства необходимым звеном планирования остается прогноз роста всего разнообразия древостоев, учтенных в процессе инвентаризации отдельных хозяйственных единиц.

Методы прогнозов роста древостоев постоянно совершенствовались, но в настоящее время наблюдаются их коренные изменения. В первую очередь это связано с необходимостью учитывать влияние на рост леса климатических изменений (особенно проявившихся в последние 50 лет), чего раньше не делали. Затем происходят хотя и медленные, но заметные изменения продуктивности местообитаний. Несколько расширились знания процессов функционирования лесных экосистем, характера изменений в ходе роста морфолого-таксационных показателей деревьев и древостоев, их взаимосвязей и взаимобусловленностей. Создаются более пригодный для описания биологических процессов математический аппарат и соответствующее программное обеспечение, возникают предпосылки для постановки и решения проблемы прогноза роста древостоев на более высоком методическом уровне.

Основой прогноза роста древостоев на протяжении более 100 лет остаются бонитетные шкалы, отражающие жесткий характер изменений средних высот древостоев с увеличением возраста. Их недостатки отмечаются на протяжении многих лет (Кузьмичев, 1977, 2013; Хлюстов, Лебедев, 2017), но пути совершенствования этого подхода (или его изменения) не вполне очевидны. Наиболее приемлемым считается анализ хода роста в высоту нескольких наиболее крупных деревьев (в возрасте замедления прироста) для разных местообитаний, усреднение их линий роста по каждому местообитанию и построение согласованной шкалы верхних высот (новой шкалы бонитетов). Эти деревья восприняли все климатические и эдафические изменения условий роста, но будущие изменения они отразить, разумеется, не могут. Через несколько десятилетий потребуются повторение подобной процедуры и сравнение результатов для определения темпов изменения условий роста. Второй путь заключается в сопоставлении средних высот древостоев в разных местообитаниях, полученных на постоянных пробных площадях. Но малое количество таких наблюдений ограничивает возможности использования этого варианта.

Цель работы – дать оценку прогностической способности моделей роста, инвариантных относительно базового возраста, полученных с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода для описания хода роста древостоев по средней высоте и построения бонитетной шкалы.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Данными для исследования послужили общие таблицы хода роста (ТХР) полных (нормальных) сосновых древостоев (Швиденко и др., 2008). Значения средних высот представлены в диапазоне возрастов от 10 до 200 лет и классов бонитета от I<sup>b</sup> до V<sup>b</sup>. Для анализа отобранные данные были случайным образом разделены в соотношении 7 : 3 на обучающую выборку, которая использовалась для подгонки модели, и тестовую для проверки обобщающей способности.

В исследовании используется обобщенный алгебраический разностный подход (GADA) для моделирования связи средней высоты с возрастом древостоя. Метод GADA позволяет варьировать несколько параметров базовой функции роста и получать полиморфные кривые, специфичные для каждого уровня производительности древостоя. Это происходит при выполнении условия, что с помощью некоторого алгебраического преобразования все варьируемые параметры могут быть выражены как функция фиксированных или глобальных параметров и только одного изменяющегося параметра (Cieszewski, 2003). Метод предполагает выполнение следующих шагов (Cieszewski et al., 2007):

- 1) выбор базовой функции роста для моделирования изучаемой переменной (в данном случае средняя высота  $H$ );
- 2) принятие решения, какие параметры базового уравнения будут соотноситься с переменной меры производительности древостоя ( $X$ ), и выражение этой связи математическим уравнением;
- 3) решение уравнения для  $X$ ;
- 4) получение динамической трехмерной модели «производительность – возраст – средняя высота» в форме  $H = f(t, t_0, H_0)$  путем подстановки решения  $X$  в уравнение  $H = f(t, X)$  для начальных условий  $t_0$  и  $H_0$ .

В работе рассмотрены случаи как с одним параметром базовой модели, связанным с  $X$ , так и с двумя. Когда только один параметр связан с  $X$ , то GADA является эквивалентным методу алгебраического разностного подхода (ADA), который в числе первых был использован для получения уравнений, описывающих динамику роста (Bailey, Clutter, 1974). Метод ADA успешно использовался в моделировании динамики древостоев (Tomé, 1989; Elfving, Kiviste, 1997; Amaro et al., 1998).

В общей сложности проанализированы 25 уравнений, полученных с помощью подхода GADA (Cieszewski, Bailey, 2000) (табл. 1).

**Таблица 1.** Уравнения роста древостоев по высоте

Id	Преобразование параметров	Решение для $X$ с начальными значениями ( $y_0, t_0$ )	Динамическое уравнение
1	2	3	4
Richards (1959) $y = a(1 - \exp(-bt))^c$			
R1	$a = X$	$X_0 = \frac{y_0}{(1 - \exp(-bt_0))^c}$	$y = y_0 \left( \frac{1 - \exp(-bt)}{1 - \exp(-bt_0)} \right)^c$
R2	$b = X$	$X_0 = \frac{-\ln \left( 1 - \left( \frac{y_0}{a} \right)^{\frac{1}{c}} \right)}{t_0}$	$y = a \left( 1 - \left( 1 - \left( \frac{y_0}{a} \right)^{\frac{1}{c}} \right)^{\frac{t}{t_0}} \right)^c$
R3	$c = X$	$X_0 = \frac{\ln \left( \frac{y_0}{a} \right)}{\ln(1 - \exp(-bt_0))}$	$y = a \left( \frac{y_0}{a} \right)^{\frac{\ln(1 - \exp(-bt))}{\ln(1 - \exp(-bt_0))}}$
R4	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + c_2 X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0) - c_1 F_0}{1 + c_2 F_0},$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = \exp(X_0) (1 - \exp(-bt))^{c_1 + c_2 X_0}$
R5	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + \frac{c_2}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left( \ln(y_0) - c_1 F_0 + ((\ln(y_0) - c_1 F_0)^2 - 4c_2 F_0)^{\frac{1}{2}} \right),$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = y_0 \left( \frac{1 - \exp(-bt)}{1 - \exp(-bt_0)} \right)^{c_1 + \frac{c_2}{X_0}}$
R6	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left( \ln(y_0) - c_1 F_0 + ((c_1 F_0 - \ln(y_0))^2 - 4F_0)^{\frac{1}{2}} \right),$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = \exp(X_0) (1 - \exp(-bt))^{c_1 + \frac{1}{X_0}}$
R7	$a = \exp(a_1 X),$ $c = c_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{\ln(y_0)}{a_1 + F_0},$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = \exp(a_1 X_0) (1 - \exp(-bt))^{c_1 + \frac{1}{X_0}}$
Lundqvist (1957) $y = a \exp(-bt^{-c})$			
L1	$a = X$	$X_0 = \frac{y_0}{\exp(-bt_0^{-c})}$	$y = y_0 \exp(b(t_0^{-c} - t^{-c}))$
L2	$b = X$	$X_0 = \frac{-\ln \left( \frac{y_0}{a} \right)}{t_0^{-c}}$	$y = a \left( \frac{h_0}{a} \right)^{\left( \frac{t_0}{t} \right)^c}$
L3	$a = \exp(X),$ $b = b_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-c} \left( b_1 + t_0^{-c} \ln(y_0) + \sqrt{4t_0^{-c} + (-b_1 - t_0^{-c} \ln(y_0))^2} \right)$	$y = \exp(X_0) \exp \left( - \left( b_1 + \left( \frac{1}{X_0} \right) \right) t^{-c} \right)$
L4	$a = \exp(X),$ $b = b_1 + \frac{b_2}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-c} \left( b_1 + t_0^{-c} \ln(y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{-c} + (-b_1 - t_0^{-c} \ln(y_0))^2} \right)$	$y = \exp(X_0) \exp \left( - \left( b_1 + \left( \frac{b_2}{X_0} \right) \right) t^{-c} \right)$
L5	$a = \exp(a_1 X),$ $b = X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0)}{a_1 - t_0^{-c}}$	$y = \exp(a_1 X_0) \exp(-X_0 t^{-c})$

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822) $y = \frac{t^2}{a + bt + ct^2}$			
H1	$a = X$	$X_0 = \left( \frac{t_0^2}{y_0} \right) - bt_0 - ct_0^2$	$y = y_0 \frac{t^2}{t_0^2 + y_0(b(t-t_0) + c(t^2 - t_0^2))}$
H2	$b = X$	$X_0 = \left( \frac{t_0}{y_0} \right) - \frac{a}{t_0} - ct_0$	$y = y_0 \frac{t}{t_0 + y_0(a(t^{-1} - t_0^{-1}) + c(t - t_0))}$
H3	$c = X$	$X_0 = \left( \frac{1}{y_0} \right) - at_0^{-2} - bt_0^{-1}$	$y = y_0 \frac{1}{1 + y_0(a(t^{-2} - t_0^{-2}) + b(t^{-1} - t_0^{-1}))}$
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822) $y = \frac{bt^c}{t^c + a}$			
H4	$a = \frac{a_1}{X},$ $b = b_1 + X$	$X_0 = y_0 - a_1 + \left( (y_0 - a_1)^2 + \frac{2y_0 \exp(b_1)}{t_0^c} \right)^{\frac{1}{2}}$	$y = y_0 \frac{t^c (t_0^c X_0 + \exp(b_1))}{t_0^c (t^c X_0 + \exp(b_1))}$
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822) $y = \frac{t^c}{b + at^c}$			
H5	$a = X,$ $b = b_1 X$	$X_0 = \frac{t_0^c}{b_1 + t_0^c}$	$y = \frac{t^c}{X_0 (b_1 + t^c)}$
Cieszewski (2003) $y^3 = \frac{bt^c}{t^{c-1} + a}$			
C1	$a = \frac{a_1}{2X},$ $b = b_1 + X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left( y_0^3 t^{-1} - b_1 + ((y_0^3 t^{-1} - b_1)^2 + 2a_1 y_0^3 t^{-c})^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = y_0 \left( \frac{t^c (t_0^{c-1} X_0 + a_1)}{t_0^c (t^{c-1} X_0 + a_1)} \right)^{\frac{1}{3}}$
Cieszewski и Bella (1989) $y = \frac{a}{1 + bt^{-c}}$			
C2	$a = a_1 + X,$ $b = b_1 X$	$X_0 = \frac{y_0 - a_1}{1 - b_1 y_0 t_0^{-c}}$	$y = \frac{a_1 + X_0}{1 + b_1 X_0 t^{-c}}$
C3	$a = a_1 + X,$ $b = \frac{b_1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left( y_0 - a_1 + ((y_0 - a_1)^2 + 4b_1 y_0 t_0^{-c})^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = \frac{a_1 + X_0}{1 + \frac{b_1}{X_0} t^{-c}}$
C4	$b = X$	$X_0 = \frac{a - y_0}{y_0 t_0^{-c}}$	$y = \frac{a}{1 - \left( 1 - \frac{a}{y_0} \right) \left( \frac{t_0}{t} \right)^c}$
Schumacher (1939) $\ln(y) = a + bt^c$			
S1	$a = X,$ $b = \frac{b_1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left( \ln(y_0) + (\ln^2(y_0) - 4b_1 t_0^{-c})^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = \exp \left( X_0 - \left( \frac{b_1}{X_0} \right) t^c \right)$

Окончание табл. 1

1	2	3	4
Weibull modified (Yang et al., 1978) $\ln(y) = a + b \ln(1 - \exp(1 - \exp(-t^c)))$			
W1	$a = X,$ $b = b_1 + b_2 X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0) - b_1 \ln(1 - \exp(-t_0^{-c}))}{1 + b_2 \ln(1 - \exp(-t_0^{-c}))}$	$y = \exp(X_0 + (b_1 + b_2 X_0) \ln(1 - \exp(-t^c)))$
Gompertz modified (Jarosz and Klapéc, 2002) $y = a \exp(-b \exp(-ct)) + d$			
G1	$a = X,$ $d = -d_1 X - d_2$	$X_0 = \exp(-b \exp(-ct)),$ $X_1 = \exp(-b \exp(-ct_0))$	$y = \frac{X_0(d_2 + y_0) - d_1 y_0 - d_2 X_1}{X_1 - d_1}$
Korsuñ (1935) $y = a \exp(b \ln(t) + c \ln^2 t)$			
K1	$a = X$	$X_0 = \frac{y_0}{\exp(b \ln(t_0) + c \ln^2(t_0))}$	$X_0 = \frac{y_0 \exp(b \ln(t) + c \ln^2 t_0)}{\exp(b \ln(t_0) + c \ln^2(t_0))}$

Примечание.  $y$  – предсказанная по модели средняя высота в возрасте  $t$ ;  $y_0$  – начальное значение средней высоты в возрасте  $t_0$ ;  $X, F$  – вспомогательные переменные;  $a, b, c, d$  – параметры модели.

Для многих из них приводятся сравнительные оценки в литературных источниках (Nunes et al., 2011). Из рассматриваемых моделей четыре – анаморфные уравнения (R1, L1, H3 и H5), шесть – общие асимптотические полиморфные (R2, R3, L2, H1, H2 и C4) и остальные пятнадцать – полиморфные уравнения множественных асимптот.

Сравнение оценок для каждой из моделей основывалось на численном и графическом анализе остатков. Для каждого полученного уравнения рассчитывались следующие метрики, позволяющие судить о качестве модели:

– квадратный корень из среднеквадратической ошибки (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

– средний процент абсолютной ошибки (MAPE)

$$MAPE = 100 \times \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| / n,$$

– коэффициент детерминации ( $R^2$ )

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2},$$

– скорректированный коэффициент детерминации ( $R_{adj}^2$ )

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)},$$

– информационный критерий Акаике (AIC)

$$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

– информационный критерий Байеса (BIC)

$$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

где  $k$  – количество параметров модели;  $n$  – число наблюдений;  $y_i$  – фактическое значение;  $\hat{y}_i$  – предсказанное по модели значение.

Считается, что применение коэффициента детерминации и скорректированного коэффициента детерминации в нелинейных моделях имеет ряд недостатков, но их использование в качестве некоторой глобальной меры адекватности преодолевает имеющиеся ограничения (Ryan, 1997; Castedo-Dorado et al., 2007; Vargas-Larreta et al., 2013). Модель, для которой получены наибольшие значения коэффициентов детерминации и наименьшие значения информационных критериев, среднеквадратической ошибки и среднего процента абсолютной ошибки, признавалась в качестве лучшей. Кроме того, для полученных моделей проводился графический анализ кривых, так как их формы могут значительно различаться, даже несмотря на то что статистические данные о качестве моделей аналогичны (Neter et al., 1996). Анализ данных проводился с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2 и R 3.6.3 + lme4 1.1.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Итоговые оценки качества моделей показаны в табл. 2.

Наилучшее качество показала полиморфная модель с множеством асимптот R4, основанная на функции Митчерлиха. Для нее на тестовой

Таблица 2. Итоговые оценки качества моделей

Id	Обучающая выборка						Тестовая выборка					
	RMSE	MAPE	$R^2$	$R^2_{adj}$	AIC	BIC	RMSE	MAPE	$R^2$	$R^2_{adj}$	AIC	BIC
R1	1.818	8.279	0.972	0.972	1142.4	1152.1	1.885	8.783	0.969	0.969	521.5	529.5
R2	2.304	10.086	0.955	0.955	1593.1	1602.8	2.974	9.467	0.924	0.923	893.4	901.4
R3	3.513	14.059	0.895	0.894	2396.3	2406.1	3.518	13.300	0.893	0.893	1030.5	1038.5
<b>R4</b>	<b>0.322</b>	<b>1.135</b>	<b>0.999</b>	<b>0.999</b>	<b>-2152.6</b>	<b>-2138.0</b>	<b>0.322</b>	<b>1.146</b>	<b>0.999</b>	<b>0.999</b>	<b>-918.8</b>	<b>-906.8</b>
<b>R5</b>	<b>0.344</b>	<b>1.565</b>	<b>0.999</b>	<b>0.999</b>	<b>-2025.9</b>	<b>-2011.3</b>	<b>0.351</b>	<b>1.639</b>	<b>0.999</b>	<b>0.999</b>	<b>-848.9</b>	<b>-836.8</b>
R6	1.335	5.957	0.985	0.985	553.6	563.3	1.362	6.248	0.984	0.984	255.9	264.0
R7	4.180	17.598	0.851	0.850	2727.5	2737.2	4.406	18.640	0.833	0.832	1214.0	1222.0
L1	2.151	9.294	0.960	0.960	1462.2	1472.0	2.286	10.495	0.955	0.955	678.6	686.6
L2	5.109	17.264	0.777	0.777	3109.3	3119.0	5.433	18.942	0.746	0.744	1385.1	1393.1
L3	9.678	32.293	0.200	0.198	4325.9	4335.6	9.825	34.374	0.168	0.164	1868.5	1876.5
L4	2.894	12.725	0.928	0.928	2029.2	2043.7	3.040	12.245	0.920	0.920	913.3	925.4
L5	4.369	18.157	0.837	0.837	2811.7	2821.4	4.657	19.709	0.813	0.812	1259.4	1267.4
H1	5.245	26.563	0.765	0.764	3159.3	3169.1	5.173	26.235	0.769	0.768	1345.0	1353.1
H2	1.600	7.367	0.978	0.978	898.4	908.1	1.413	6.553	0.983	0.983	286.3	294.3
H3	6.137	24.309	0.678	0.678	3458.3	3468.1	6.344	25.541	0.653	0.652	1511.5	1519.6
<b>H4</b>	<b>0.563</b>	<b>2.695</b>	<b>0.997</b>	<b>0.997</b>	<b>-1086.7</b>	<b>-1072.1</b>	<b>0.544</b>	<b>2.669</b>	<b>0.997</b>	<b>0.997</b>	<b>-490.5</b>	<b>-478.5</b>
H5	1.870	8.352	0.970	0.970	1196.1	1205.8	1.955	9.109	0.967	0.967	551.1	559.1
C1	1.893	7.994	0.969	0.969	1221.1	1235.6	1.998	8.985	0.966	0.965	570.9	582.9
C2	1.870	8.353	0.970	0.970	1198.3	1212.8	1.955	9.110	0.967	0.967	553.2	565.2
<b>C3</b>	<b>0.563</b>	<b>2.695</b>	<b>0.997</b>	<b>0.997</b>	<b>-1086.7</b>	<b>-1072.1</b>	<b>0.544</b>	<b>2.669</b>	<b>0.997</b>	<b>0.997</b>	<b>-490.5</b>	<b>-478.5</b>
C4	4.771	16.198	0.805	0.805	2979.3	2989.0	5.084	17.680	0.777	0.776	1330.8	1338.9
S1	5.893	25.974	0.703	0.703	3381.4	3391.1	5.600	22.986	0.730	0.729	1409.8	1417.8
<b>W1</b>	<b>0.753</b>	<b>2.945</b>	<b>0.995</b>	<b>0.995</b>	<b>-533.0</b>	<b>-518.4</b>	<b>0.840</b>	<b>3.133</b>	<b>0.994</b>	<b>0.994</b>	<b>-136.7</b>	<b>-124.6</b>
G1	0.823	3.706	0.994	0.994	-362.2	-342.8	0.858	3.801	0.994	0.994	-116.7	-100.7
K1	1.894	8.448	0.969	0.969	1219.8	1229.5	1.968	9.197	0.967	0.966	556.6	564.6

выборке  $RMSE = 0.322$ ,  $MAPE = 1.146$ ,  $R^2 = 0.999$ ,  $R^2_{adj} = 0.999$ ,  $AIC = -918.8$ ,  $BIC = -906.8$ . Также хорошее качество подгонки показали модели R5, H4, C3 и W1. На тестовой выборке были получены следующие метрики: для R5 –  $RMSE = 0.351$ ,  $MAPE = 1.639$ ,  $R^2 = 0.999$ ,  $R^2_{adj} = 0.999$ ,  $AIC = -848.9$ ,  $BIC = -836.8$ , для H4 и C3 –  $RMSE = 0.544$ ,  $MAPE = 2.669$ ,  $R^2 = 0.997$ ,  $R^2_{adj} = 0.997$ ,  $AIC = -490.5$ ,  $BIC = -478.5$  и для W1 –  $RMSE = 0.840$ ,  $MAPE = 3.113$ ,  $R^2 = 0.994$ ,  $R^2_{adj} = 0.994$ ,  $AIC = -136.7$ ,  $BIC = -124.6$ . В целом по показателю  $R^2$  16 из 25 моделей (64 %) позволяют объяснить более 90 % вариации зависимой переменной.

Оценки параметров для каждой модели, включая их стандартные ошибки и статистическую значимость, показаны в табл. 3.

Статистически незначимые оценки параметров (при  $p < 0.05$ ) получены только для моделей L2 и L3. При этом данные модели показали одни из худших значений метрик качества. Для модели L2 на тестовой выборке  $RMSE = 5.443$ ,

$MAPE = 18.942$ ,  $R^2 = 0.746$ ,  $R^2_{adj} = 0.744$ ,  $AIC = 1385.1$  и  $BIC = 1393.1$ , а для модели L3 –  $RMSE = 9.825$ ,  $MAPE = 34.374$ ,  $R^2 = 0.168$ ,  $R^2_{adj} = 0.164$ ,  $AIC = 1868.5$  и  $BIC = 1876.5$ .

С учетом метрик качества, оценок параметров и их статистической значимости, результатов графического анализа остатков в качестве лучшей модели хода роста по средней высоте следует считать R4. Во многих исследованиях (Seki, Sakici, 2017; Allen II et al., 2020), как и в нашем случае, отдается предпочтение уравнениям хода роста по высоте, полученным из ростовой функции Митчерлиха. Стоит отметить, что применяемые в работе исходные данные таблиц хода роста изначально были выравнены с применением этой ростовой функции. При использовании данных повторных наблюдений на постоянных пробных площадях или анализа древесных стволов лучший результат могут обеспечить уравнения роста по высоте, основанные на иных базовых функциях (Nunes et al., 2011).

**Таблица 3.** Оценки параметров и их статистическая значимость

Id	Параметр	Оценка	Стандартная ошибка	t-Статистика	p-Value
1	2	3	4	5	6
R1	$b$	1.929E-02	2.616E-04	7.375E+01	< 2e-16
	$c$	1.240E+00	9.912E-03	1.251E+02	< 2e-16
R2	$a$	4.100E+01	3.400E-01	1.206E+02	< 2e-16
	$c$	9.368E-01	8.956E-03	1.046E+02	< 2e-16
R3	$a$	9.279E+01	5.533E+00	1.677E+01	< 2e-16
	$b$	1.067E-03	1.196E-04	8.920E+00	< 2e-16
R4	$b$	1.952E-02	5.433E-05	3.593E+02	< 2e-16
	$c_1$	2.957E+00	1.405E-02	2.104E+02	< 2e-16
	$c_2$	-4.793E-01	3.834E-03	-1.250E+02	< 2e-16
R5	$b$	1.965E-02	5.721E-05	3.435E+02	< 2e-16
	$c_1$	-1.337E-01	1.233E-02	-1.084E+01	< 2e-16
	$c_2$	4.920E+00	4.409E-02	1.116E+02	< 2e-16
R6	$b$	1.913E-02	1.977E-04	9.678E+01	< 2e-16
	$c_1$	9.546E-01	7.570E-03	1.261E+02	< 2e-16
R7	$a_1$	3.138E+00	4.715E-02	6.656E+01	< 2e-16
	$b$	1.825E-02	5.091E-04	3.585E+01	< 2e-16
L1	$b$	9.414E+00	1.344E-01	7.002E+01	< 2e-16
	$c$	5.278E-01	8.163E-03	6.466E+01	< 2e-16
L2	$a$	4.594E-09	1.363E-07	3.371E-02	9.731E-01
	$c$	-2.645E-02	1.529E-02	-1.730E+00	8.392E-02
L3	$b_1$	-6.284E+00	2.079E+01	-3.023E-01	7.625E-01
	$c$	-3.829E-03	1.079E-02	-3.549E-01	7.227E-01
L4	$b_1$	1.943E+01	7.653E-01	2.539E+01	< 2e-16
	$b_2$	-1.425E+01	9.326E-02	-1.528E+02	< 2e-16
	$c$	2.918E-02	8.792E-04	3.319E+01	< 2e-16
L5	$a_1$	5.267E-01	1.445E-02	3.645E+01	< 2e-16
	$c$	4.706E-01	1.348E-02	3.492E+01	< 2e-16
H1	$b$	8.696E-01	1.615E-01	5.386E+00	9.103E-08
	$c$	2.731E-02	9.552E-04	2.859E+01	< 2e-16
H2	$a$	1.127E+01	3.426E-01	3.290E+01	< 2e-16
	$c$	2.169E-02	1.625E-04	1.335E+02	< 2e-16
H3	$a$	4.968E+00	3.117E-01	1.594E+01	< 2e-16
	$b$	1.192E+00	2.980E-02	4.000E+01	< 2e-16
H4	$a_1$	-1.136E+00	4.989E-01	-2.277E+00	2.300E-02
	$b_1$	9.821E+00	1.556E-02	6.313E+02	< 2e-16
	$c$	1.374E+00	3.517E-03	3.907E+02	< 2e-16
H5	$b_1$	1.952E+02	4.332E+00	4.506E+01	< 2e-16
	$c$	1.319E+00	9.237E-03	1.428E+02	< 2e-16
C1	$a_1$	2.691E+05	5.256E+04	5.120E+00	3.706E-07
	$b_1$	-4.361E+01	6.019E+00	-7.245E+00	8.922E-13
	$c$	3.172E+00	3.655E-02	8.678E+01	< 2e-16
C2	$a_1$	-5.144E+05	4.458E-14	-1.154E+19	< 2e-16
	$b_1$	3.794E-04	8.425E-06	4.503E+01	< 2e-16
	$c$	1.319E+00	9.243E-03	1.427E+02	< 2e-16
C3	$a_1$	-1.136E+00	4.989E-01	-2.277E+00	2.300E-02
	$b_1$	9.208E+03	1.432E+02	6.428E+01	< 2e-16
	$c$	1.374E+00	3.517E-03	3.907E+02	< 2e-16
C4	$a$	-3.156E+09	9.398E-21	-3.358E+29	< 2e-16
	$c$	5.906E-01	6.013E-03	9.822E+01	< 2e-16

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6
S1	$b_1$	-6.018E+01	4.761E+00	-1.264E+01	< 2e-16
	$c$	-1.113E+00	2.441E-02	-4.559E+01	< 2e-16
W1	$b_1$	3.913E+01	4.805E-01	8.144E+01	< 2e-16
	$b_2$	-6.442E+00	1.274E-01	-5.057E+01	< 2e-16
	$c$	2.813E-01	7.937E-04	3.544E+02	< 2e-16
G1	$b$	6.361E-01	4.997E-02	1.273E+01	< 2e-16
	$c$	2.036E-02	3.326E-04	6.122E+01	< 2e-16
	$d_1$	5.036E-01	2.884E-02	1.746E+01	< 2e-16
	$d_2$	2.831E+00	6.855E-02	4.130E+01	< 2e-16
K1	$b$	2.176E+00	2.013E-02	1.081E+02	< 2e-16
	$c$	-1.907E-01	2.508E-03	-7.604E+01	< 2e-16

На рис. 1 показано сопоставление кривых хода роста по средней высоте, прогнозируемых по модели, с данными ТХР. Отклонения кривых, полученных по модели, от данных ТХР незначительны. Это подтверждается рис. 2, где отклонение между фактическими и прогнозируемыми значениями от диагональной прямой  $y = x$  минимальны.

Ошибки модели распределяются в зависимости от выбранного интервала прогнозирования и уровня производительности древостоя. Средняя абсолютная ошибка минимальна (0.60 %) при дальности прогноза 10 лет. С увеличением срока прогнозирования происходит увеличение ошибки. Для всех интервалов дальности прогноза получено значение средней абсолютной ошибки, не превышающее 2.01 % (рис. 3).

Наибольшие средние абсолютные ошибки были получены для  $I^b$  (1.29 %),  $V$  (1.51 %),  $V^a$  (2.21 %) и  $V^b$  (1.13 %) классов бонитета (рис. 4).

Модели роста древостоев, основанные на применении методологии GADA, рекомендуются во многих исследованиях, так как позволяют более реалистично передать процесс изменения таксационных показателей от возраста и имеют более гибкие оценки по сравнению с ранее разработанными моделями зависимости таксационных показателей от возраста древостоя (Cieszewski, Bailey, 2000; Cieszewski, 2002, 2003; Nunes et al., 2011; Ercanli et al., 2014).

В России разработано большое количество бонитетных шкал и их обобщений (Выводцев, 1984; Швиденко и др., 2008; Хлюстов, 2015) для

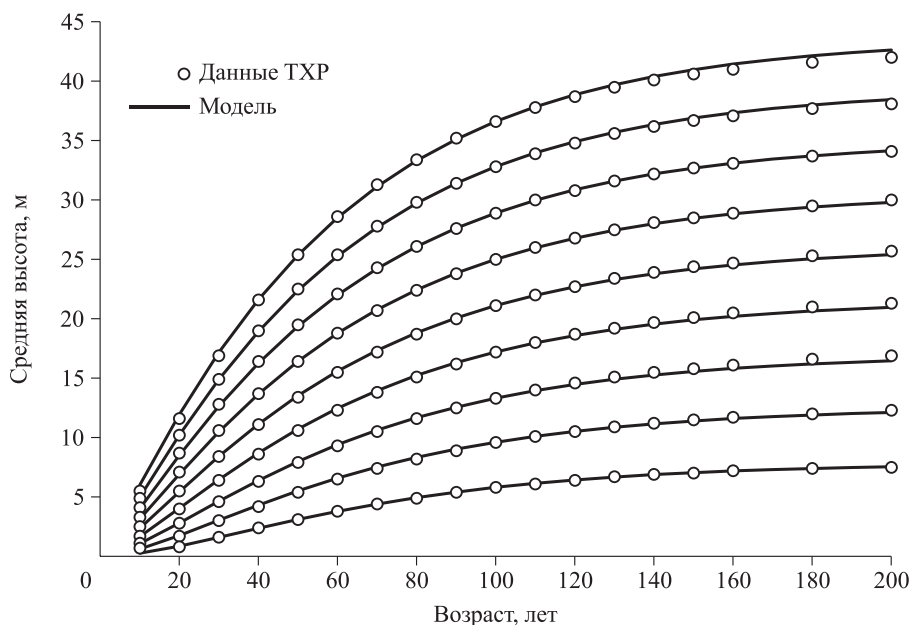


Рис. 1. Прогнозируемые по модели (R4) кривые хода роста сосновых древостоев ( $t_0 = 100$  лет).



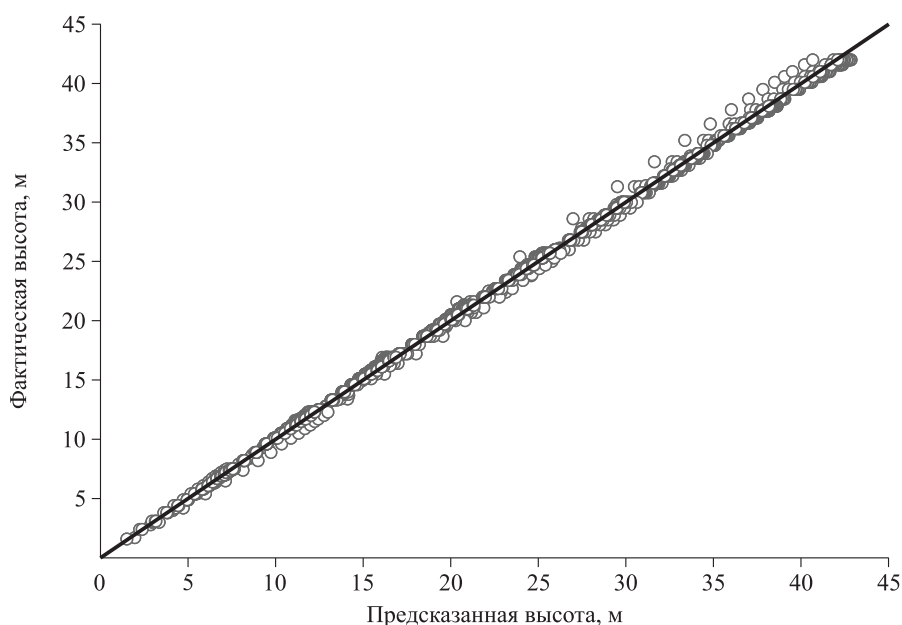


Рис. 2. Соответствие фактических и предсказанных по модели значений средней высоты.

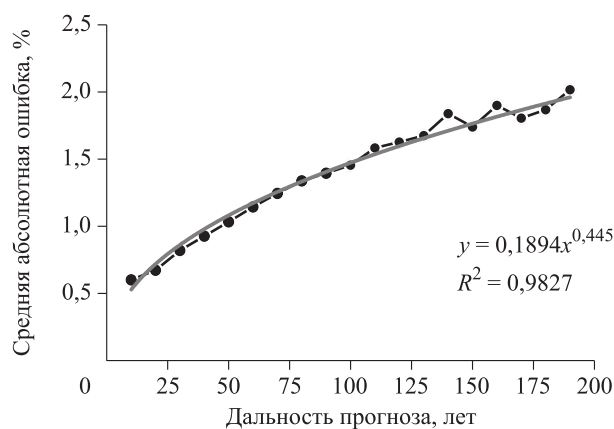


Рис. 3. Зависимость средней абсолютной ошибки от дальности прогноза.

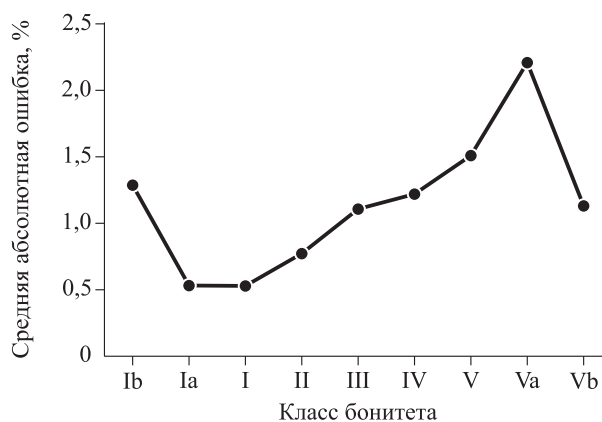


Рис. 4. Зависимость средней абсолютной ошибки от класса бонитета.

различных местообитаний и древесных пород. Для точной оценки производительности лесных участков необходимы новые бонитетные шкалы, инвариантные относительно базового возраста и основанные на более реалистичном описании процесса роста древостоев. Такие соотношения между высотой и возрастом, полученные с применением GADA, могут успешно применяться в имитационных моделях средних таксационных показателей древостоев (Hevia et al., 2013; Stankova, 2016; Allen II et al., 2020).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основанная на методологии GADA модель Митчерлиха (уравнение R4), разработанная в данном исследовании, полиморфна, имеет фор-

му S-образной кривой и переменные асимптоты, т. е. учитывает большинство предъявляемых свойств к моделям хода роста по высоте. Кроме того, данная модель инвариантна относительно базового возраста прогнозирования и напрямую оценивает ход роста и класс бонитета на основе любого значения средней высоты и возраста и обеспечивает последовательные прогнозы. Таким образом, она может быть рекомендована для оценки хода роста сосновых древостоев по средней высоте и класса бонитета сосновых древостоев. Рассмотренная в исследовании методика может быть применена для разработки моделей хода роста таксационных показателей других лесообразующих пород России, в том числе с привлечением рядов долговременных наблюдений на постоянных пробных площадях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Выводцев Н. В. Общие закономерности роста лиственничников Дальнего Востока: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. Красноярск: СибТИ, 1984. 21 с.
- Дубенок Н. Н., Кузьмичев В. В., Лебедев А. В. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в лесной опытной даче Тимирязевской сельскохозяйственной академии. М.: Наука, 2020. 382 с.
- Кузьмичев В. В. Закономерности роста древостоев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977. 160 с.
- Кузьмичев В. В. Закономерности динамики древостоев: принципы и модели. Новосибирск: Наука, 2013. 207 с.
- Лебедев А. В. Динамика продуктивности и средообразующих свойств древостоев в условиях городской среды (на примере лесной опытной дачи Тимирязевской академии): автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.03.02. СПб: СПбГЛТУ, 2019. 20 с.
- Хлюстов В. К. Комплексная оценка и управление древесными ресурсами: модели-нормативы-технологии. М.: РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева, 2015. Кн. 1. 389 с.
- Хлюстов В. К., Лебедев А. В. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования. Иркутск: Мегаринт, 2017. 328 с.
- Швиденко А. З., Щепаченко Д. Г., Нильсон С., Булуй Ю. И. Таблицы и модели хода роста и продуктивности насаждений основных лесообразующих пород Северной Евразии (нормативно-справочные материалы). Изд. 2-е, доп. М.: Междунар. ин-т приклад. систем. анализа, 2008. 886 с.
- Allen II M. G., Antón-Fernández C., Astrup R. A stand-level growth and yield model for thinned and unthinned managed Norway spruce forests in Norway // *Scand. J. For. Res.* 2020. V. 35. Iss. 5–6. P. 238–251.
- Amaro A., Reed D., Tomé M., Themido I. Modeling dominant height growth: Eucalyptus plantations in Portugal // *For. Sci.* 1998. V. 44. Iss. 1. P. 37–46.
- Bailey R. L., Clutter J. L. Base-age invariant polymorphic site curves // *For. Sci.* 1974. V. 20. Iss. 2. P. 155–159.
- Castedo-Dorado F., Diéguez-Aranda U., Barrio-Anta M., Álvarez-González J. G. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA // *Ann. For. Sci.* 2007. V. 64. P. 609–619.
- Cieszewski C. J. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes // *For. Sci.* 2002. V. 48. Iss. 1. P. 7–23.
- Cieszewski C. J. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function  $Y^3 = (ax^m)/(c + x^{m-1})$ , a simplified mixed model and scant subalpine fir data // *For. Sci.* 2003. V. 49. Iss. 4. P. 539–554.
- Cieszewski C. J., Bailey R. L. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes // *For. Sci.* 2000. V. 46. Iss. 1. P. 116–126.
- Cieszewski C. J., Bella I. E. Polymorphic height growth and site index curves for lodgepole pine in Alberta // *Can. J. For. Res.* 1989. V. 19. N. 9. P. 1151–1160.
- Cieszewski C. J., Strub M., Zasada M. New dynamic site equation that fits best the Schwappach data for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in Central Europe // *For. Ecol. Manag.* 2007. V. 243. Iss. 1. P. 83–93.
- Elfving B., Kiviste A. Construction of site index equations for *Pinus sylvestris* L. using permanent plot data in Sweden // *For. Ecol. Manag.* 1997. V. 98. Iss. 2–3. P. 125–134.
- Ercanli İ., Kahrman A., Yavuz H. Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands // *Turk. J. Agr. For.* 2014. V. 38. P. 134–147.
- Hevia A., Vilčko F., Álvarez-González J. G. Dynamic stand growth model for Norway spruce forests based on long-term experiments in Germany // *Recursos Rurais.* 2013. N. 9. P. 45–54.
- Hossfeld J. W. *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten.* Gotha, 1822. 310 p.
- Jarosz K., Kłapeć B. Modelowanie wzrostu drzewostanów z wykorzystaniem funkcji Gompertza // *Sylwan.* 2002. N. 4. P. 35–42.
- Korsuň F. Život normálního porostu ve vzorcích // *Lesnická práce.* 1935. V. 14. P. 289–300.
- Lundqvist B. On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden // *Medd. Fran. Statens Skogforsk.* 1957. V. 47. P. 1–64.
- Neter J., Kutner M. H., Nachtsheim C. J., Wasserman W. *Applied linear statistical models.* Chicago, IL: Irwin, 1996. 1408 p.
- Nunes L., Patrício M., Tomé J., Tomé M. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables // *Ann. For. Sci.* 2011. V. 68. P. 311–323.
- Richards F. J. A flexible growth function for empirical use // *J. Exp. Bot.* 1959. V. 10. N. 29. P. 290–301.
- Ryan T. P. *Modern regression methods.* New York: John Wiley & Sons, 1997. 529 p.
- Schumacher F. X. A new growth curve and its application to timber yield studies // *J. For.* 1939. V. 37. N. 3. P. 819–820.
- Seki M., Sakici O. E. Dominant height growth and dynamic site index models for Crimean pine in the Kastamonu-Tasköprü region of Turkey // *Can. J. For. Res.* 2017. V. 47. Iss. 11. P. 1441–1449.
- Stankova T. V. A dynamic whole-stand growth model, derived from allometric relationships // *Silva Fenn.* 2016. V. 50. N. 1. Article id 1406. 21 p.
- Tomé M. Modelação do crescimento da árvore individual em povoamentos de *Eucalyptus globulus* Labill. (1ª rotação). PhD Thesis. Região Centro de Portugal. Univ. Técnica de Lisboa, 1989. 230 p.
- Nunes L., Patrício M., Tomé N. P., Tomé M. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables // *Ann. For. Sci.* 2011. V. 68. Iss. 2. P. 311–323.
- Vargas-Larreta B., Aguirre-Calderón O. A., Corral-Rivas J. J., Crecente-Campo F., Diéguez-Aranda U. A dominant height growth and site index model for *Pinus pseudostrobus* Lindl. in northeastern Mexico // *Agrociencia.* 2013. V. 47. P. 1–10.
- Yang R. C., Kozak A., Smith J. H. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves // *Can. J. For. Res.* 1978. V. 8. N. 4. P. 424–431.

## **STAND SITE INDEX SCALE DEVELOPMENT USING THE GENERALIZED ALGEBRAIC DIFFERENCE APPROACH**

**A. V. Lebedev, V. V. Kuzmichev**

*Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy  
Timiryazevskaya str., 49, Moscow, 127550 Russian Federation*

---

E-mail: avl1993@mail.ru

The basis for forecasting the growth of forest stands is the site index scales. Expansion of knowledge about the processes of functioning of forest ecosystems, the nature of changes in the process of growth of morphological indicators of trees and stands, their interconnections and interdependencies, and the creation of a more suitable mathematical apparatus and appropriate software for describing biological processes form the prerequisites for formulating and solving the problem of forecasting the growth of stands on higher methodological level. The aim of this work is to assess the predictive ability of the growth equations obtained using the generalized algebraic difference approach (GADA) to describe the course of growth of tree stands at the average height and to construct a site index scale. The data for the study were general tables of the course of growth of complete (normal) pine stands North Eurasian. A total of 25 equations obtained using the GADA approach are analyzed. Comparative analysis showed that the best quality of data alignment is provided by an equation based on the Mitscherlich function (also known as Drakin-Vuevsky, Chapman-Richards) with the replacement of parameters responsible for the limiting values of the height and the shape of the curve. This model is polymorphic, has the shape of a sigmoid curve and variable asymptotes, i.e. takes into account most of the properties imposed on the growth rate models in height. Model errors are distributed depending on the selected forecasting interval and the site index of the stand. With an increase in the forecasting period, an increase in the error occurs. For all intervals of the forecast range, the value of the mean absolute error is not exceeding 2.01 %. The highest average absolute forecast error (1.1–2.2 %) is characteristic of the extreme site index classes ( $I^b$ ,  $V$ ,  $V^a$  and  $V^b$ ). The methodology considered in the study can be applied to develop models of the growth rate of stand inventory variables of other forest-forming species in Russia.

**Keywords:** *tree stands' growth, average height, dynamic equations.*

**How to cite:** *Lebedev A. V., Kuzmichev V. V. Stand site index scale development using the generalized algebraic difference approach // Sibirskij Lesnoj Zhurnal (Sib. J. For. Sci.). 2022. N. 3. P. 48–58 (in Russian with English abstract).*