УДК 517.9

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГРИНА — НАГДИ В СЛУЧАЕ ТОПОГРАФИИ ДНА, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

С. В. Мелешко, П. Сириват*

Математический колледж Института науки Технологического университета им. Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
* Институт науки Университета Мэ Фа Луанг, 57100 Чианг Рай, Таиланд
E-mails: sergey@math.sut.ac.th, piyanuch.sir@mfu.ac.th

Исследуются двумерные уравнения Грина — Нагди в случае неровного рельефа дна. Рассматривается функция, которая определяет топографию дна и может зависеть от времени. С использованием алгебраического подхода проводится групповая классификация исследуемых уравнений относительно функции, описывающей топографию дна.

Ключевые слова: групповая классификация, группа эквивалентности, допустимая группа Ли, уравнения Грина — Нагди.

DOI: 10.15372/PMTF20220608

Введение. Математическое моделирование физических явлений — одно из основных направлений в механике сплошной среды. В частности, необходимо построение математических моделей таких явлений, как гидравлические течения, прибрежные течения, течения в реках и озерах, течения в водозаборах, цунами, атмосферные течения, учитываемые при прогнозировании погоды.

Движение идеальной жидкости под действием силы тяжести моделируется с помощью уравнений Эйлера. Однако полные уравнения Эйлера, описывающие волны на поверхности, даже в предположении несжимаемости, баротропии и отсутствия вращения достаточно сложны. Одна из трудностей состоит в том, что свободная поверхность представляет собой часть решения. Это обусловливает необходимость использования более простых уравнений. Таким образом, разработка приближенных моделей и их анализ с использованием аналитических и численных методов является актуальной задачей.

Необходимость сведения исходных уравнений к более простым привела к построению моделей асимптотического разложения по малому параметру, определяемому отношением толщины слоя жидкости к характерному линейному размеру. Одним из классов таких уравнений является класс уравнений мелкой воды.

Уравнения мелкой воды описывают движение несжимаемой жидкости в гравитационном поле, в случае если толщина слоя жидкости достаточно мала. Эти уравнения широко используются при описании процессов в атмосфере, водоемах, а также при моделировании приливных течений, волн цунами и гравитационных волн (см., например, [1–6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-11-00238).

Существует большое количество подходов к построению моделей мелкой воды, обзор которых приведен в [7, 8]. Классический подход состоит в аппроксимации уравнений Эйлера для безвихревых течений. Иерархия приближений мелкой воды рассматривается относительно параметра мелкой воды $\delta = h_0/L$, где h_0 — средняя толщина слоя жидкости; L — характерный масштаб длины волны (см. работу [9] и библиографию к ней). В частности, уравнения Грина — Нагди, описывающие двумерный поток жидкости над неровным дном, являются аппроксимацией с точностью до дисперсионных членов порядка δ^2. Уравнения Грина — Нагди представляют собой обобщение уравнений [10, 11] одномерной задачи о распространении полностью нелинейных и слабодисперсионных поверхностных гравитационных волн над плоским дном.

Классические уравнения Грина — Нагди в случае рельефа дна, зависящего от пространственных координат, не допускают преобразований эквивалентности, определяемых галилеевой инвариантностью. Для устранения этого недостатка в работе [12] выведены уравнения Грина — Нагди в случае рельефа дна, зависящего от времени. При выводе этих уравнений использовался подход, предложенный в [9]. Следует отметить, что полученные таким образом уравнения совпадают с уравнениями, выведенными с помощью другого подхода. Зависимость функции, описывающей рельеф дна, от времени может учитывать движение дна, например при землетрясении или при движении объекта, расположенного на дне. Некоторые экспериментальные и теоретические данные для двух вариантов зависимости этой функции от времени представлены в работе [13]. В [14] рассмотрено движение дна $H(x, y, t)$, определяемое формулой $H = \zeta(x, y)T(t)$; с использованием преобразования Фурье по x, y и преобразования Лапласа по t линеаризованной задачи получены аналитические формулы для определения уровня свободной поверхности.

Известно, что симметрии математической модели являются свойствами, которыми обладают реальные физические явления. При изучении симметрий используется метод группового анализа [15, 16], который является основным методом построения точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Наличие симметрий дифференциальных уравнений обеспечивает существование инвариантных решений. Во многих работах группы Ли применяются при исследовании дифференциальных уравнений [15–20].

Приложения метода группового анализа для уравнений Грина — Нагди в случае горизонтального рельефа дна в эйлеровых и лагранжевых координатах рассматривались в работах [21, 22]. В [22, 23] соответственно для нахождения законов сохранения для одномерных классических уравнений Грина — Нагди в случаях горизонтального и неровного рельефа дна применялась теорема Нетер.

Групповые свойства одномерных уравнений Грина — Нагди в случае неровного дна в зависимости от времени изучались в работе [12], где одномерные уравнения представлялись в вариационной форме. Показано, что в массовых лагранжевых координатах уравнения Грина — Нагди являются уравнениями Эйлера — Лагранжа $\delta\mathcal{L}/\delta\varphi = 0$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\varphi_t^2\Big(1 + H_x^2 + \frac{1}{2}\,\varphi_\xi^{-1}H_{xx}\Big) + \frac{1}{6}\,\varphi_\xi^{-4}\varphi_{t\xi}^2 - \frac{1}{2}\,\varphi_\xi^{-1}g + \\ + \Big((\varphi_\xi\mu_1 + \mu_2) - \frac{1}{2}\,\varphi_t(H_x\varphi_t + H_t)\Big)\varphi_\xi^{-3}\varphi_{\xi\xi},$$

где функции $\mu_1(t, x)$, $\mu_2(t, x)$ удовлетворяют условиям $\mu_{1xx} = -(g + H_{tt})H_x$, $\mu_{2x} = -H_{tt}/2$; эйлеровы x, t и массовые лагранжевы ξ, t координаты связаны соотношением $x = \varphi(\xi, t)$, при этом общая толщина слоя жидкости $h(x, t)$ и осредненная скорость столба жидкости $u(x, t)$ определяются формулами

$$h = \varphi_\xi^{-1}, \qquad u = \varphi_t.$$

Следует отметить, что лагранжиан был найден для произвольной функции $H(x, y, t)$, определяющей рельеф дна. Вариационная форма позволила использовать теорему Нетер для построения законов сохранения. Поскольку для применения теоремы Нетер необходим групповой анализ уравнения Эйлера — Лагранжа, была проведена также полная групповая классификация исследуемых уравнений.

В данной работе проводится групповая классификация двумерных уравнений Грина — Нагди относительно рельефа дна, зависящего от времени. Уравнения рассматриваются в эйлеровых координатах. Для групповой классификации применяется алгебраический подход (см., например, работы [24–28] и библиографию к ним), позволяющий существенно упростить групповую классификацию.

1. Исследуемые уравнения. В случае рельефа дна, зависящего от времени, двумерные уравнения Грина — Нагди имеют вид [12]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(h\boldsymbol{u}) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{u} + g\,\nabla(h + H) = \frac{1}{h}\,(\nabla A + B\nabla H), \tag{1}$$

где

$$A = h^2\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{h}{3}\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,H\Big), \qquad B = h\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{h}{2}\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}) - \frac{d}{dt}\,H\Big); \tag{2}$$
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla),$$

h — общая толщина слоя жидкости; H — высота столба жидкости между дном и невозмущенным уровнем жидкости; g — ускорение свободного падения; $\boldsymbol{u}$ — осредненная скорость столба жидкости; t — время. Функция $H(x, y, t)$ (x, y — пространственные координаты) описывает рельеф дна. Предполагается, что эта функция известна. Первое уравнение системы (1) представляет собой закон сохранения массы столба жидкости, по которому проводится осреднение, второе уравнение — эйлерову форму второго закона Ньютона, согласно которому ускорение частиц жидкости происходит под действием силы тяжести при определенных поверхностных и донных граничных условиях. Заметим, что при $H_t = 0$ данные уравнения совпадают с уравнениями Грина — Нагди [29–31], которые в этом случае имеют вид (1), (2).

2. Преобразования эквивалентности. Класс уравнений (1) параметризуется произвольным элементом $H(x, y, t)$. В результате преобразований эквивалентности этого класса сохраняется структура уравнений, но произвольный элемент может изменяться. На первом этапе групповой классификации уравнений вида (1) описывается класс эквивалентности этих уравнений.

Предполагается, что операторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности имеют вид [15, 32]

$$X^e = \xi^t\,\partial_t + \xi^x\,\partial_x + \xi^y\,\partial_y + \eta^h\,\partial_h + \eta^u\,\partial_u + \eta^v\,\partial_v + \zeta^g\,\partial_g + \zeta^H\,\partial_H,$$

где все коэффициенты оператора зависят от переменных t, x, y, h, u, v, g, H.

Класс дифференциальных уравнений (1) определяется дополнительными уравнениями для произвольных элементов g, H:

$$g_t = 0, \quad g_x = 0, \quad g_y = 0, \quad g_u = 0, \quad g_v = 0, \quad g_h = 0, \quad H_u = 0, \quad H_v = 0, \quad H_h = 0.$$

Для нахождения преобразований эквивалентности используется инфинитезимальный критерий [15]. Определяются уравнения для компонент образующих однопараметрических групп преобразований эквивалентности. Решение этих определяющих уравнений представляет собой общий вид элементов группы эквивалентности класса (1). Обобщим преобразования эквивалентности, полученные в [12] для одномерного случая, на двумерный случай:

$$\begin{gathered}X_1^e = \partial_x, \quad X_2^e = \partial_y, \quad X_3^e = t\,\partial_x + \partial_u, \quad X_4^e = t\,\partial_y + \partial_u,\\ X_5^e = -y\,\partial_x + x\,\partial_y - v\,\partial_u + u\,\partial_v, \quad X_6^e = \partial_t,\\ X_7^e = t\,\partial_t + x\,\partial_x + y\,\partial_y + h\,\partial_h + H\,\partial_H - g\,\partial_g,\\ X_8^e = t\,\partial_t - u\,\partial_u - v\,\partial_v - 2g\,\partial_g, \quad X_9^e = \partial_H, \quad X_{10}^e = t\partial_H.\end{gathered} \tag{3}$$

Соответствующие преобразования, изменяющие H, имеют вид

$$X_7^e\colon\ \ \tilde H = \mathrm{e}^a\, H, \qquad X_9^e\colon\ \ \tilde H = H + a, \qquad X_{10}^e\colon\ \ \tilde H = H + at$$

(a — групповой параметр). Следовательно, в силу преобразований, соответствующих операторам X_9^e и X_{10}^e, в случае $H(x,y,t) = G(x,y,t) + w(t)$ и $w'' = 0$ можно считать $w = 0$.

Имеются две очевидные инволюции:

$$\begin{gathered}E_1\colon\ \ \tilde x = -x, \quad \tilde y = -y, \quad \tilde u = -u, \quad \tilde v = -v,\\ E_2\colon\ \ \tilde t = -t, \quad \tilde u = -u, \quad \tilde v = -v.\end{gathered} \tag{4}$$

В (4) представлены только изменяемые переменные.

Замечание. Преобразования, соответствующие операторам X_3^e и X_4^e, есть преобразования Галилея. В случае, когда рельеф дна H не зависит от времени t, но зависит от пространственных координат, уравнения Грина — Нагди не допускают преобразований эквивалентности, соответствующих преобразованиям Галилея. Согласно принципу инвариантности Галилея все механические законы одинаковы в любой инерциальной системе отсчета. Это свойство необходимо учитывать при построении любой математической модели.

3. Групповая классификация. Групповая классификация осуществляется с точностью до преобразований эквивалентности. Целью групповой классификации является определение всех алгебр Ли, допускаемых уравнениями (1). Одна часть этих алгебр, которая называется ядром допустимых алгебр Ли, допускается для всех произвольных элементов H, другая часть зависит от выбора произвольного элемента и содержит неэквивалентные расширения ядра допустимых алгебр Ли.

Оператор допустимой алгебры Ли будем искать в виде

$$X = \xi^t\,\partial_t + \xi^x\,\partial_x + \xi^y\,\partial_y + \eta^h\,\partial_h + \eta^u\,\partial_u + \eta^v\,\partial_v,$$

где все коэффициенты операторов зависят от переменных t, x, y, h, u, v и удовлетворяют определяющим уравнениям [15].

В результате символьных вычислений, выполненных в пакете Reduce [33], получаем классифицирующие уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}S = (t(x_7 + x_8) + x_6)H_t + (tx_4 + xx_5 + yx_7 + x_2)H_y +\\ + (tx_3 + xx_7 - yx_5 + x_1)H_x + (g/2)t^2(x_7 + 2x_8) - x_7H,\end{aligned}$$

x_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ — постоянные, и оператор допустимой алгебры Ли

$$X = \sum_{i=1}^{8} x_i X_i,$$

где

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = t\,\partial_x + \partial_u, \qquad X_4 = t\,\partial_y + \partial_u,$$
$$X_5 = -y\,\partial_x + x\,\partial_y - v\,\partial_u + u\,\partial_v, \qquad X_6 = \partial_t,$$
$$X_7 = t\,\partial_t + x\,\partial_x + y\,\partial_y + h\,\partial_h, \qquad X_8 = t\,\partial_t - u\,\partial_u - v\,\partial_v.$$

Существует несколько способов анализа классифицирующих уравнений (5). Один из алгоритмов использовался для групповой классификации уравнений газовой динамики [15]. Для реализации этого алгоритма необходимо выполнить громоздкие вычисления. Альтернативным подходом к анализу классифицирующих уравнений является алгебраический подход, в котором учитываются алгебраические свойства алгебры Ли, что позволяет значительно упростить групповую классификацию (см. работы [24–28] и библиографию к ним).

Что касается применения алгебраического подхода к уравнениям (1), то следует отметить, что допустимые операторы образуют алгебру Ли, которая является подалгеброй алгебры Ли $L_8 = \{X_1, X_2, \dots, X_8\}$. Также можно заметить, что внутренние автоморфизмы алгебры Ли L_8 действуют аналогично преобразованиям эквивалентности, соответствующим операторам X_i^e $(i = 1, 2, \dots, 8)$. Следовательно, каждая алгебра Ли, допускаемая уравнениями (1), принадлежит одному из классов оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_8. Таким образом, для групповой классификации уравнений (1) можно использовать оптимальную систему подалгебр алгебры Ли L_8. Каждый представитель класса оптимальной системы подалгебр является набором констант x_i $(i = 1, 2, \dots, 8)$. Подставляя эти константы в классифицирующие уравнения (5), получаем переопределенную систему уравнений для функции $H(x, y, t)$. Общее решение этой системы уравнений определяет представителя групповой классификации уравнений (1).

3.1. *Оптимальная система подалгебр алгебры* L_8. Для алгебр Ли малой размерности оптимальная система подалгебр вычисляется достаточно просто. В случае многомерных алгебр Ли требуется большой объем вычислений. При использовании двухшагового алгоритма [34] задача построения оптимальной системы многомерных подалгебр в результате сведения ее к анализу подалгебр меньшей размерности упрощается.

Алгоритм [34] можно сформулировать следующим образом. Пусть L — алгебра Ли L с базисом $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$. Предположим, что алгебра Ли L разлагается в прямую сумму $L = I \oplus F$, где I — собственный идеал алгебры L; F — подалгебра. Тогда множество внутренних автоморфизмов $A = \operatorname{Int} L$ алгебры Ли L также разлагается: $A = A_I A_F$. Здесь

$$A_I \subset I, \qquad A_F F \subset F, \qquad (A_I X)_F = X \qquad \forall X \in F.$$

Действительно, пусть элемент $x \in L$ представлен в виде $x = x_I + x_F$, где $x_I \in I$; $x_F \in F$. Любой автоморфизм $B \in A$ можно записать в виде $B = B_I B_F$, где $B_I \in A_I$; $B_F \in A_F$. Автоморфизмы B_I и B_F имеют следующие свойства [34]:

$$B_I x_F = x_F \qquad \forall x_F \in F, \quad \forall B_I \in A_I,$$
$$B_F x_I \in I, \quad B_F x_F \in F \qquad \forall x_I \in I, \quad \forall x_F \in F, \quad \forall B_F \in A_F.$$

На первом шаге формируется оптимальная система подалгебр $\Theta_{A_F}(F) = \{F_0, F_1, F_2, \dots, F_p, F_{p+1}\}$ алгебры F. Здесь $F_0 = \{0\}$; $F_{p+1} = \{F\}$; оптимальная система алгебры F строится относительно автоморфизмов A_F. Для каждой подалгебры F_j, $j = 0, 1, 2, \dots, p + 1$ необходимо найти ее стабилизатор $\operatorname{St}(F_j) \subset A$:

$$\operatorname{St}(F_j) = \{B \in A \mid B(F_j) = F_j\}.$$

Заметим, что $\operatorname{St}(F_{p+1}) = A$.

Таблица 1

Таблица коммутаторов L_7

Оператор	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	0	0	X_2	0	X_1	0
X_2	0	0	0	0	$-X_1$	0	X_2	0
X_3	0	0	0	0	X_4	$-X_1$	0	$-X_3$
X_4	0	0	0	0	$-X_3$	$-X_2$	0	$-X_4$
X_5	$-X_2$	X_1	$-X_4$	X_3	0	0	0	0
X_6	0	0	X_1	X_2	0	0	X_6	X_6
X_7	$-X_1$	$-X_2$	0	0	0	$-X_6$	0	0
X_8	0	0	X_3	X_4	0	$-X_6$	0	0

Таблица 2

Внутренние автоморфизмы алгебры L_8

A	T	Γ	S	A_6	A_7	A_8	E_1	E_2
Ap_1	$p_1 + x_7\alpha_1 +$ $+ x_5(-a_2, a_1)$	$p_1 - x_6\alpha_2$	Sp_1	$p_1 - a_6 p_2$	$\mathrm{e}^{a_7}\, p_1$	p_1	$-p_1$	p_1
Ap_2	p_2	$p_2 + x_5(-a_4, a_3) -$ $- x_8\alpha_2$	Sp_2	p_2	p_2	$\mathrm{e}^{a_8}\, p_2$	p_2	$-p_2$
Ax_6	x_6	x_6	x_6	$x_6 + a_6(x_7 + x_8)$	$\mathrm{e}^{a_7}\, x_6$	$\mathrm{e}^{-a_8}\, x_6$	x_6	$-x_6$

На втором шаге формируется оптимальная система подалгебр $\Theta_A(L)$ алгебры L в виде набора $\Theta_{\mathrm{St}\,(F_j)}(I \oplus F_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, p+1$.

Если подалгебру F можно разложить, то двухшаговый алгоритм можно использовать для построения $\Theta_{A_F}(F)$.

Структура алгебры Ли определяется ее таблицей коммутаторов (табл. 1).

С использованием табл. 1 находится композиционный ряд идеалов

$$O \subset \{X_1, X_2\} \subset \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \subset$$
$$\subset \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} \subset \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\} \subset L_7 \subset L_8,$$

где $L_7 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$. Заметим, что алгебра Ли L_7 совпадает с алгеброй Ли, допускаемой уравнениями двумерной газовой динамики с уравнением состояния общего вида. Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_7 была построена в рамках программы ПОДМОДЕЛИ [35] под руководством Л. В. Овсянникова. Двухшаговый алгоритм [34] был предложен Л. В. Овсянниковым также в рамках программы ПОДМОДЕЛИ [35].

Внутренние автоморфизмы алгебры L_8 представлены в табл. 2, где представлены только изменяемые переменные; a_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ — параметры автоморфизма A; $p_1 = (x_1, x_2)$; $p_2 = (x_3, x_4)$; $\alpha_1 = (a_1, a_2)$; $\alpha_2 = (a_3, a_4)$; S — матрица вращений:

$$S = \begin{pmatrix} \cos a_5 & \sin a_5 \\ -\sin a_5 & \cos a_5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что алгебра Ли L_8 может быть разложена следующим образом:

$$L_8 = \{\{X_5, X_7, X_8\} \oplus \{X_6\}\} \oplus \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{X_8\} \oplus L_7.$$

Здесь $\{X_8\}$ — подалгебра; L_7 — идеал. Поскольку $\mathrm{St}\,(\{X_8\}) = \mathrm{Int}\,(L_8)$, для построения оптимальной системы подалгебр алгебры L_8 можно использовать классификацию алгебры L_7. Пусть $L_k = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ — подалгебра из оптимальной ситемы алгебры L_8. В этом случае либо L_k — подалгебра L_7, либо $L_{k-1} = \{Y_1, \ldots, Y_{k-1}\}$ — подалгебра L_7. Тогда подалгебра L_k в первом случае или L_{k-1} во втором берется из списка оптимальной системы подалгебр алгебры L_7. Во втором случае с использованием стабилизатора $\mathrm{St}\,(L_{k-1})$ и условия, что L_k — подалгебра, упрощается оператор Y_k, содержащий X_8.

Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_7 представлена в табл. 3. Представители подалгебр обозначаются парой чисел $(r.i)$, где r — размерность; i — порядковый номер подалгебры размерности r. Подалгебры алгебры Li L_8, содержащие оператор X_8, приведены в табл. 4. В первой графе указан номер подалгебры из табл. 3. Для некоторых подалгебр имеется два расширения на оператор X_8. Эти расширения обозначены "a", "b".

3.2. *Решения классифицирующих уравнений* (5). Как отмечено выше, подставляя константы x_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, определяемые базисными операторами подалгебры оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_8, в классифицирующие уравнения (5), получаем переопределенную систему уравнений для функции $H(x, y, t)$. Решая переопределенную систему уравнений, находим функцию $H(x, y, t)$, такую что уравнения (1) допускают соответствующую алгебру Ли. Рассматривая все подалгебры оптимальной системы подалгебр, получаем групповую классификацию, которая представлена в табл. 5, 6. Представление функции $H(x, y, t)$ приведено во второй графе, соответствующая допустимая алгебра Ли представлена в третьей графе. Константы k, k_i, l, l_i, α, β произвольны, функция Q — произвольная функция своих аргументов.

Замечание. В табл. 5 элементы 1, 2, 4, 6, 9 необходимо исключить из групповой классификации, так как для приведенных в ней функций H уравнения (1) допускают более широкую алгебру, содержащую оператор X_8 и приведенную в табл. 6. Операторы 1, 2, 3, 6, 9 приведены в табл. 5, так как они использовались при поиске функции H для подалгебр алгебры L_8, содержащих оператор X_8 из табл. 4.

Приведем два типичных примера построения функции H по подалгебре из оптимальной системы.

Пример 1. Рассмотрим подалгебру 2.9 $\{X_2 + X_3, X_4 + \alpha X_1\}$, приведенную в табл. 3. Операторы $X_2 + X_3$ и $X_4 + \alpha X_1$ определяют два набора ненулевых констант: $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ для $X_2 + X_3$ и $x_1 = \alpha$, $x_4 = 1$ для $X_4 + \alpha X_1$. В этом случае получаем классифицирующие уравнения

$$tH_x + H_y = a_1 t + b_1, \qquad \alpha H_x + tH_y = a_2 t + b_2,$$

где a_i, b_i $(i = 1, 2)$ — произвольные константы. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$H = y\Big(\frac{-tl_2 + l_1\alpha}{t^2 - \alpha} + k_2\Big) + x\Big(\frac{-tl_1 + l_2}{t^2 - \alpha} + k_1\Big) + Q(t), \tag{6}$$

где $l_1 = a_2 - b_1$; $l_2 = a_1\alpha - b_2$; $k_1 = a_1$; $k_2 = a_2$.

Пример 2. Рассмотрим подалгебру 2.1 $\{X_5 + \alpha X_7, X_6\}$, приведенную в табл. 3. Для операторов $X_5 + \alpha X_7$ и X_6 имеют место следующие ненулевые константы: $x_5 = 1$, $x_7 = \alpha$ для $X_5 + \alpha X_7$ и $x_6 = 1$ для X_6. В этом случае классифицирующие уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}(\alpha x - y)H_x + (\alpha y + x)H_y + \alpha t H_t = \alpha H - \alpha g t^2/2 + a_1 t + b_1,\\ H_t = a_2 t + b_2.\end{gathered} \tag{7}$$

Решая второе уравнение (7), находим $H = a_2 t^2/2 + b_2 t + G(x, y)$, где в силу преобразований эквивалентности можно положить $b_2 = 0$. Подставляя найденное значение H в первое уравнение (7) и дифференцируя его по t, получаем

$$a_1 = 0, \qquad \alpha(a_2 + g) = 0.$$

Таблица 3

Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_7

№	Базис
	$r = 7$
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$
	$r = 6$
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7, X_6$
2	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7$
3	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7$
	$r = 5$
1	X_1, X_2, X_5, X_6, X_7
2	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7$
3	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + X_6$
4	$X_1, X_2, X_3, X_6, X_7 + \alpha X_4$
5	X_1, X_2, X_3, X_4, X_6
6	X_1, X_2, X_3, X_4, X_7
	$r = 4$
1	$X_1, X_2, X_5 + \alpha X_7, X_6$
2	X_3, X_4, X_5, X_7
3	X_1, X_2, X_5, X_7
4	X_1, X_3, X_6, X_7
5	$X_1, X_2, X_6, X_3 + \alpha X_7$
6	X_1, X_2, X_6, X_7
7	$X_1, X_2, X_4, X_3 + X_6$
8	X_1, X_3, X_4, X_7
9	$X_1, X_2, X_4, X_7 + \alpha X_3$
10	X_1, X_2, X_3, X_4
	$r = 3$
1	X_5, X_6, X_7
2	$X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7$
3	$X_1, X_2, X_5 + \alpha X_7$
4	$X_1, X_2, X_5 + X_6$
5	$X_2 + X_3, X_1 - X_4, X_5$
6	X_1, X_2, X_5
7	$X_1, X_6, X_7 + \alpha X_3$
8	$X_2, X_3 + X_6, X_4 + \alpha X_1$
9	$X_1, X_2 + X_3, X_6$
10	X_1, X_3, X_6
	$r = 3$
11	X_1, X_2, X_6
12	$X_1, X_2, X_3 + X_6$
13	X_3, X_4, X_7
14	$X_1, X_3 + \alpha X_4, X_7 + \beta X_4$
15	$X_1, X_4, X_7 + \alpha X_3$
16	$X_1, X_2, X_7 + \alpha X_3$
17	$X_1, X_2 + X_3, X_4$
18	X_1, X_3, X_4
19	X_1, X_2, X_3
	$r = 2$
1	$X_5 + \alpha X_7, X_6$
2	X_5, X_7
3	X_6, X_7
4	X_1, X_6
5	$X_1, X_3 + X_6$
6	$X_2, X_3 + X_6 + \alpha X_4$
7	$X_3, X_7 + \alpha X_4$
8	$X_1, X_7 + \alpha X_3 + \beta X_4$
9	$X_2 + X_3, X_4 + \alpha X_1$
10	X_3, X_4
11	$X_1, X_2 + X_3$
12	X_1, X_3
13	$X_2 + \alpha X_1, X_3$
14	X_1, X_2
	$r = 1$
1	$X_5 + \alpha X_7$
2	$X_5 + X_6$
3	$X_3 + X_6$
4	X_6
5	$X_7 + \alpha X_3$
6	X_3
7	$X_2 + X_3$
8	X_1

Таблица 4

Подалгебры оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_8, содержащие оператор X_8

№	Базис
	$r = 8$
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$
	$r = 7$
1	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7, X_6, X_8 + \beta X_7$
2	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7, X_8$
3	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_8 + \alpha X_5$
	$r = 6$
1	$X_1, X_2, X_5, X_6, X_7, X_8 + \alpha X_5$
2a	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7, X_8 + \beta X_7$
2b	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_8 + \beta X_6 - X_7$
3	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + X_6, X_8 + \beta X_6 - X_7$
4	$X_1, X_2, X_3, X_6, X_7, X_8 + \beta X_6$
5	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$
6	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_7, X_8 + \alpha X_5$
	$r = 5$
1	$X_1, X_2, X_5 + \alpha X_7, X_6, X_8 + \beta X_7$
2	X_3, X_4, X_5, X_7, X_8
3	X_1, X_2, X_5, X_7, X_8
4	X_1, X_3, X_6, X_7, X_8
5	$X_1, X_2, X_3, X_6, X_8 + \alpha X_7$
6	$X_1, X_2, X_6, X_7, X_8 + \alpha X_5$
7	$X_1, X_2, X_4, X_3 + X_6, X_8 - 2X_7$
8	X_1, X_3, X_4, X_7, X_8
9	X_1, X_2, X_4, X_7, X_8
10a	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$
10b	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$
	$r = 4$
1	X_5, X_6, X_7, X_8
2	$X_3, X_4, X_5 + \alpha X_7, X_8 + \beta X_7$
3a	$X_1, X_2, X_5 + \alpha X_7, X_8 + \beta X_7$
3b	$X_1, X_2, X_5, X_8 + X_6 - X_7$
4	$X_1, X_2, X_5 + X_6, X_8 + \alpha X_6 - X_7$
5	$X_2 + X_3, X_1 - X_4, X_5, X_8 - X_7$
6a	$X_1, X_2, X_5, X_8 + X_6 - X_7$
6b	$X_1, X_2, X_5, X_8 + \alpha X_7$
7	X_1, X_6, X_7, X_8
8	$X_2, X_3 + X_6, X_4, X_8 - 2X_7$
9	$X_1, X_2 + X_3, X_6, X_8 - X_7$
10a	$X_1, X_3, X_6, X_8 + \alpha X_7$
10b	$X_1, X_3, X_6, X_8 + X_2$
11	$X_1, X_2, X_6, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$
12	$X_1, X_2, X_3 + X_6, X_8 - 2X_7$
13	$X_3, X_4, X_7, X_8 + \alpha X_5$
14	$X_1, X_3 + \alpha X_4, X_7 + \beta X_4, X_8$
15	X_1, X_4, X_7, X_8
16	$X_1, X_2, X_7, X_8 + \alpha X_5$
17	$X_1, X_2 + X_3, X_4, X_8 - X_7$
18a	$X_1, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_7 \quad (\alpha \ne 0)$
18b	$X_1, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_2$
19a	$X_1, X_2, X_3, X_8 + X_6 - X_7$
19b	$X_1, X_2, X_3, X_8 + \alpha X_7$
	$r = 3$
1	$X_5 + \alpha X_7, X_6, X_8 + \beta X_7$
2	X_5, X_7, X_8
3	$X_6, X_7, X_8 + \alpha X_5$
4a	X_1, X_6, X_8
4b	$X_1, X_6, X_8 + X_2$
5	$X_1, X_3 + X_6, X_8 - 2X_7$
6	$X_2, X_3 + X_6 + \alpha X_4, X_8 - 2X_7$
7	X_3, X_7, X_8
8	X_1, X_7, X_8
9	$X_2 + X_3, X_4, X_8 - X_7$
10a	$X_3, X_4, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7 \ (\alpha^2 + \beta^2 \ne 0)$
10b	$X_3, X_4, X_8 + \alpha X_1$
11a	$X_1, X_2 + X_3, X_8 + \beta X_4 + \alpha X_6 - X_7 \ (\alpha \ne 0)$
11b	$X_1, X_2 + X_3, X_8 - X_7$
12a	$X_1, X_3, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7 \ (\alpha^2 + \beta^2 \ne 0)$
12b	$X_1, X_3, X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$
13a	$X_2 + \beta X_1, X_3, X_8 + \alpha X_7 \ (\alpha \ne 0)$
13b	$X_2 + \alpha X_1, X_3, X_8 + \beta X_1$
14a	$X_1, X_2, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$
14b	$X_1, X_2, X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$
	$r = 2$
1a	$X_5 + \alpha X_7, X_8 + \beta X_7$
1b	$X_5 + \alpha X_7, X_8 + X_6 - X_7$
2a	$X_5 + X_6, X_8 + \alpha X_7$
2b	$X_5 + X_6, X_8 + X_6 - X_7$
3	$X_3 + X_6, X_8 - 2X_7$
4a	$X_6, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7 \ (\alpha^2 + \beta^2 \ne 0)$
4b	$X_6, X_8 + \alpha X_1$
5	$X_7, X_8 + \alpha X_5$
6a	$X_3, X_8 + \alpha X_7 \ (\alpha \ne 0)$
6b	$X_3, X_8 + X_1 + \alpha X_2$
6c	X_3, X_8
7	$X_2 + X_3, X_8 - X_7$
8a	$X_1, X_8 + \alpha X_7 \ (\alpha \ne 0)$
8b	$X_1, X_8 + X_6 - X_7$
	$r = 1$
1	$X_8 + \alpha X_1$
2	$X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$
3	$X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$

Таблица 5

Групповая классификация уравнений (1), допускающих подалгебры алгебры L_7

№	H	Базис	Номер оптимальной системы
1	$-gt^2/2$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$	7.1
2	lt^2 $(l \neq -g/2)$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$	6.1 при $\alpha = 0$
3	$k_1 t \ln t - gt^2/2$, $k_1 \neq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7$	6.2
4	$yk_2 + xk_1 - gt^2/2$, $k_2^2 + k_1^2 \neq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7$	6.3
5	$Q(t)$, $Q''' \neq 0$	X_1, X_2, X_3, X_4, X_5	5.2 при $\alpha = 0$
6	$yk_2 + xk_1 + lt^2$, $l \neq -g/2$, $k_2^2 + k_1^2 \neq 0$	X_1, X_2, X_3, X_4, X_6	5.5
7	$k_1 x + k_2 y + k_3 t \ln t - gt^2/2$, $k_2^2 + k_1^2 \neq 0$	X_1, X_2, X_3, X_4, X_7	5.6
8	$yk_2 + xk_1 + Q(t)$, $Q''' \neq 0$	X_1, X_2, X_3, X_4	4.10
9	$kr - gt^2/2$, $k \neq 0$	X_5, X_6, X_7	3.1
10	$Q(x - t^2/2) + yk_2 + lt^2$, $Q'' \neq 0$	$X_2, X_4, X_6 + X_3$	3.8 при $\alpha = 0$
11	$Q(y) + xk_1 + lt^2$, $Q'' \neq 0$	X_1, X_3, X_6	3.10
12	$tQ(y/t - \beta \ln t) + k_1 x + k_2 t \ln t - gt^2/2$, $Q'' \neq 0$	$X_1, X_3, X_7 + \beta X_4$	3.14 при $\alpha = 0$
13	$y(k_2 + l_2/t) + xk_1 + Q(t)$, $l_2 \neq 0$	X_1, X_3, X_4	3.18
14	$y(l_2 t + k_2) + xk_1 + Q(t)$, $l_2 \neq 0$	X_1, X_2, X_3	3.19
15	$\mathrm{e}^{\alpha\varphi} Q(r\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}) - gt^2/2$, $Q'' \neq 0$, $\alpha \neq 0$	$X_5 + \alpha X_7, X_6$	2.1 при $\alpha \neq 0$
16	$Q(r) + k\varphi + lt^2$	X_5, X_6	2.1 при $\alpha = 0$
17	$tQ(rt^{-1}) + kt\varphi - gt^2/2$	X_5, X_7	2.2
18	$yQ(xy^{-1}) - gt^2/2$, $Q'' \neq 0$	X_6, X_7	2.3
19	$tQ(y/t - \alpha \ln t) + xk_1 + k_2 t \ln t - gt^2/2$	$X_3, X_7 + \alpha X_4$	2.7
20	$y\Big(\dfrac{-tl_2 + l_1\alpha}{t^2 - \alpha} + k_2\Big) + x\Big(\dfrac{-tl_1 + l_2}{t^2 - \alpha} + k_1\Big) + Q(t)$, $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$	$X_2 + X_3, X_4 + \alpha X_1$	2.9
21	$y(k_2 + l_2/t) + x(k_1 + l_1/t) + Q(t)$, $l_1 \neq 0$	X_3, X_4	2.10
22	$y(t^2 k + tl_2 + l_0) + x(-tk + l_1) + Q(t)$, $k \neq 0$	$X_1, X_2 + X_3$	2.11
23	$xk_1 + Q(y, t)$, $Q_{yy} \neq 0$	X_1, X_3	2.12
24	$x(k_1 + l_1/t) + y(k_2 t - \alpha l_1/t + k_3) + Q(t)$, $l_1 \neq 0$	$X_2 + \alpha X_1, X_3$	2.13
25	$y(tk_2 + l_2) + x(tk_1 + l_1) + Q(t)$, $l_1 \neq 0$	X_1, X_2	2.14
26	$\mathrm{e}^{\alpha\varphi} Q(r\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}, t\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}) + k_1 t\varphi - gt^2/2$	$X_5 + \alpha X_7$	1.1 при $\alpha \neq 0$
27	$Q(\varphi - t, r) + lt^2$	$X_5 + X_6$	1.2
28	$Q(r, t) + (k_1 t + k_2)\varphi - gt^2/2$	X_5	1.1 при $\alpha = 0$
29	$Q(x - t^2/2, y) + lt^2$	$X_3 + X_6$	1.3
30	$Q(x, y) + lt^2$	X_6	1.4
31	$tQ(x/t - \alpha \ln t, y/t) + k_1 t \ln t - gt^2/2$	$X_7 + \alpha X_3$	1.5
32	$Q(t, y) + x(k_1/t + k_0)$	X_3	1.6
33	$Q(t, x - ty) + (lt + k_2)y$	$X_2 + X_3$	1.7
34	$Q(t, y) + x(tk_2 + k_1)$	X_1	1.8

Таблица 6

Групповая классификация уравнений (1), допускающих подалгебры L_8 с базисным оператором, включающим X_8

№	H	Базис	Номер оптимальной системы
1	$-gt^2/2$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$	8.1
2	lt^2 $(l \neq -g/2)$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_8 - 2X_7$	7.1 при $\alpha = 0$, $\beta = -2$
3	$yk_2 + xk_1 - gt^2/2$, $k_2^2 + k_1^2 \neq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_8$	7.3 при $\alpha = 0$
4	$Q(t) - gt^2/2$, $Q'' = kt^{-\gamma}$, $\gamma = (\beta + 2)/(\beta + 1)$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_8 + \beta X_7$	6.2a
5	$k\,\mathrm{e}^{-t/\beta} - gt^2/2$, $\beta \neq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_8 + \beta X_7$	6.2b
6	$yk_2 + xk_1 + lt^2$, $l \neq -g/2$, $k_2^2 + k_1^2 \neq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_8 - 2X_7$	6.5 при $\alpha = 0$, $\beta = -2$
7	$yk_2 + xk_1 - gt^2/2 + Q(t)$, $Q'' = kt^{-\gamma}$, $\gamma = (\beta + 2)/(\beta + 1)$, $\alpha k_1 = 0$, $\alpha k_2 = 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$	5.10a при $\beta \neq -1$
8	$yk_2 + xk_1 + l\,\mathrm{e}^{-t} - gt^2/2$, $\alpha k_1 = 0$, $\alpha k_2 = 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$	5.10b
9	$kr - gt^2/2$, $k \neq 0$	X_5, X_6, X_7, X_8	4.1
10	$xk_1 - gt^2/2 + tQ(y/t - \alpha \ln t)$	$X_1, X_3, X_7 + \alpha X_4, X_8$	4.14
11	$k_1x + y(k_2 + l_2/t) - gt^2/2$, $l_2 \neq 0$	$X_1, X_3, X_4, X_8 - X_7$	4.18a
12	$y(k_2 + lt) - gt^2/2$	$X_1, X_2, X_3, X_8 - X_7$	4.19b
13	$\mathrm{e}^{\alpha\varphi}\, Q(r\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}) - gt^2/2$, $Q'' \neq 0$, $\alpha \neq 0$	$X_5 + \alpha X_7, X_6, X_8$	3.1a
14	$kr + lt^2$, $k \neq 0$	$X_5, X_6, X_8 - 2X_7$	3.1b при $\beta = -2$
15	$k\varphi - gt^2/2 + Q(r)$	X_5, X_6, X_8	3.1b при $\beta = 0$
16	$yQ(x/y) - gt^2/2$	X_6, X_7, X_8	3.3
17	$y(k_2 - l_2/t) + x(k_1 + l_1/t - l_2/t^2) - gt^2/2$, $l_2 \neq 0$	$X_2 + X_3, X_4, X_8 - X_7$	3.9
18	$y(k_2 + l_2/t) + x(k_1 + l_1/t) - gt^2/2$, $l_1 \neq 0$	$X_3, X_4, X_8 - X_7$	3.10a при $\alpha = 0$, $\beta = -1$
19	$yk_2 + xk_1 + k \ln t - gt^2/2$, $k \neq 0$	$X_3, X_4, X_8 + \alpha X_1$	3.10b
20	$y(k_2 + kt^2 + l_2t) + x(k_1 - kt) - gt^2/2$, $k \neq 0$	$X_1, X_2 + X_3, X_8 - X_7$	3.11b
21	$yQ(t) + k_1x - gt^2/2$	$X_1, X_3, X_8 - X_7$	3.12a при $\alpha = 0$, $\beta = -1$
22	$t^\gamma Q(yt^{-\gamma}) + k_1x - gt^2/2 + Q_0(t)$, $Q_0'' = kt^{-\gamma}$, $\gamma = \beta/(\beta + 1)$	$X_1, X_3, X_8 + \beta X_7$, $\beta(\beta + 1) \neq 0$	3.12a при $\alpha = 0$
23	$\mathrm{e}^{-t}\, Q(y\,\mathrm{e}^t) + k_1x - gt^2/2$	$X_1, X_3, X_8 + X_6 - X_7$	3.12b при $\alpha = 0$
24	$x(k_1 + l_1/t) + y(k_2t - \beta l_1/t + k_3) + Q(t)$, $l_1 \neq 0$	$X_2 + \beta X_1, X_3, X_8 - X_7$	3.13a
25	$x(k_1 + l_1t) + y(k_2 + l_2t) - gt^2/2$, $l_1 \neq 0$	$X_1, X_2, X_8 - X_7$	3.14a при $\alpha = 0$, $\beta = -1$
26	$rQ(t\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}) - gt^2/2$	$X_5 + \alpha X_7, X_8 - X_7$	2.1a при $\alpha \neq 0$, $\beta = -1$
27	$zQ(r/z) - gt^2/2$, $z = t^\gamma\, \mathrm{e}^{\alpha(1-\gamma)\varphi}$, $\gamma = \beta/(\beta + 1)$	$X_5 + \alpha X_7, X_8 + \beta X_7$	2.1a при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq -1$
28	$t^\gamma Q(rt^{-\gamma}) + k\varphi - gt^2/2$, $\gamma = \beta/(\beta + 1)$, $\beta k = 0$	$X_5, X_8 + \beta X_7$	2.1a при $\alpha = 0$
29	$rQ_1(t) + Q_2(t)$	$X_5, X_8 - X_7$	2.1a при $\alpha = 0$, $\beta = -1$
30	$\mathrm{e}^{-t}\, Q(r\,\mathrm{e}^t) - gt^2/2$	$X_5, X_8 + X_6 - X_7$	2.1b при $\alpha = 0$
31	$Q(r) + k\varphi - gt^2/2$	$X_5 + X_6, X_8 + \alpha X_7$	2.2a при $\alpha \neq -1$
32	$rQ(\varphi - t) - gt^2/2$	$X_5 + X_6, X_8 - X_7$	2.2a при $\alpha = -1$
33	$\mathrm{e}^{\varphi - t}\, Q(r\,\mathrm{e}^{t-\varphi}) - gt^2/2$	$X_5 + X_6, X_8 + X_6 - X_7$	2.2b
34	$yQ((x - t^2/2)/y) + lt^2$	$X_3 + X_6, X_8 - 2X_7$	2.3
35	$yQ(x/y) + lt^2$, $l \neq -g/2$	$X_6, X_8 - 2X_7$	2.4a при $\alpha = 0$, $\beta = -2$
36	$\mathrm{e}^{\beta\varphi/\alpha}\, Q(r\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi/\alpha}) + lt^2$, $(\beta + 2)(g + 2l) = 0$	$X_6, X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$	2.4a при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$
37	$Q(y) + k_1x - gt^2/2$	$X_6, X_8 + \alpha X_1$	2.4b при $\alpha \neq 0$
38	$Q(x, y) - gt^2/2$	X_6, X_8	2.4b при $\alpha = 0$
39	$t\,\mathrm{e}^{-\varphi/\alpha}\, Q(r\,\mathrm{e}^{\varphi/\alpha}/t) - gt^2/2$	$X_7, X_8 + \alpha X_5$	2.5 при $\alpha \neq 0$
40	$yQ(t) + x(k_1 + l/t) - gt^2/2$	$X_3, X_8 - X_7$	2.6a при $\alpha = -1$
41	$Q(y - \alpha \ln t)$	$X_3, X_8 + X_1 + \alpha X_2$	2.6b
42	$Q(y) + k_1x + k \ln t - gt^2/2$	X_3, X_8	2.6c
43	$Q(t)(x - ty) + (k_1t + k_2)y - gt^2/2$	$X_2 + X_3, X_8 - X_7$	2.7
44	$yQ(t) + x(k_1 + lt) - gt^2/2$	$X_1, X_8 - X_7$	2.8a при $\alpha = -1$
45	$Q(x - \alpha \ln t, y) + k_1 \ln t - gt^2/2$	$X_8 + \alpha X_1$	1.1
46	$\mathrm{e}^{\beta\varphi/\alpha}\, Q(r\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi/\alpha}, t\,\mathrm{e}^{-(\beta+1)\varphi/\alpha}) + Q_0(t) - gt^2/2$, $(\beta + 1)tQ_0''' + (\beta + 2)Q_0'' = 0$	$X_8 + \alpha X_5 + \beta X_7$	1.2 при $\alpha \neq 0$
47	$t^\gamma Q(xt^{-\gamma}, yt^{-\gamma}) + Q_0(t) - gt^2/2$, $tQ_0''' + \gamma Q_0'' = 0$, $\gamma = (\beta + 2)/(\beta + 1)$	$X_8 + \beta X_7$	1.2 при $\alpha = 0$, $\beta \neq -1$
48	$yQ(x/y, t) - gt^2/2$	$X_8 - X_7$	1.2 при $\alpha = 0$, $\beta = -1$
49	$\mathrm{e}^{-t}\, Q(r\,\mathrm{e}^t, \varphi - \alpha t) - gt^2/2$	$X_8 + \alpha X_5 + X_6 - X_7$	1.3

Первое уравнение (7) принимает вид

$$(\alpha x - y)G_x + (\alpha y + x)G_y = \alpha G + b_1. \tag{8}$$

В полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ уравнение (8) имеет следующее представление:

$$G_\varphi + \alpha r G_r = \alpha G + b_1.$$

Общее решение этого уравнения зависит от α:

$$\alpha \neq 0: \qquad G(r,\varphi) = \mathrm{e}^{\alpha\varphi}\, Q(r\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}) - b_1/\alpha,$$
$$\alpha = 0: \qquad G(r,\varphi) = b_1\varphi + Q(r).$$

Используя преобразования эквивалентности, можно считать, что $b_1 = 0$ в случае $\alpha \neq 0$. Таким образом, получаем

$$\alpha \neq 0: \qquad H = \mathrm{e}^{\alpha\varphi}\, Q(r\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}) - gt^2/2,$$
$$\alpha = 0: \qquad H = b_1\varphi + Q(r) + a_2t^2.$$

Заключение. Исследованы двумерные уравнения Грина — Нагди в случае рельефа дна, зависящего от времени. Групповая классификация этих уравнений выполнена относительно функции, описывающей топографию дна. Для групповой классификации применялся алгебраический подход, позволяющий упростить метод решения классифицирующих уравнений (5). Этот подход можно применить, так как операторы, допустимые уравнениями (1), составляют алгебру Ли, которая является подалгеброй алгебры Ли $L_8 = \{X_1, X_2, \dots, X_8\}$. Поскольку действия преобразований эквивалентности (3) совпадают с действиями внутренних автоморфизмов алгебры Ли L_8, приведенных в табл. 2, для групповой классификации можно использовать оптимальную систему подалгебр алгебры Ли L_8. С помощью операторов выбранной подалгебры, приведенных в табл. 3, 4, определяются коэффициенты x_i $(i = 1, 2, \dots, 8)$. В результате подстановки этих коэффициентов в классифицирующие уравнения (5) получена переопределенная система уравнений для функции $H(x, y, t)$. Общее решение этой системы определяет функцию $H(x, y, t)$, такую что система (1) допускает выбранную подалгебру. Окончательный результат групповой классификации представлен в табл. 5, 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Whitham G. B.** Linear and nonlinear waves. N. Y.: Wiley, 1974.
2. **Pedlosky J.** Geophysical fluid dynamics. 2nd ed. N. Y.: Springer, 1987.
3. **Макаренко Н. И.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Н. И. Макаренко, В. И. Налимов, В. Ю. Ляпидевский, П. И. Плотников, И. В. Стурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров, Л. В. Овсянников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Salmon R.** Lectures on geophysical fluid dynamics. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1998.
5. **Vallis G. K.** Atmospheric and oceanic fluid dynamics. Fundamentals and large-scale circulation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
6. **Петросян А. С.** Дополнительные главы теории мелкой воды. М.: Ин-т косм. исслед. РАН, 2014.
7. **Bonneton P., Barthélemy E., Chazel F., et al.** Recent advances in Serre — Green — Naghdi modelling for wave transformation, breaking and runup processes // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2011. V. 30. P. 589–597.

8. **Khakimzyanov G. S., Dutykh D., Fedotova Z. I., Mitsotakis D. E.** Dispersive shallow water wave modelling. Pt 1. Model derivation on a globally flat space // Comm. Comput. Phys. 2018. V. 23, N 1. P. 1–29.
9. **Matsuno Y.** Hamiltonian formulation of the extended Green — Naghdi equations // Phys. D. 2015. V. 301/302. P. 1–7.
10. **Serre F.** Contribution a l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // Houille Blanche. 1953. V. 3. P. 374–388.
11. **Su C. H., Gardner C. S.** Korteweg — de Vries equation and generalizations. 3. Derivation of the Korteweg — de Vries equation and Burgers equation // J. Math. Phys. 1969. V. 10, N 3. P. 10–23.
12. **Kaptsov E. I., Meleshko S. V., Samatova N. F.** The one-dimensional Green — Naghdi equations with a time dependent bottom topography and their conservation laws // Phys. Fluids. 2020. V. 32, N 12. 123607.
13. **Hammack J. L.** A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth // J. Fluid Mech. 1973. V. 60, iss. 4. P. 769–799.
14. **Dutykh D., Dias F.** Water waves generated by a moving bottom // Tsunami and nonlinear waves. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. P. 65–96.
15. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. **Olver P. J.** Applications of Lie groups to differential equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1986.
17. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
18. **Bluman G. W.** Symmetries and differential equations / G. W. Bluman, S. Kumei. N. Y.: Springer-Verlag, 1989.
19. **CRC handbook** of Lie group analysis of differential equations: In 3 v. / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1996.
20. **Gaeta G.** Nonlinear symmetries and nonlinear equations. Dordrecht: Kluwer, 1994.
21. **Багдерина Ю. Ю., Чупахин А. П.** Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Грина — Нагди // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 26–35.
22. **Siriwat P., Kaewmanee C., Meleshko S. V.** Symmetries of the hyperbolic shallow water equations and the Green — Naghdi model in Lagrangian coordinates // Intern. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 86. P. 185–195.
23. **Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I., Meleshko S. V.** Symmetries and difference schemes of the 1D Green — Naghdi equations // J. Nonlinear Math. Phys. 2020. V. 28, N 1. P. 90–107.
24. **Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A.** On the equation for the power moment generating function of the Boltzmann equation. Group classification with respect to a source function // Group analysis of differential equations and integrable systems. Nicosia: Univ. Cyprus, 2012. P. 98–110.
25. **Чиркунов Ю. А.** Обобщенные преобразования эквивалентности и групповая классификация систем дифференциальных уравнений // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 2. С. 3–13.
26. **Касаткин А. А.** Симметрийные свойства систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 71–81.
27. **Mkhize T. G., Moyo S., Meleshko S. V.** Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations. Algebraic approach // Math. Methods Appl. Sci. 2015. V. 38. P. 1824–1837.
28. **Opanasenko S., Boyko V., Popovych R. O.** Enhanced group classification of nonlinear diffusion-reaction equations with gradient-dependent diffusivity // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 484, N 1. 123739.

29. **Базденков С. В., Морозов Н. Н., Погуце О. П.** Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 4. С. 818–822.
30. **Ляпидевский В. Ю., Гаврилова К. Н.** Дисперсионные эффекты и блокировка потока при обтекании порога // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 45–58.
31. **Matsuno Y.** Hamiltonian structure for two-dimensional extended Green — Naghdi equations // Proc. Roy. Soc. Math. Phys. Engng Sci. 2016. V. 472. 2190.
32. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. N. Y.: Springer, 2005.
33. **Hearn A. C.** REDUCE users manual, ver. 3.3. Santa Monica: Rand Corp. CP 78, 1987.
34. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
35. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

Поступила в редакцию 14/III 2022 г.,
после доработки — 21/IV 2022 г.
Принята к публикации 25/IV 2022 г.