

ЛИТЕРАТУРА

1. Калмыков А. А., Кондратьев В. Н., Немчинов И. В. О разлете мгновенно нагретого вещества и об определении его уравнения состояния по величине давления и импульса.— ПМТФ, 1966, № 5.
2. Bushnell J. C., McCloskey D. J. Thermoelastic stress production in solid.— J. Appl. Phys., 1968, vol. 39, N 12.
3. White R. M. Elastic wave generation by electron bombardment or electromagnetic wave absorption.— J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, N 12.
4. Fox Jay A., Barr D. N. Laser induced stress wave in 6061-T6 aluminium.— Appl. Optics, 1973, vol. 12, VII.
5. Anderholm N. C., Boade R. R. Laser-induced stress wave in quartz-phenolic.— J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, N 2.
6. Таблицы физических величин. Справочник под редакцией И. К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976.
7. Дзенис В. В., Липовский В. Я. Исследование влияния геометрических размеров на скорость распространения и декремент затухания продольных волн в фторопластах.— Механика полимеров, 1966 т. 4.
8. Калашников Н. Г., Кулешова Л. В., Павловский М. Н. Ударное сжатие политетрафторэтилена до давлений 1,7 Мбар.— ПМТФ, 1972, № 4.
9. Абашкин Б. И., Калмыков А. А., Плешанов Ю. Е. Измерение теплового давления в веществе, нагретом излучением оптического квантового генератора.— ПМТФ, 1967, № 5.

УДК 539.3 + 539.4

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗБРОСА ПРОЧНОСТИ
СТЕКЛОПЛАСТИКА

А. А. Ермак, А. М. Михайлов

(Новосибирск)

Известно, что дефекты структуры приводят к концентрации напряжений и тем самым к снижению прочности стеклопластика. Поскольку расположение этих дефектов в реальных образцах носит в большой степени случайный характер, прочность этих образцов колеблется, т. е. имеется некоторое распределение числа испытаний по прочности. Это распределение в отличие от поля напряжений внутри стеклопластика легко поддается экспериментальному определению.

Ниже приводятся примеры вычисления концентрации напряжений, вызванной различными системами разрывов волокон, и на основе полученных результатов вычисляется разброс прочности стеклопластика, имеющего некоторую регулярную систему начальных дефектов, при появлении в случайной точке нового дефекта. Предполагается, что стеклопластик состоит из чередующихся волокон и слоев связующего, причем волокна работают только на растяжение — сжатие, а связующее — только на сдвиг.

1. Концентрация нормальных напряжений при различном расположении дефектов. Пусть образец растянут на бесконечности постоянным напряжением σ , напряжение в точках разрыва волокон равно нулю. Для удобства вычтем из решения напряжение однородного растяжения. Тогда для оставшейся части имеем отсутствие напряжений на бесконечности и напряжение $-\sigma$ в точках разрыва волокон.

Если имеется единственный разрыв волокна с номером k при значении ординаты $y = y_k$ (y отсчитывается вдоль волокна), то распределение напряжения в j -м волокне дается формулой [1]

$$(1.1) \quad \sigma_j(\eta) = -\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi} \exp\left(-2\beta \left|\eta - \eta_k \sin \frac{s}{2}\right|\right) \sin \frac{s}{2} \cos(j-k) s ds.$$

Здесь $\eta = y/\sqrt{Hh}$ — безразмерная координата вдоль волокна; h, H — размеры волокна и слоя связующего в направлении, перпендикулярном волокну; $\beta^2 = G/E$, где E и G — модули Юнга и сдвига соответственно волокна и связующего. В частности,

$$\sigma_j(\eta_k) = \frac{\sigma}{4(k-j)^2 - 1}, \quad \sigma_{k\pm 1}(\eta_k) = \sigma/3,$$

т. е. по соседству с единственным разрывом волокно испытывает напряжение на $1/3$ больше номинального (с учетом растяжения на бесконечности).

Если имеется несколько разрывов волокон в точках η_m^n (m — номер порванного волокна, n — номер разрыва на m -м волокне), то для расчета поля напряжений можно воспользоваться принципом суперпозиции. Очевидно, что $\sum_m \sum_n c_m^n \sigma_j(\eta)$, где c_m^n — постоянные числа, а $\sigma_j(\eta)$ взято из (1.4), удовлетворяет уравнениям равновесия стеклопластика. Значения c_m^n подбираются из условий равенства напряжения $-\sigma$ на разрывах. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения c_m^n

$$(1.2) \quad \sum_m \sum_n c_m^n \frac{1}{2} \int_0^\pi \exp\left(-2\beta|\eta_m^n - \eta_\mu^\nu| \sin \frac{s}{2}\right) \sin \frac{s}{2} \cos(m - \mu) s ds = 1.$$

Пары индексов m, n и μ, ν пробегает все точки разрыва.

Уравнения равновесия стеклопластика (см. [1]) являются дифференциально-разностным аналогом уравнения Лапласа. Поэтому можно показать, что для них имеет место принцип максимума, т. е. напряжения не могут принимать наименьших и наибольших значений вне соседства с разрывами волокон (координаты точек с экстремальными напряжениями такие же, как у точек разрыва, а номера волокон отличаются на единицу).

Рассмотрим несколько частных случаев таких, что благодаря симметрии в расположении разрывов все точки разрыва равноправны, и поэтому все c_m^n в (1.2) одинаковы и равны c . При этом в каждом случае в (1.2) останется лишь одно уравнение.

А. Периодическая система разрывов, расположенных вдоль прямой, перпендикулярной волокнам. В этом случае $\eta_m^n = \eta_\mu^\nu = 0, m, \mu = \dots, -2p, -p, 0, p, 2p, \dots, p$ — некоторое натуральное число, $p > 1$. Система (1.2) принимает вид

$$c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \frac{s}{2} \cos p(m - \mu) s ds = 1$$

(μ — целое), откуда

$$\frac{1}{c} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \sin s \cos 2pr s ds = \frac{\pi}{2p} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}.$$

При выводе последнего соотношения использована формула [2]

$$(1.3) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos kps = \frac{2\pi}{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{2\pi k}{p}\right)$$

(δ — функция Дирака). Таким образом, напряжение в волокнах на линии разрывов равно

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_j(0)}{\sigma} &= \frac{2p}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \sin s \cos 2(pm - j) s ds = \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{2p} \left[\sin \frac{\pi(2j+1)}{2p} \sin \frac{\pi(2j-1)}{2p} \right]. \end{aligned}$$

В волокне, соседнем с разорванным ($j = 1$), имеем

$$(1.4) \quad \frac{\sigma_1(0)}{\sigma} = \sin \frac{\pi}{2p} \left/ \sin \frac{3\pi}{2p} \right.$$

При $p = 2$ (волокна порваны через одно)

$$\frac{\sigma_j(0)}{\sigma} = \left(2 \sin \frac{\pi(2j+1)}{4} \sin \frac{\pi(2j-1)}{4} \right)^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{на целых волокнах,} \\ -1 & \text{на порванных волокнах.} \end{cases}$$

Следовательно, целые волокна испытывают напряжение вдвое больше номинального. Этот результат можно получить и не обращаясь к (1.4) из условий равновесия и симметрии задачи.

В таблице приведены значения $\sigma_1(0)/\sigma$, вычисленные по формуле (1.4) для нескольких значений p . Таким образом, при $p \geq 6$ концентрация напряжений, создаваемая периодической системой дефектов, вблизи дефекта практически такая же, как и при наличии единственного разрыва.

Б. Периодическая система разрывов, расположенных вдоль волокна. В этом случае в (1.2) $m = \mu = 0$, $\eta_0^n = nL$, $\eta_0^v = vL$, n, v — целые и

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-2\beta L |n - v| \sin s) \sin s ds = \int_0^{\pi/2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2\beta \times \right. \\ &\quad \left. \times Ln \sin s) \right] \sin s ds = \int_0^{\pi/2} \operatorname{cth}(\beta L \sin s) \sin s ds. \end{aligned}$$

Напряжения в волокнах на линии разрыва равны

$$(1.5) \quad \frac{\sigma_j(0)}{\sigma} = - \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{cth}(\beta L \sin s) \sin s \cos 2js ds}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{cth}(\beta L \sin s) \sin s ds}.$$

В предельном случае $\beta L \ll 1$ используем формулу 1.411.8 из [3]

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5) \quad \text{при } x \rightarrow 0$$

и после вычисления всех нужных интегралов получим

$$\frac{\sigma_j(0)}{\sigma} = \frac{(\beta L)^2 \delta_{1j} - 0,066 (\beta L)^4 (\delta_{1j} - 0,25\delta_{2j})}{12 + 2(\beta L)^2 - 0,1(\beta L)^4} + O(\beta^5 L^5)$$

при $\beta L \rightarrow 0$ (δ_{ij} — символ Кронекера). В частности,

$$\frac{\sigma_1(0)}{\sigma} \approx (\beta L)^2 \frac{1 - 0,066 (\beta L)^2}{12 + 2(\beta L)^2 - 0,1(\beta L)^4}.$$

Чем чаще расположены дефекты структуры, тем концентрация напряжений меньше и при $\beta L \rightarrow 0$ исчезает совсем.

В. *Прямоугольная сетка дефектов.* Пусть период сетки равен L вдоль волокна и натуральному числу p ($p \geq 2$) в направлении, перпендикулярном волокнам. В (1.2) нужно положить в этом случае

$$\eta_m^n = nL, \quad \eta_\mu^v = \nu L, \quad m, \mu = \dots, -2p, -p, 0, p, 2p, \dots, \\ n, \nu = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \quad c_m^n = c.$$

Тогда, используя (1.3), получим

$$\frac{1}{c} = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos 2kps \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta Ll \sin s) \sin s ds = \\ = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2ps - 2\pi k) \operatorname{cth}(\beta L \sin s) \sin s ds = \\ = \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{[p/2]} \operatorname{cth}\left(\beta L \sin \frac{\pi k}{p}\right) \sin \frac{\pi k}{p} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{k,p/2}\right)$$

($[p/2]$ — целая часть числа);

$$(1.6) \quad \frac{\sigma_j(0)}{\sigma} = -c \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{[p/2]} \operatorname{cth}\left(\beta L \sin \frac{\pi k}{p}\right) \sin \frac{\pi k}{p} \cos \frac{2\pi kj}{p} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{k,p/2}\right).$$

Пусть дефекты расположены предельно плотно в направлении, перпендикулярном волокнам ($p = 2$). Тогда напряжение в целых волокнах, даваемое (1.6), равно σ , как и должно быть. При $p = 3$ соответственно имеем $\sigma/2$. Эти результаты можно получить и без решения уравнений из симметрии и условий равновесия. При $p \rightarrow \infty$ суммы в (1.6) превращаются в интегралы и в пределе получается формула (1.5). При $\beta L \rightarrow \infty$ получается формула для одного ряда дефектов из примера А. Если в (1.6) устремить βL к нулю, то, заменив $\operatorname{cth} \alpha$ через $1/\alpha$ и суммируя косинусы, получим, что напряжения распределены между волокнами равномерно

$$\sigma_j(0)/\sigma = 1/(p - 1).$$

Г. *Два дефекта.* В (1.2) следует положить $m = 0, \eta_0 = 0, \mu = p, \eta_p = L, c_0 = c_1 = c,$

$$\frac{1}{c} = \int_0^{\pi/2} [1 + \exp(-2\beta L \sin s) \cos 2ps] \sin s ds.$$

Напряжение в любой точке j -го волокна дается формулой

$$(1.7) \quad \frac{\sigma_j(\eta)}{\sigma} = -c \int_0^{\pi/2} [\exp(-2\beta |\eta| \sin s) \cos 2js + \\ + \exp(-2\beta |L - \eta| \sin s) \cos 2(p - j)s] \sin s ds.$$

Если два дефекта расположены рядом ($p = 1, L = 0$), то $\sigma_{-1}(0)/\sigma = \sigma_2(0)/\sigma = 3/5$. Наиболее опасное расположение дефектов ($p = 2, L = 0$) приводит к концентрации $\sigma_1(0)/\sigma = 5/7$.

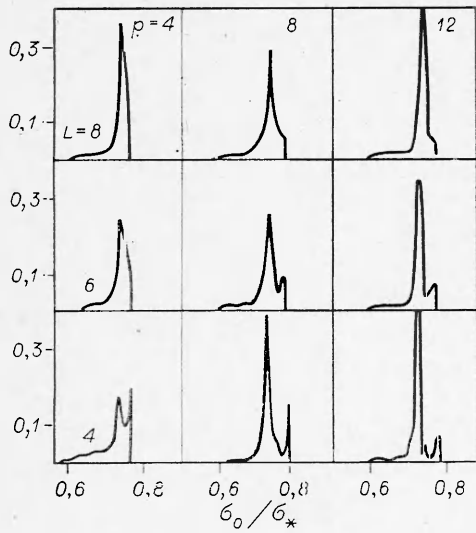
2. *Разброс величины прочности стеклопластика.* Используя формулы п. 1, рассмотрим, с какой вероятностью при испытании стеклопластика на растяжение будет наблюдаться то или иное значение прочности. Предположим, что в образце первоначально имеется некоторое количество

дефектов (разрывов волокон). Пусть волокно обладает прочностью на разрыв σ_* . Пусть далее σ_0 — такое наименьшее растягивающее напряжение на бесконечности, при котором в какой-нибудь точке одного из волокон напряжение достигает предела прочности σ_* . Тогда под прочностью образца с данной системой дефектов будем понимать отношение σ_0/σ_* . Очевидно, что определенная таким образом прочность не зависит от σ_* , а определяется лишь геометрией расположения дефектов.

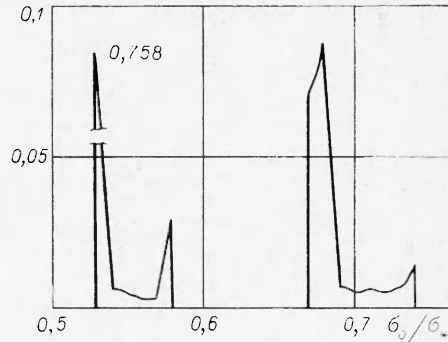
Приступим теперь к следующей серии «испытаний». Предположим, что к первоначальной системе дефектов добавлен еще один произвольно расположенный дефект, и вычислим прочность образца в этом случае. Заставим дополнительный дефект пробегать весь образец. Каждому его положению будет соответствовать свое значение прочности. Таким образом, получим распределение числа «испытаний» по величине прочности образца.

Предположим, что начальная система дефектов представляет собой прямоугольную сетку (пример В). Согласно принципу максимума, прочность образца в этом случае определяется формулой (1.6) при $j = 1$. Пусть теперь в произвольной точке элементарной ячейки первоначальной сетки дефектов появляется новый дефект. Для точного вычисления прочности образца в этом случае необходимо решить систему (1.2), в которой для такой конфигурации дефектов уже нет симметрии и число различных c_m^n в общем случае бесконечно. В таком виде эта система представляется недоступной для решения, поэтому в дальнейшем при вычислении прочности образца будет учитываться взаимодействие нового дефекта лишь с одним или четырьмя ближайшими дефектами первоначальной сетки. В первом случае прочность определяется из формулы (1.7), во втором — из аналогичной формулы для пяти дефектов, которая может быть получена из (1.2), но не выписана здесь ввиду громоздкости. Очевидно, что в силу симметрии достаточно заставить новый дефект пробегать лишь четверть элементарной ячейки первоначальной сетки. Из результатов п. 1 следует, что погрешность, которая вносится в распределение при замене всей сетки одним или несколькими ближайшими дефектами, уменьшается с ростом периодов сетки.

На фиг. 1 изображены результаты «испытаний» в предположении, что вновь образовавшийся дефект взаимодействует лишь с четырьмя ближайшими разрывами первоначальной сетки дефектов. По осям абсцисс отложена прочность образца, а по оси ординат — доля испытаний, при которых была обнаружена данная прочность. Площади под графиками равны единице. В вертикальных столбцах расположены графики, полученные при одном и том же периоде сетки в направлении, перпендикулярном волокнам p , но при разных значениях периода сетки вдоль волокон L , а в горизонтальных строках — при постоянных значениях L . Отметим сразу же, что при учете взаимодействия нового дефекта лишь с одним ближайшим дефектом первоначальной сетки результаты при небольшом количестве отличии качественно совпадают с приведенными на фиг. 1. Как следует из (1.4), (1.2), напряжение вокруг разрыва быстро убывает с удалением от него, поэтому два разрыва, расположенные на большом расстоянии, слабо чувствуют друг друга, и прочность образца с такими дефектами близка к $3/4$ (прочности образца с одним дефектом). Поскольку с увеличением периодов первоначальной сетки все больший процент новых дефектов располагается достаточно далеко от всех первоначальных, все больший процент «испытаний» должен давать значение прочности около $3/4$. Поэтому на графиках наблюдается пик, растущий с ростом периодов p и L . Наблюдающийся для малых L второй пик при больших значениях прочности соответствует появлению дополнительного разрыва на уже порванном волокне.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Интересно было бы определить, каким образом будет происходить дальнейшее разрушение образца, т. е. будут ли максимальные напряжения достигаться в окрестности нового дефекта или в окрестности одного из первоначальных

дефектов. В случае, когда новый дефект взаимодействует с четырьмя первоначальными, такое исследование было проведено. Оказалось, что если новый дефект расположен на одном из первоначально целых волокон, но не слишком далеко от одного из дефектов сетки, дальнейшее разрушение происходит в окрестности нового дефекта; если же новый дефект расположен вдали от всех первоначальных или на уже порванном волокне, то дальнейшее разрушение происходит возле одного из первоначальных дефектов.

Для уточнения используемой модели можно попытаться каким-то образом учесть случайный (а не регулярный, как в расчетах) характер распределения первоначальных дефектов. Это можно сделать, например, усреднив результаты «испытаний» по нескольким первоначальным системам дефектов с различными параметрами p и L . Ясно, однако, что такое усреднение не даст качественно нового характера распределения прочности. Естественно предположить, что вероятность появления дополнительного дефекта в данной точке зависит от напряжения в этой точке, создаваемого первоначальной системой дефектов. Был проведен расчет в предположении, что вероятность появления дефекта пропорциональна k -й степени первоначального напряжения ($0 \leq k \leq 5$, $p=8$, $L=8$, учитывалось взаимодействие нового дефекта с четырьмя ближайшими). Качественный характер распределения и в этом случае остался прежним при небольших количественных изменениях.

До сих пор не учитывались динамические эффекты, т. е. считалось, что после появления дополнительного дефекта в образце сразу же устанавливается равновесное статическое распределение напряжений, соответствующее новой конфигурации дефектов. Однако на самом деле при внезапном разрыве волокна динамическая концентрация напряжения вблизи дефекта значительно превосходит статическую [4]. Естественно поэтому попытаться учесть динамические перегрузки при исследовании прочности образца.

Для точного решения динамической задачи о внезапном появлении нового дефекта необходимо учесть дифракцию вызванных его появлением упругих волн на дефектах первоначальной системы. Однако эта задача

весьма сложна, и решить ее пока не удастся. Поэтому в расчетах истинное динамическое поле напряжений заменялось суперпозицией динамического поля уединенного дефекта (см. [4]) со статическим полем первоначальной системы дефектов. Эта суперпозиция является точным решением задачи в каждой точке до тех пор, пока туда не придут упругие волны, отраженные от первоначальных дефектов. При такой постановке задачи появляется возможность в качестве первоначальной системы дефектов учесть всю бесконечную сетку.

Критерий разрушения волокна, следуя [5], примем в виде

$$\frac{1}{t_*} \int_{t-t_*}^t \sigma(\tau) d\tau = \sigma_*,$$

где σ_* — прочность волокна на разрыв; t_* — некоторое характерное время усреднения. Постановка условий прочности по максимальным напряжениям представляется нецелесообразной, так как напряжения весьма быстро меняются во времени. Небольшие изменения модели, например учет вязкости, могут сильно изменить максимальные значения напряжений и тем самым сделать полученные выводы сомнительными. Наконец, неестественно ставить поведение механической системы в зависимость от условий, имеющих место в течение нулевого промежутка времени. Поэтому при постановке условия прочности проводим усреднение по времени.

На фиг. 2 приведены результаты расчета для $p = 8$, $L = 8$. Усреднение в критерии прочности производилось по двум временам пробега волны сдвига в связующем между двумя соседними волокнами. Поскольку не учтена дифракция упругих волн на первоначальных дефектах, результаты эти являются весьма приближенными, но, по-видимому, все же правильно отражают качественную сторону явления. Учет динамических перегрузок приводит, как и следовало ожидать, к существенному уменьшению прочности образца. Правая кривая на фиг. 2, отвечающая более высоким значениям прочности, соответствует появлению дополнительного разрыва на уже порванном волокне.

Поступила 4 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. О разрушении однонаправленного стеклопластика. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19—20. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
5. Ермак А. А., Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений в стеклопластике. — ПМТФ, 1978, № 6.