

УДК 532.517.4.083.75

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОДИФФУЗИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ**

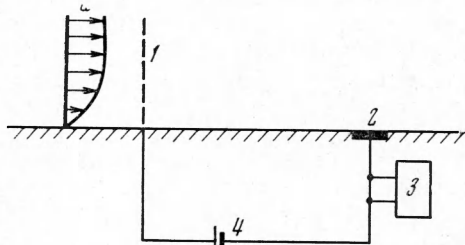
*Ю. Е. Боголюбов, П. И. Гешев, В. Е. Накоряков,  
И. А. Огородников*

(Новосибирск)

Решена задача о диффузии к поверхности плоской пластинки и цилиндрической проволочки в пульсирующем потоке вязкой несжимаемой жидкости. Определен квадрат модуля частотной характеристики электродиффузионного датчика, устанавливающий связь спектральной плотности пульсаций скорости потока (или пульсаций трения на стенке канала) со спектральной плотностью пульсаций потока массы на датчик.

Измерение интенсивности переноса вещества, точно так же как и измерение интенсивности переноса тепла в термоанемометрии, может быть использовано как средство изучения движения жидкости.

Простой метод измерения интенсивности переноса массы от контрольного датчика заключается в измерении предельного диффузионного тока электрохимической реакции. Особенности электрохимической ячейки и основы электродиффузионного метода измерений средних характеристик потока изложены в [1, 2]. Измерение силы вязкого трения текущей жидкости о стенку канала электродиффузионным методом выполнено в работах [3, 4]. Метод основан на определении интенсивности окислительно-восстановительной реакции на электроде, вделанном заподлицо с поверхностью,



Фиг. 1

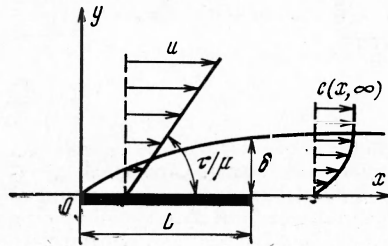
на которой необходимо измерить напряжение (фиг. 1). С целью уменьшения градиента концентрации ионов, участвующих в реакции, и исключения миграционного механизма переноса тока в раствор добавляют в избытке посторонний электролит, ионы которого не участвуют в реакции. При достаточно большом напряжении ячейки скорость определяется интенсивностью диффузионного переноса контрольных ионов к поверхности электрода меньшей площади. При этом связь величины скорости и пульсации скорости потока электролита с величиной диффузионного тока определяется из уравнения диффузии. Так как коэффициент диффузии контрольных ионов мал, то при достаточно малой длине измерительного электрода толщина диффузионного слоя будет либо много меньше линейного участка на профиле скорости в ламинарном потоке, либо меньше вязкого подслоя турбулентного пограничного слоя. Это обстоятельство значительно облегчает решение возникающих задач и позволяет с помощью электродиффузионного метода детально исследовать флуктуирующие течения в непосредственной близости у стенки.

Ниже определяются частотные характеристики плоского датчика для измерения касательного напряжения, вделанного заподлицо со стенкой канала, и помещенного в пульсирующий поток цилиндрического датчика для измерения скорости. Частотная характеристика линейной системы

(процесс, происходящий на контрольном электроде, описывается линейным уравнением) определяется как реакция этой системы на гармонический сигнал  $A(\omega)\exp(i\omega t)$ , т. е.

$$H(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$$

Здесь  $H(\omega)$  — частотная характеристика,  $B(\omega)$  — амплитуда сигнала на выходе системы. В рассматриваемом случае сигнал на входе системы — это пульсации амплитуды скорости или трения на стенке, сигнал на выходе системы — пульсации потока массы.



Фиг. 2

1. Частотная характеристика плоского датчика для измерения пульсаций касательного напряжения. Для определения частотной характеристики датчика необходимо найти решение нестационарного уравнения диффузии для пограничного диффузионного слоя на контрольном электроде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$c(x, 0, t) = 0, \quad c(0, y, t) = c(x, \infty, t) = c_\infty \quad (1.2)$$

Здесь  $x, y$  — продольная и поперечная координаты,  $t$  — время,  $c$  — концентрация реагирующих ионов,  $u$  — скорость электролита,  $D$  — коэффициент диффузии,  $c_\infty = \text{const}$ . Скорость в диффузионном слое представим в виде суммы

$$u = u_0 + u_- \quad (1.3)$$

где  $u_0$  — стационарная составляющая скорости,  $u_-$  — пульсационная составляющая скорости. Воспользовавшись малостью толщины диффузионного пограничного слоя (фиг. 2), примем для стационарной составляющей скорости выражение, предложенное В. Г. Левичем [5]

$$u_0 = \tau \mu^{-1} y \quad (1.4)$$

Здесь  $\tau$  — касательное напряжение на стенке,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости. Пульсационную составляющую скорости зададим в виде простой гармоники

$$u_- = \epsilon u_0 \exp(i\omega t) \quad (1.5)$$

где  $\omega$  — частота пульсаций,  $\epsilon = \text{const} \ll 1$ . Введем безразмерные переменные  $x^*, y^*, t^*, u^*, c^*, \omega^*$  с помощью равенств

$$\begin{aligned} x^* &= x/L, & y^* &= y(\tau/\mu LD)^{1/3}, & t^* &= t(\tau^2 D/\mu^2 L^2)^{1/3}, \\ u^* &= u(\mu^2/\tau^2 LD)^{1/3}, & c^* &= c/c_\infty, & \omega^* &= \omega(L^2 \mu^2/\tau^2 D) \end{aligned}$$

где  $L$  — длина контрольного электрода. В безразмерных переменных уравнение (1.1) и условие (1.2) принимают вид

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.6)$$

$$c^*(x^*, 0, t^*) = 0, \quad c^*(0, y^*, t^*) = c^*(x^*, \infty, t^*) = 1 \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.6)—(1.7) ищем в виде суммы

$$c^* = c_0^* + \exp(i\omega^* t^*) c_-^* \quad (1.8)$$

где  $c_0^*$  — стационарная составляющая концентрации,  $c_-^*$  — комплексная амплитуда пульсаций концентраций. В случае малых пульсаций скорости пульсации концентрации также будут малы, и после линеаризации уравнения (1.6) для определения поля концентрации имеем две задачи. Для стационарной составляющей  $c_0^*$  получаем задачу

$$y^* \frac{\partial c_0^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c_0^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.9)$$

$$c_0^*(x^*, 0) = 0, \quad c_0^*(0, y^*) = c_0^*(x^*, \infty) = 1$$

решение которой после введения новой независимой переменной  $\eta = y^* x^{*-1/3}$  легко определяется

$$c_0^* = \int_0^\eta \exp(-\eta^3/9) d\eta / \int_0^\infty \exp(-\eta^3/9) d\eta \quad (1.10)$$

Стационарный поток массы на единицу поверхности датчика равен

$$q_0 = \frac{D}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial c_0}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 0.806 D c_\infty (\tau / \mu L D)^{1/3} \quad (1.11)$$

Для амплитуды пульсаций концентрации получаем уравнение

$$i\omega^* c_-^* + y^* \frac{\partial c_-^*}{\partial x^*} + \epsilon y^* \frac{\partial c_-^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c_-^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.12)$$

с однородными граничными условиями

$$c_-^*(x^*, 0) = c_-^*(x^*, \infty) = c_-^*(0, y^*) = 0 \quad (1.13)$$

Задачу (1.12), (1.13) решим последовательно для случая малых, больших и умеренных частот пульсаций.

*Случай малых частот пульсаций* ( $\omega^* \ll 1$ ). Представим  $c_-^*$  в виде ряда по частоте

$$c_-^* = \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega^*)^n c_{n-}^* \quad (1.14)$$

Подставив ряд (1.14) в уравнение (1.12) и приравняв члены с одинаковыми степенями частоты, получим для  $c_{n-}^*$  систему рекуррентных уравнений

$$\epsilon y^* \frac{\partial c_0^*}{\partial x^*} + y^* \frac{\partial c_0^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c_{0-}^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.15)$$

$$c_{n-}^* + y^* \frac{\partial c_{n+1-}^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c_{n+1-}^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.16)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Решение первого уравнения дается простой зависимостью

$$c_{0-}^* = \frac{1}{3} \epsilon y^* \frac{\partial c_0^*}{\partial y^*} \quad (1.17)$$

Из этого решения видно, что «квазистационарная» часть комплексной амплитуды  $c_{0-}^*$  — не претерпевает сдвига по фазе по сравнению с наложенным сигналом, а амплитуда  $c_{0-}^*$  в  $1/3$  раз меньше среднего потока массы. Уравнения (1.16) после замены

$$c_{n-}^* = \epsilon x^{*2n/3} c_{n+}^*(\eta) \quad (1.18)$$

преобразуются в систему обыкновенных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c_{1+}^*}{d\eta^2} + 1/3 \eta^2 \frac{dc_{1+}^*}{d\eta} - 2/3 c_{1+}^* + \eta \frac{dc_0^*}{d\eta} &= 0 \\ \frac{d^2 c_{n+}^*}{d\eta^2} + 1/3 \eta^2 \frac{dc_{n+}^*}{d\eta} - 2n/3 c_{n+}^* &= c_{n-1+}^* \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $n = 2, 3, \dots$ . Начальные условия для системы (1.15) получаются из (1.13)

$$c_{n+}^*(0) = c_{n+}^*(\infty) = 0 \quad (1.20)$$

Здесь  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Задача (1.19), (1.20) решена на ЭВМ конечно-разностным методом для  $n < 4$ . Определены значения производных  $c_{n+}^{* \prime}$  в точке  $\eta = 0$  ( $c_{1+}^{* \prime}(0) = 0.0990$ ,  $c_{2+}^{* \prime}(0) = 0.0354$ ,  $c_{3+}^{* \prime}(0) = -0.0097$ ), необходимые для вычисления пульсационного потока массы с точностью до  $0$  ( $\omega^4$ ). Пульсационный поток массы на единицу поверхности датчика дается выражением

$$\begin{aligned} q_- = \frac{D}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial c_-}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \left( \frac{1}{3} 0.806 - \frac{1}{2} \omega^{*2} c_{2+}^{* \prime}(0) + \right. \\ \left. + i \left( \frac{3}{4} \omega^* c_{1+}^{* \prime}(0) - \frac{3}{8} \omega^{*3} c_{3+}^{* \prime}(0) \right) \right) \varepsilon \exp(i\omega^* t^*) D c_\infty (\tau / \mu L D)^{1/3} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Определим безразмерную частотную характеристику датчика как отношение безразмерного пульсационного потока массы  $q_-^* = q_-/q_0$  к безразмерному пульсационному касательному напряжению  $\tau_-^* = \tau_-/\tau_0$

$$H^* = q_-^*/\tau_-^* = 1/3 - 0.0213 \omega^{*2} + i(-0.092 \omega^* + 0.044 \omega^{*3}) \quad (1.22)$$

Размерное выражение для частотной характеристики получается по формуле

$$H = H^* q_0/\tau_0 \quad (1.23)$$

Известная теорема Хинчина [6] устанавливает связь между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе линейной системы через квадрат модуля частотной характеристики

$$S_1(\omega) |H(\omega)|^2 = S_2(\omega) \quad (1.24)$$

Здесь  $S_1$  — спектральная плотность сигнала на входе системы;  $S_2$  — спектральная плотность сигнала на выходе системы. В рассматриваемом случае сигнал на входе системы — это пульсации трения, сигнал на выходе — пульсации потока массы. Квадрат модуля частотной характеристики дает зависимость чувствительности датчика от частоты воспринимаемого сигнала и является важнейшей характеристикой электродиффузионного датчика. В случае малых частот имеем

$$|H^*|^2 = (1/3 - 0.0213 \omega^{*2})^2 + (-0.092 \omega^* + 0.044 \omega^{*3})^2 \quad (1.25)$$

*Случай высоких частот* ( $\omega^* \gg 1$ ). В уравнении (1.12) можно опустить член  $y^* \partial c_-^* / \partial x^*$ . Воспользовавшись для  $c_0^*$  в пределах диффузионного пограничного слоя линейной аппроксимацией

$$c_0^* = y^* \left( \frac{\partial c_0^*}{\partial y} \right)_{y^*=0} \quad (1.26)$$

получим для  $c_-^*$  вместо (1.12) следующее уравнение:

$$i\omega^* c_-^* + \varepsilon y^{*2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial c_0^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} = \frac{\partial^2 c_-^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.27)$$

Таблица 1

Квадрат модуля частотной характеристики для плоского датчика

$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$
0	0.1112	5	0.0395	10	0.0122	15	0.0046
1	0.1035	6	0.0305	11	0.0098	16	0.0038
2	0.0852	7	0.0249	12	0.0085	17	0.0031
3	0.0674	8	0.0193	13	0.0071	18	0.0029
4	0.0520	9	0.0161	14	0.0052	19	0.0025

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (1.13), имеет вид

$$c_-^* = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial c_0^*}{\partial y^*} \right)_{y=0} \left( \frac{iy^*}{\omega^*} + \frac{2}{\omega^{*2}} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial c_0^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \frac{2}{\omega^*} \exp(-y^* \sqrt{i\omega^*}) \quad (1.28)$$

Частотная характеристика с точностью до членов  $O(\omega^{*-2})$  дается равенством

$$H^* = \frac{8.68}{\omega^{*2}} (1 + i) \quad (1.29)$$

Квадрат ее модуля

$$|H^*|^2 = 37/\omega^{*3} \quad (1.30)$$

Случай умеренных частот пульсаций ( $\omega^* = 0$  (I)). Для определения квадрата модуля частотной характеристики полное уравнение (1.12) при граничных условиях (1.13) решено на ЭВМ методом прогонки. Численные данные для квадрата модуля частотной характеристики приведены в табл. 1. Подходящая аппроксимация для  $|H^{*2}|$ , совпадающая в предельных случаях с низко- и высокочастотными приближениями (фиг. 3) дается формулой

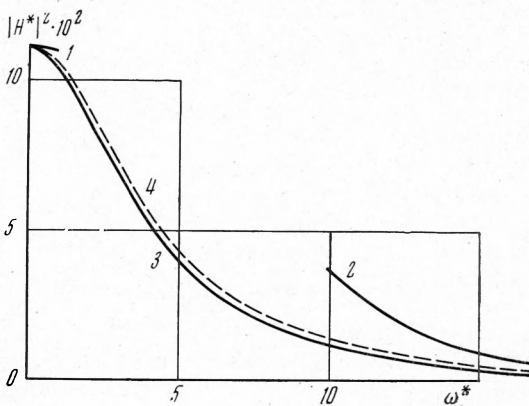
$$|H^*|^2 = ((9 + 0.54 \omega^{*2})^2 + (0.27 \omega^{*3})^2)^{-1/2} \quad (1.31)$$

По найденному значению  $|H^*|^2$ , зная из эксперимента спектральную плотность пульсаций потока массы  $S_2$ , можно по формуле (1.24) определить спектральную плотность пульсаций трения  $S_1$ .

Из формулы (1.31) видно, что чувствительность электродиффузионного датчика с возрастанием частоты воспринимаемого сигнала уменьшается экспоненциально. Однако полоса пропускания по частотам может быть увеличена за счет уменьшения контрольного электрода, это следует из вида безразмерной частоты.

2. Частотная характеристика цилиндрического датчика для измерения пульсаций скорости. Рассмотрим процесс диффузии к тонкому бесконечному цилиндру в пульсирующем потоке (фиг. 4). Скорость на бесконечности нормальна к образующей цилиндра и имеет вид

$$u_\infty = u_0 (1 + \varepsilon \exp(i\omega t)) \quad (2.1)$$



Фиг. 3

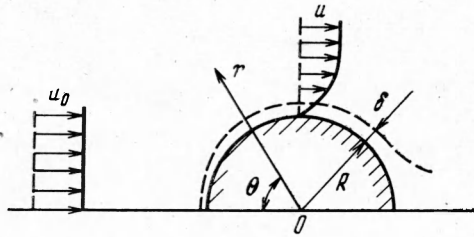
где  $u_0$  — стационарная составляющая скорости. Как показал Иллингворт [7], функция тока в этом случае дается выражением

$$\psi = \frac{u_0}{2} \left( 2 \frac{r}{R} \ln \frac{r}{R} - \frac{r}{R} + \left( \frac{r}{R} \right)^{-1} \right) \sin \theta (f_0 + \varepsilon f_1 \exp(i\omega t)) \quad (2.2)$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты с осью  $\theta = \pi$  в направлении свободного потока,  $R$  — радиус цилиндра

$$f_0 = \left( \ln \frac{7.938}{2\text{Re}} \right)^{-1}, \quad f_1 = \left( \ln \frac{\xi}{2\text{Re}} \right)^{-1}, \quad \xi = 8 \exp(-0.5772) \alpha^{-\beta}, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$$

$$\alpha^2 = 1 + i \frac{\omega \nu}{u_0^2}, \quad \text{Re} = \frac{R u_0}{\nu} \ll 1, \quad \text{Re} - \text{число Рейнольдса}$$



Фиг. 4

Будем считать [5], что профиль скорости в области диффузионного пограничного слоя линеен. Разложив функцию тока в окрестности  $r/R = 1$  и удерживая только первый член ряда, получим для функции тока выражение

$$\psi = F_0 y^2 \sin x \quad (2.3)$$

$$(F_0 = u_0 (f_0 + \varepsilon f_1 \exp(i\omega t)),$$

$$y = r/R - 1, \quad x = \theta)$$

Для продольной и нормальной составляющих скорости из (2.3) получаем

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2F_0 y \sin x, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F_0 y^2 \cos x \quad (2.4)$$

Уравнение диффузии в погранслоном приближении и граничные условия к нему в координатах  $x, y$  принимают вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{F_0}{R} \left( 2y \sin x \frac{\partial c}{\partial x} - y^2 \cos x \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

$$c(x, \infty, t) = c_\infty, \quad c(\pi, y, t) = c(x, 0, t) = 0 \quad (2.6)$$

Решение задачи (2.5)—(2.6) ищем в виде суммы

$$c = c_0 + \varepsilon \frac{f_1}{f_0} \exp(i\omega^* t) c_- \left( \omega^* = \omega \frac{\nu \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{4/3}}{u_0^2 f_0^{2/3}}, \quad \text{Pr} = \nu / D \right) \quad (2.7)$$

где  $\text{Pr}$  — диффузионное число Прандтля. Подставив в уравнение (2.5) выражение (2.7) и введя новую переменную

$$\eta = y \sqrt{2 \sin x} \left( 3 \text{Pr} \text{Re} f_0 \int_0^x \sqrt{2 \sin y} dy \right)^{-1/3}$$

для  $c_0$  получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + \eta^2 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} = 0, \quad c_0(0) = 0, \quad c_0(\infty) = c_\infty \quad (2.8)$$

Решение этой задачи дается формулой

$$c_0 = c_\infty \int_0^\eta \exp(-x^3/3) dx \int_0^\infty \exp(-x^2/3) dx \quad (2.9)$$

Стационарный поток массы на единицу поверхности датчика равен

$$q_0 = \frac{Dc_\infty}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial c_0}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 1.158 Dc_\infty (\text{Pr Re } f_0)^{1/3} \quad (2.10)$$

Для пульсационной составляющей концентрации  $c_-$ , подставив в (2.5) новую переменную  $y_1 = y (\text{Pr Re } f_0)^{1/3}$  и выражение (2.7), получим уравнение

$$i\omega^* c_- + 2y_1 \sin x \frac{\partial c_-}{\partial x} - y_1^2 \cos x \frac{\partial c_-}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 c_-}{\partial y_1^2} \quad (2.11)$$

Граничные условия для этого уравнения однородны

$$c_-(x, \infty) = c_-(\pi, y_1) = c_-(x, 0) = 0 \quad (2.12)$$

Решение задачи (2.11), (2.12) найдем для случая малых, больших и умеренных частот пульсаций.

*Случай малых частот пульсаций* ( $\omega^* \ll 1$ ). Решение ищем в виде ряда

$$c_- = \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega^*)^n c_{n-} \quad (2.13)$$

Для  $c_{0-}$  из (2.11) получаем уравнение, решение которого имеет простой вид

$$c_{0-} = 1/3 y_1 \partial c_0 / \partial y_1 \quad (2.14)$$

Подставляя в уравнение (2.11) новые переменные

$$y_2 = y_1 \sqrt{2 \sin x}, \quad x_2 = \int_0^x \sqrt{2 \sin y} dy$$

и ряд (2.13), получим систему рекуррентных уравнений

$$2 \sin x_2 \left( y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) c_{n-} = c_{n-1-} \quad (2.15)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Функция Грина для дифференциального оператора

$$p = y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$$

определена в работе [8] и имеет вид

$$G(x_2, y_2; x, y) = \frac{(y_2 y)^{1/2}}{3} \exp\left(-\frac{y_2 + y}{9(x_2 - x)}\right) I_{1/3}\left(\frac{2(y_2 y)^{3/2}}{9(x_2 - x)}\right) \quad (2.16)$$

Здесь  $I_{1/3}$  — функция Бесселя. Решение уравнения (2.15) с помощью функции Грина (2.16) дается выражением

$$c_{n-} = 2 \int_0^{x_2} \int_0^\infty G \sin x c_{n-1-} dx dy \quad (2.17)$$

Определим безразмерную частотную характеристику как отношение безразмерного пульсационного потока массы  $q_-^* = f_1 q_- / q_0 f_0$  к безразмерным пульсациям скорости  $u_-^* = u_- / u_0$

$$H^* = 1.82 q_-^* / u_-^* \quad (2.18)$$

Квадрат модуля частотной характеристики с точностью до  $O(\omega^{*3})$  дается выражением

$$|H|^2 = \left[ \int_0^{x_0} \left( \frac{\partial c_{0-}}{\partial y_2} \right)_{y_2=0} dx_2 \right]^2 + \omega^{*2} \left\{ 2 \int_0^{x_0} \left( \frac{\partial c_{0-}}{\partial y_2} \right)_{y_2=0} dx \int_0^{x_0} \left( \frac{\partial c_{2-}}{\partial y_2} \right)_{y_2=0} dx_2 - \right. \\ \left. - \left[ \int_0^{x_0} \left( \frac{\partial c_{1-}}{\partial y_2} \right)_{y_2=0} dx_2 \right]^2 \right\} = 0.231 - 1.81 \omega^{*2} + O(\omega^{*3}) \quad (2.19)$$

$$\left( x_0 = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \sin x} dx = 3.38 \right)$$

Вычисление интегралов в (2.19) выполнено на ЭВМ «Мир-1».

*Случай больших частот* ( $\omega^* \gg 1$ ). В уравнении (2.11) оставим вторые производные и член, содержащий большой параметр  $\omega^*$ . Для  $c_-$  получаем уравнение

$$i\omega^* c_- + \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 c_-}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

решение которого, удовлетворяющее условиям (2.12), имеет вид

$$c_- = \frac{1}{2 \sqrt{i\omega^*}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \exp(-\sqrt{i\omega^*} y) dy - \exp(-\sqrt{i\omega^*} y) \times \right. \quad (2.21) \\ \left. \times \int_0^y \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \exp(\sqrt{i\omega^*} y) dy + \exp(\sqrt{i\omega^*} y) \int_{\infty}^y \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \exp(-\sqrt{i\omega^*} y) dy \right\}$$

Для квадрата модуля частотной характеристики получаем

$$|H^*|^2 = 0.905/\omega^{*3} + O(\omega^{*-4.5}) \quad (2.22)$$

*Случай умеренных частот* ( $\omega^* = O(1)$ ). В этом общем случае задача (2.11), (2.12) решена методом прогонки на БЭСМ-6. Данные для квадрата

Таблица 2

Квадрат модуля частотной характеристики для цилиндрического датчика

$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$	$\omega^*$	$ H^* ^2$
0	0.235	1.2	0.146	2.4	0.057	3.6	0.023
0.2	0.231	1.4	0.126	2.6	0.049	3.8	0.020
0.4	0.221	1.6	0.109	2.8	0.042	4	0.017
0.6	0.206	1.8	0.093	3	0.036	5	0.009
0.8	0.187	2	0.079	3.2	0.031	6	0.006
1	0.167	2.2	0.067	3.4	0.026	8	0.002

модуля передаточной функции приведены в табл. 2. Эти данные хорошо сопрягаются со значениями, полученными в низко- и высокочастотном приближениях (фиг. 5). Значения  $|H^*|^2$  можно аппроксимировать выражением

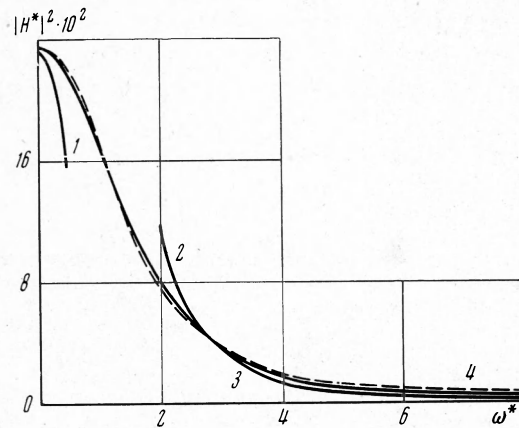
$$|H^*|^2 = 0.235 / (1 + 0.312 \omega^{*2} + 0.103 \omega^{*3}) \quad (2.23)$$



Размерное выражение квадрата модуля передаточной функции получается по формуле

$$|H|^2 = |H^*|^2 q_0^2 / u_0^2 \quad (2.24)$$

Зная из эксперимента спектральную плотность пульсаций потока массы  $S_2(\omega)$ , при помощи квадрата модуля частотной характеристики опре-



Фиг. 5

делим спектральную плотность пульсаций скорости  $S_1(\omega)$  по формуле

$$S_1(\omega) = S_2(\omega) / |H(\omega)|^2 \quad (2.25)$$

Квадрат модуля частотной характеристики (2.28) показывает, что чувствительность цилиндрического электродиффузионного датчика падает с ростом частоты воспринимаемого сигнала, с той же скоростью, что и чувствительность плоского датчика. Из вида безразмерной частоты следует, что полоса пропускания датчика по частотам может быть увеличена за счет уменьшения диаметра проволоки.

Поступила 11 XI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reiss L. P., Hanratty T. J. An experimental study of the unsteady nature of the viscous sublayer A.I.Ch. E. Journal, 1963, vol. 9, No. 2.
2. Lebouche M. La polarographie, moyen detude du mouvement des liquides. Chim. and Ind., Génie Chim., 1967, vol. 97, No. 12.
3. Hanratty T. J. Study of turbulence close to a solid wall. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2.
4. Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Накоряков В. Е., Кузьмин В. А. Применение электрохимического метода измерения трения в гидродинамике двухфазных сред. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2, Минск, «Наука и техника», 1968.
5. Левиц В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
6. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
7. Illingworth C. R. Fluctuating flow at small Reynolds number. Z. Angew. Math. und Phys., 1963, vol. 14, No. 6.
8. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced — convection heat and mass transfer, pt 1. Low speed flows. J. Fluid Mech. 1965, vol. 23, pt 2.