

3. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. — Киев: Наук. думка, 1973.
4. Федосенко В. С. О развитии волн, возникающих от движущихся периодических возмущений. — Морск. гидрофиз. исслед., 1971, № 1.
5. Доценко С. Ф., Савоськин В. М. Неустойчившиеся поверхностные волны в потоке конечной глубины, генерируемые областью переменных давлений. — В кн.: Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1982.
6. Доценко С. Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустойчившихся корабельных волнах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
7. Бугатов А. Е., Черкесов Л. В. Неустойчившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости. — ПМ, 1970, т. 6, № 8.
8. Бугатов А. Е., Черкесов Л. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений. — ПМТФ, 1984, № 2.
9. Красильников В. Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. — Акуст. журн., 1962, т. 8, вып. 1.
10. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеиздат, 1967.
11. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометеиздат, 1980.
12. Бугатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустойчившееся волновое движение однородной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.

Поступила 27/V 1985 г.

УДК 532,5 : 532,5172.4

## ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗОВАННОЙ ЗАВИХРЕННОСТИ В ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

Ю. Н. Григорьев, В. Б. Левинский

(Новосибирск)

В исследованиях последнего десятилетия, в первую очередь экспериментальных, обзор которых приведен в [1], и численных (см. библиографию в [2]), широко изучались новые объекты в турбулентных потоках — организованные или когерентные структуры (КС). В результате сформулированы характерные черты КС, общие для различных течений. В частности, отмечено преимущественное влияние невязких механизмов на их формирование и развитие. В этой связи в аналитических моделях КС используются точные и приближенные решения уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости. Однако такой подход, естественно, приводит к вынужденным упрощениям и не позволяет достаточно полно учесть имеющуюся информацию о КС. Так, в моделях сдвиговых слоев [3—5] рассматривались цепочки КС с однородным распределением завихренности внутри отдельных структур. В [3, 5] КС представлялись вихрями Кирхгофа и Ранкина. В [6—8] для замыкания модельных цепочек КС использовались круглые вихри из однопараметрического семейства [9]:

В большинстве моделей сдвиговых слоев взаимодействие отдельной структуры с остальными КС учитывалось приближенно. Например, в [3] результат воздействия цепочки заменялся полем однородной деформации. В [4, 5] использовались вихри заданной формы, а в [6—8] — простейшее приближение точечных вихрей.

В данной работе для построения аналитических моделей КС в плоских течениях предлагается использовать вариационный принцип, заимствованный из теории информации. Поле завихренности в КС находится из условия максимума функционала информационной энтропии. При этом в форме дополнительных ограничений можно учесть разнообразную информацию об основных свойствах КС в конкретном течении — динамических инвариантах, особенностях симметрии структур, характеристиках осредненного потока.

Ниже вариационный принцип применен к задаче о прямолинейной цепочке КС в бесконечном слое сдвига. Выведено функциональное уравнение для поля завихренности в отдельной КС, в котором последовательно учтено невязкое взаимодействие структур. Найдено, что одно из его аналитических решений, допускающих представление в замкнутой форме, — однопараметрическое семейство вихрей Стюарта [10]. На его основе построена модель цепочки КС для развивающегося во времени сдвигового слоя, которая в общих чертах отражает схему его эволюции. Показано, что при определенном выборе значения параметра семейства с помощью вихрей Стюарта можно получить некоторые осредненные характеристики турбулентных слоев смешения, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным.

1. Известны многочисленные примеры успешных приложений принципа максимума информационной энтропии в различных областях физики (см. библиографию в [11, 12]). Принцип позволяет строить объективные оценки физических полей, согласованные с имеющейся о них информацией. Применительно к задаче о распределении скалярной завихренности

$\Omega(\mathbf{R})$  ( $z$ -компоненты вихря) в плоских КС и их системах общая схема применения вариационного принципа состоит в следующем.

Без ограничения общности можно принять, что неизвестное поле завихренности  $\Omega(\mathbf{R})$  неотрицательно и его полная циркуляция равна единице. Вводится функционал информационной энтропии

$$(1.1) \quad \tilde{S}(\Omega) = - \int d\mathbf{R} \Omega(\mathbf{R}) \ln \Omega(\mathbf{R}).$$

Дополнительная информация о свойствах когерентных структур представляется в виде некоторого множества функционалов от  $\Omega(\mathbf{R})$ , вообще говоря, нелинейных:

$$(1.2) \quad \varphi_i(\Omega) = \mu_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

значения  $\mu_i$  которых считаются заданными. В набор функционалов (1.2) могут быть включены различные динамические инварианты поля  $\Omega(\mathbf{R})$ , его произвольные моментные характеристики, свойства симметрии КС, особенности среднего течения и другие данные.

Задача о нахождении поля завихренности  $\Omega(\mathbf{R})$  ставится как вариационная задача об экстремуме функционала

$$(1.3) \quad \tilde{\Phi}(\Omega) = \tilde{S}(\Omega) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(\Omega),$$

где  $\lambda_i$  — неопределенные множители Лагранжа. Из равенства нулю вариации (1.3) следует некоторое функциональное уравнение, которое вместе с условиями (1.2) определяет искомое поле завихренности.

Предлагаемый подход определенным образом близок к методам [9, 13, 14]. В них на основе применения аппарата равновесной статистической механики к динамическим системам точечных (малых [14]) вихрей в идеальной жидкости исследовались некоторые равновесные распределения завихренности. После предложения, высказанного в [6], их стали рассматривать как возможные поля завихренности в уединенных КС.

Полное сравнение двух подходов, несомненно, заслуживает специального изучения. Вместе с тем можно указать некоторые преимущества предлагаемого вариационного принципа. Так, результаты [9, 13, 14] (см. также [15], где рассматривалась потенциальная завихренность), выведенные методами статистической механики, получаются из вариационного принципа более простыми и естественными средствами при минимуме выкладки. При этом отпадают многие этапы, обязательные при построении статистической механики завихренности, а именно: переход к динамической системе точечных (дискретных) вихрей, исследование ее первых интегралов, использование равновесной цепочки для многовихревых функций распределения [9] или комбинаторный вывод канонических распределений [13, 14], обоснование перехода к одновихревой плотности распределения вероятностей и ее отождествление с осредненным непрерывным полем завихренности и др. Как отмечалось, условия (1.2) могут иметь произвольную природу, например включать экспериментальную информацию, что дает возможность последовательного улучшения моделей. В то же время в статистической механике вихрей дополнительные условия могут быть только аддитивными интегралами соответствующей динамической системы. Использование принципа максимума энтропийного функционала позволяет отказаться от обязательной для статмеханики вероятностной трактовки полей. Наконец, в этом случае само ограничение рамками гидродинамики идеальной жидкости перестает быть необходимым.

2. Задача о распределении завихренности в цепочке КС, моделирующих бесконечный сдвиговый слой, если их невязкое взаимодействие рассматривать без дополнительных упрощений [3—8], представляет самостоятельный интерес и позволяет конкретно показать возможности предлагаемого метода.

Цепочке структур можно сопоставить плоское вихревое течение, периодическое по направлению потока с периодом  $d$ . Пусть  $\gamma$  — средняя по периоду величина погонной циркуляции. В качестве минимальной системы функционалов (1.2) для данной задачи целесообразно выбрать циркуляцию  $\Gamma(\Omega) = \gamma d$  и энергию  $\hat{E}(\Omega)$  отдельной КС. Для перехода к изложению в безразмерных переменных в качестве характерных масштабов длины, завихренности и энергии взяты величины  $d/2\pi$ ,  $d/(4\pi^2\gamma)$  и  $(\gamma d)^2$  соответственно. Плотность жидкости принята равной единице.

В безразмерных переменных варьируемый функционал (1.3) записывается в виде

$$\Phi(\omega(\mathbf{r})) = S(\omega(\mathbf{r})) + \sigma - 4\pi\lambda E(\omega(\mathbf{r})).$$

Здесь  $\sigma$  и  $\lambda$  — неопределенные множители Лагранжа;  $\omega(\mathbf{r})$  — поле завихренности в отдельной структуре с условием нормировки

$$(2.1) \quad \int_G d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) = 1.$$

Область интегрирования  $G$  в общем случае есть некоторая криволинейная полоса с эквидистантными границами

$$(2.2) \quad G = \{ \mathbf{r} = (x, y), \varphi(y) \leq x \leq \varphi(y) + 2\pi, \varphi(0) = -\pi, -\infty < y < \infty \},$$

занятая одной структурой;

$$(2.3) \quad S(\omega(\mathbf{r})) = - \int_G d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) \ln \omega(\mathbf{r})$$

— функционал информационной энтропии на распределении завихренности  $\omega(\mathbf{r})$ ;

$$(2.4) \quad E(\omega(\mathbf{r})) = \frac{1}{2} \int_G d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$$

— «эксцесс» энергии отдельной КС (кинетическая энергия жидкости в полосе  $G$  за вычетом расходящегося контурного интеграла [16]). Ниже для краткости величина (2.4) называется просто энергией.

Функцию тока  $\psi(\mathbf{r})$  рассматриваемого течения можно получить интегрированием известного выражения [17]

$$(2.5) \quad \Psi(x, y) = - (4\pi)^{-1} \ln \frac{1}{2} [\operatorname{ch} y - \cos x]$$

для функции тока последовательности точечных вихрей одинаковой единичной циркуляции, расположенных на оси  $x$  с периодом  $2\pi$ . Выражение для  $\psi(\mathbf{r})$  имеет вид

$$(2.6) \quad \psi(\mathbf{r}) = - (4\pi)^{-1} \int_G d\mathbf{r}_1 \omega(\mathbf{r}_1) \ln \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(y_1 - y_2) - \cos(x_1 - x_2)].$$

Равенство нулю первой вариации  $\Phi(\omega(\mathbf{r}))$  дает

$$\int_G d\mathbf{r} \delta\omega \{ \sigma - 1 - \ln \omega(\mathbf{r}) - 4\pi\lambda\psi(\mathbf{r}) \} = 0.$$

В силу произвола в выборе вариации  $\delta\omega$  отсюда следует соотношение

$$(2.7) \quad \omega(\mathbf{r}) = c \exp(-4\pi\lambda\psi(\mathbf{r})),$$

в котором  $c$  очевидным образом связано с лагранжевым множителем  $\sigma$ . Подстановка (2.6) в правую часть (2.7) приводит к уравнению для распределения завихренности в КС:

$$(2.8) \quad \omega(\mathbf{r}) = c \exp \left\{ \lambda \int_G d\mathbf{r}_1 \omega(\mathbf{r}_1) \ln \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(y - y_1) - \cos(x - x_1)] \right\}.$$

Уравнение (2.8) вместе с условием нормировки (2.1) и соотношением (2.4) при фиксированном значении  $E$  образует систему для определения поля завихренности  $\omega(\mathbf{r})$  и параметров  $c$  и  $\lambda$ .

3. Анализ позволяет установить следующие свойства распределений завихренности, удовлетворяющих (2.8), (2.4) и (2.1). Непосредственно из (2.5) видно, что в полосе (2.2)  $\Psi(x, y)$  — гармоническая функция всюду, кроме точки  $x = y = 0$ , где расположен точечный вихрь единичной интенсивности. При этом

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}).$$

Как следствие, применяя оператор Лапласа к (2.6) с учетом (2.7), можно получить, что функция тока для поля завихренности из (2.8) удовлетворяет уравнению Лиувилля [10]

$$(3.1) \quad \Delta \Psi = -c \exp(-4\pi\lambda\psi)$$

на классе  $2\pi$ -периодических по  $x$  функций. Известно [16], что в плоских стационарных течениях функция тока удовлетворяет нелинейному уравнению Пуассона, частный случай которого есть (3.1). Это означает, что распределения завихренности, полученные на основе данного вариационного принципа, совместимы с уравнениями Эйлера невязкой гидродинамики и определяют некоторые стационарные течения эффективно невязкой жидкости.

В частности, для случая прямой полосы  $G = \{\mathbf{r} = (x, y), -\pi \leq x \leq \pi, -\infty < y < \infty\}$  известно семейство периодических решений (3.1), введенное Стюартом [10]. Соответствующие функция тока и завихренность имеют вид

$$(3.2) \quad \psi(x, y, \alpha) = -(4\pi)^{-1} \ln[\operatorname{ch} y - \alpha \cos x];$$

$$(3.3) \quad \omega(x, y, \alpha) = -(4\pi)^{-1} (1 - \alpha^2) [\operatorname{ch} y - \alpha \cos x]^{-2},$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$  — параметр семейства, причем  $\alpha = 0$  соответствует сдвиговому слою с профилем скорости  $u(y) = -(4\pi)^{-1} \operatorname{th} y$ , а предел при  $\alpha \rightarrow 1$  представляет регулярную цепочку точечных вихрей, расположенных на оси  $x$  с периодом  $2\pi$ . Непосредственно проверяется, что завихренность (3.3) удовлетворяет условию нормировки (2.1). Подстановка (3.2), (3.3) в (2.7) показывает, что течение Стюарта может быть получено из вариационного принципа как точное решение уравнения (2.8) при

$$(3.4) \quad c(\alpha) = (4\pi)^{-1} (1 - \alpha^2), \quad \lambda = -2.$$

Асимптотика функции тока (2.6) выражается как

$$\psi(x, y) \underset{y \rightarrow \pm\infty}{\simeq} -(4\pi)^{-1} \int_G d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) \ln \exp[\pm(y - y_1)] = -(4\pi)^{-1} |y|.$$

При этом из (2.7) следует, что для ограниченности полной циркуляции отдельной КС необходимо потребовать  $\lambda < 0$ .

Полезно привести некоторые выражения, которые обычно вычисляются как при теоретико-информационном подходе [11], так и при использовании аппарата статистической механики [9]. Подстановка соотношения (2.7) в (2.3) с учетом (2.1), (2.4) дает значение максимума энтропийного функционала

$$(3.5) \quad S_m = -\ln c + 8\pi\lambda E.$$

Как и в [9], в данном случае можно получить явное выражение для множителя Лагранжа  $\lambda$ . Дифференцированием по  $E$  условия (2.1), в которое подставлено выражение завихренности из (2.7), находим

$$(3.6) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial E} - 8\pi E \frac{\partial \lambda}{\partial E} - 4\pi\lambda \int_G d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi}{\partial E} = 0,$$

где использованы нормировка (2.1) и определение для  $E$  (2.4). Как видно

из (3.6), при выводе таких дифференциальных связей надо иметь в виду, что все величины, определяемые искомой завихренностью, взаимозависимы. Из (2.4) и (2.6) вытекает

$$\int_G d\mathbf{r}\omega(\mathbf{r}) \frac{\partial \Psi}{\partial E} = 1.$$

С учетом этого из (3.5), (3.6) получается искомое выражение

$$(3.7) \quad \lambda = (4\pi)^{-1} \frac{\partial S}{\partial E}.$$

По аналогии с известным из термодинамики соотношением (см. также [9]) можно заметить, что величина  $\lambda^{-1}$  определяет «температуру» (модуль распределения) завихренности отдельной КС как подсистемы. Так как для рассматриваемой модели КС  $\lambda < 0$ , то из (3.7) в отличие от [9] следует, что здесь функционал информационной энтропии монотонно убывает с увеличением энергии КС. Иными словами, возрастает информационная мера организованности внутренней структуры КС.

Ряд полезных связей можно получить, если величины, входящие в варьируемый функционал, зависят от некоторого набора параметров. В частности, для  $\alpha$ -семейства Стюарта из (3.5), (3.7) имеем

$$4\pi\lambda \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln c(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Подстановка сюда значений  $c(\alpha)$  и  $\lambda$  из (3.4) и интегрирование приводят к выражению

$$E(\alpha) = -(8\pi)^{-1} \ln(1 - \alpha^2) + E(0).$$

Величина  $E(0)$  вычисляется относительно просто [18]:

$$E(0) = -\frac{1}{2} (4\pi)^{-3} \int_G \int_G d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \operatorname{ch}^{-2} y_1 \operatorname{ch}^{-2} y_2 \times \\ \times \ln \left\{ \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(y_1 - y_2) - \cos(x_1 - x_2)] \right\} = -(8\pi)^{-1} (1 - 2 \ln 2).$$

С учетом этого

$$(3.8) \quad E(\alpha) = -(8\pi)^{-1} \{ \ln[(1 - \alpha^2)/4] + 1 \}.$$

Для информационной энтропии  $\alpha$ -семейства из (3.4), (3.5), (3.8) находим

$$S_m(\alpha) = \ln[(1 - \alpha^2)\pi/4] + 2.$$

4. По аналогии с [5–8] можно на основе семейства вихрей Стюарта рассмотреть модель цепочки КС, воспроизводящую попарные слияния вихрей. При этом предполагается, что после каждого акта слияния установившееся распределение завихренности в КС описывается соотношением (3.3) при некотором  $\alpha$ . Расстояние  $d$  между центрами соседних вихрей удваивается. Из невязких законов сохранения завихренности и энергии следует, что полная циркуляция каждой КС  $\tilde{\Gamma} = \gamma d$  также удваивается, а ее безразмерная энергия  $E(\alpha)$  увеличивается. Как видно из (3.8),  $E(\alpha)$  — монотонно возрастающая функция параметра  $\alpha$ , который, таким образом, также возрастает в процессе слияний.

Такая модель схематично отражает ряд наблюдаемых физических эффектов [1]: эволюцию путем попарного слияния вихрей, преимущественно невязкий характер их взаимодействия, перенос энергии в сторону больших масштабов, универсальность распределения завихренности в КС и определенную симметрию, в которой учтено их взаимное влияние. Так как  $\lambda = -2$ , то из (3.7) видно, что в процессе слияний с ростом энергии структур их информационная энтропия (2.3) убывает, т. е. модель содержит эффект возрастания упорядоченности (когерентности) внутри отдель-

ных вихрей, что также наблюдалось в экспериментах. Представляется, что это свойство противоречит принципу максимума информационной энтропии, применяемому к цепочке КС в целом. Разрешение кажущегося противоречия заключается в размерном характере эффекта (ср. [19]). Для принятой системы обезразмеривания энтропийный функционал (4.1) в размерном виде записывается как

$$\tilde{S}(\alpha) = S_m(\alpha) + 2 \ln(d/2\pi).$$

Используя (3.8), (3.9), это соотношение можно представить в виде

$$(4.1) \quad \tilde{S}(\alpha) = -8\pi E(\alpha) + \ln[ed^2/4\pi].$$

Закон сохранения энергии для данного состояния цепочки выражается равенством

$$(4.2) \quad E(\alpha) = E_0.$$

Здесь  $E_0$  — энергия жидкости в области  $G$  в невозмущенном потоке, который является исходным состоянием для каскада попарных слияний. Обычно можно принять, что в исходном сдвиговом потоке распределение завихренности зависит только от поперечной координаты:  $\omega(\mathbf{r}) = (4\pi\delta)^{-1}\omega(y/\delta)$ ,  $\delta$  — характерная толщина слоя. При этом условии нормировки (2.1) переходит в соотношение

$$(2\delta)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy \omega(y/\delta) = 1,$$

с учетом которого можно записать

$$(4.3) \quad E_0 = (4\pi)^{-1} \ln 2 + \delta E_\delta,$$

$$E_\delta = -(8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 \omega(z_1) \omega(z_2) |z_1 - z_2|,$$

где введена новая переменная  $z = y/\delta$  и в преобразованиях использовалось равенство

$$\int_0^{2\pi} dx \ln[a^2 + b^2 - 2ab \cos x] = 2\pi \ln(\max(a^2, b^2)).$$

С учетом (4.2), (4.3) из (4.1) вытекает

$$(4.4) \quad \tilde{S}(d) = -16\pi^2 \frac{\delta}{d} E_\delta + 2 \ln\left(\frac{d}{4} \sqrt{\frac{e}{\pi}}\right).$$

Отсюда видно, что размерный энтропийный функционал зависит только от расстояния  $d$  между центрами соседних структур и это соотношение выполнено после каждого слияния. Функция  $\tilde{S}(\alpha)$  имеет единственный минимум в точке  $d_0 = -16\pi^2 \delta E_\delta$  и при  $d > d_0$  монотонно растет. В безразмерных переменных эквивалентное неравенство есть  $8\pi\delta E_\delta > -1$ . Из закона сохранения энергии (4.2) можно получить, что оно необходимо выполнено, если после первого слияния  $0 < \alpha < 1$ . Это означает, что в процессе эволюции модельной цепочки энтропийный функционал (4.1) возрастает.

Для оценки коэффициента перемежаемости в данной модели использовалось его определение в форме

$$(4.5) \quad \chi = 2\pi/\bar{\delta}_\omega, \quad \bar{\delta}_\omega^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \omega(x, 0).$$

С учетом нормировки (2.1) можно видеть, что (4.5) построено на эффективной толщине сдвигового слоя  $\bar{\delta}_\omega = \Delta U / |\partial u / \partial y|_{\max}$ , усредненной по продольной координате в пределах одной структуры. Подстановка (3.3) в

(4.5) дает выражение для коэффициента перемежаемости через параметр семейства

$$(4.6) \quad \chi(\alpha) = \pi / (1 - \alpha^2)^{1/2},$$

а связь (4.2) позволяет выразить его через энергию в начальном состоянии

$$\chi = \pi \exp \left[ \frac{1}{2} (1 + 8\pi\delta E_\delta) \right].$$

В [6—8] значение  $\chi$  вычислялось для автомодельного состояния цепочки, в котором исходная толщина сдвигового слоя пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием между КС, что соответствует предельному переходу при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом из последнего выражения и (4.6) получают автомодельные значения для цепочки вихрей Стюарта

$$\chi_a = \pi \sqrt{e} \simeq 5,2, \quad \alpha_a = (1 - e^{-1})^{1/2} \simeq 0,8.$$

Значение  $\chi_a$  лежит на верхней границе диапазона экспериментальных данных [1].

5. Интересно рассмотреть возможности семейства вихрей Стюарта для моделирования других турбулентных характеристик сдвиговых слоев с КС. Если пренебречь мелкомасштабными пульсациями, то, используя (3.2), местные мгновенные скорости вдоль и поперек потока можно выразить формулами

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= U + \frac{1}{2} \operatorname{sh} y [\operatorname{ch} y - \alpha \cos Ut]^{-1} \Delta U / 2, \\ v(x, y, t) &= \sin Ut [\operatorname{ch} y - \alpha \cos Ut]^{-1} \Delta U / 2, \end{aligned}$$

где  $U = (U_+ + U_-)/2$ ;  $\Delta U = U_+ - U_-$ ;  $U_\pm$  — асимптотические значения скорости на внешних границах сдвигового слоя (слоя смещения). Исходя из (5.1) с помощью осреднения по интервалу времени  $0 \leq t \leq \pi/U$  получают выражения для различных характеристик турбулентного потока, содержащие один свободный параметр  $\alpha$ . Его значение можно выбрать из условия наилучшего приближения среднего профиля скорости и проанализировать, как при этом модель воспроизводит другие турбулентные величины. Для приведенного профиля средней скорости из (5.1) имеем

$$(5.2) \quad \frac{\langle u \rangle - U}{\Delta U / 2} = \frac{\operatorname{sh} y}{[\operatorname{ch}^2 y - \alpha]^2}.$$

На рис. 1 показано сопоставление профиля (5.2) (линия) с экспериментальными данными [20] (точки). При выборе  $\alpha = 0,49$  среднее относительное отклонение лежит в пределах 3%, а максимальное не превышает 10%, т. е. интервал расхождения такой же, как и для более сложной модели из [20].

На рис. 2 кривые 1, 2 представляют полученные из (3.3) распределения завихренности

$$\omega(x, y, \alpha) / \omega(0, 0, \alpha) = (1 - \alpha)^2 / (\operatorname{ch} y - \alpha \cos x)^2, \quad \alpha = 0,49$$

при  $x = 0$  и  $y = 0$ , соответствующие им экспериментальные значения [20] нанесены кружками и треугольниками.

Хотя здесь расхождение составляет 50%, можно говорить об удовлетворительном качественном согласии.

Значение коэффициента перемежаемости (4.6) при  $\alpha = 0,49$  равно  $\chi = 3,6$ , что достаточно близко к измеренному в [20]  $\chi \cong 3,2$ .

Для среднеквадратичных поперечных и продольных пульсаций выбранная процедура осреднения дает

$$\langle v'^2 \rangle^{1/2} / \Delta U = \frac{1}{2\alpha} [\operatorname{ch} y / R - 1]^{1/2},$$

$$\langle u'^2 \rangle / \Delta U = (1/2) |\operatorname{sh} y| / R [\operatorname{ch} y / R + \operatorname{sh}^2 y - (1 + \alpha^2)]^{1/2},$$

$$R = (\operatorname{ch}^2 y - \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha = 0,49.$$

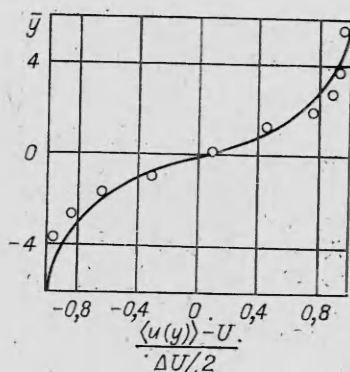


Рис. 1

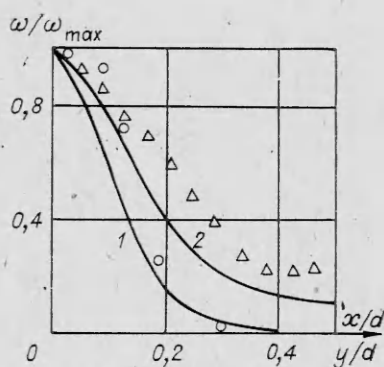


Рис. 2

При  $\alpha = 0,49$  профиль поперечных пульсаций качественно отвечает результатам экспериментов [20], хотя расхождение достигает 100%. Для продольных пульсаций экспериментально установлен несимметричный профиль с максимумом вблизи оси  $x$ . В то же время из приведенной выше формулы видно, что модельный профиль симметричен относительно продольной оси и пульсации обращаются в нуль при  $y = 0$ . Такое же противоречие получается и для профилей реynольдсовых напряжений. Это связано с симметрией вихрей Стюарта относительно обеих осей.

Отметим, что в целом введенная модель КС более содержательна и последовательна, чем предшествующие модели [3, 6—8]. Есть основание надеяться, что численное исследование уравнения (2.8) позволит построить модель цепочки КС с другим типом симметрии, которая будет удовлетворительно воспроизводить пульсационные характеристики в сдвиговых слоях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cantwell B. J. Organized motion in turbulent flow.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Palo Alto, 1981, v. 13.
2. Corcos G. M., Sherman F. S. The mixing layer: deterministic model of a turbulent flow. Part 1: Introduction and the two-dimensional flow.— J. Fluid Mech., 1984, v. 139.
3. Moore D. W., Saffman P. G. The density of organized vortices in a turbulent mixing layer.— J. Fluid Mech., 1975, v. 69, N 3.
4. Saffman P. G., Szeto R. Equilibrium shapes of a pair of equal uniform vortices.— Phys. Fluids, 1980, v. 23, N 12.
5. Ferziger J. H. Energetics of vortex rollup and pairing.— Phys. Fluids, 1980, v. 23, N 1.
6. Aref H., Siggia E. D. Vortex dynamics of the two-dimensional turbulent shear layer.— J. Fluid Mech., 1980, v. 100, N 4.
7. Kuz'min G. A., Likhachev O. A., Patashinsky A. Z. Structures and their evolution in turbulent shear layer. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1981, № 97.
8. Григорьев Ю. И., Левинский В. Б. Модели когерентных вихревых структур в свободных кольцевых сдвиговых слоях и МГД-течениях типа Ленерта.— ЧММСС, 1984, т. 15, № 5.
9. Lundgren T. S., Pointin Y. B. Statistical mechanics of two-dimensional vortices.— J. Stat. Phys., 1977, v. 17, N 5.
10. Stuart J. T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers.— J. Fluid Mech., 1967, v. 29, N 3.
11. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.
12. Mead L. R., Papanicolaou N. Maximum entropy in the problem of moments.— J. Math. Phys., 1984, v. 25, N 8.
13. Kida S. Statistics of the system of line vortices.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, N 5.
14. Кузьмин Г. А. Статистическая механика завихренности в двумерной когерентной структуре.— В кн.: Структурная турбулентность. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982.
15. Левинский В. Б., Ильин К. И. Моделирование когерентных вихревых структур в турбулентных течениях со сдвигом.— В кн.: Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики. Новосибирск: ИТМ СО АН СССР, 1985.
16. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.



17. Лэмб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1932.  
 18. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ФМ, 1962.  
 19. Grigoriev Yu. N., Levinski V. B., Yanenko N. N. Modeling of turbulence by ensembles of vortices with inviscid interaction. — Arch. Mech., 1984, v. 36, N 2.  
 20. Browand F. K., Weidman P. D. Large scales in the developing mixing layer. — J. Fluid Mech., 1976, v. 76, pt 1.

Поступила 10/VII 1985 г.

УДК 532.516 + 532.52

## О СТРУКТУРЕ И ЭВОЛЮЦИИ ВИХРЕВЫХ ЯДЕР

Д. Г. Ахметов, В. Ф. Тарасов

(Новосибирск)

Исследования течений с концентрированной завихренностью играют важную роль в понимании динамики вихревых образований в природе (циклонов, ураганов, смерчей) и в различных технических устройствах (в центробежных форсунках, вихревых аппаратах и т. д.).

В последнее время некоторые вихревые течения (кольцевые и торнадоподобные вихри, вихревые шнуры в вихревой камере) изучены весьма подробно. В частности, измерены поля средних скоростей, найдены распределения завихренности (см., например, [1—4]).

В настоящей работе представлены новые данные о внутренней структуре и эволюции вихревых ядер. Рассмотрено течение между двумя соосными дисками одинакового радиуса, вращающимися с постоянной угловой скоростью в одном направлении. Измерениями поля средней скорости показано, что это течение можно рассматривать как вихрь с твердотельно вращающимся ядром. Путем визуализации картины течения установлено, что поперечное сечение вихревого ядра при превышении некоторого критического числа Рейнольдса теряет круговую симметрию и приобретает форму овала, треугольника, четырехугольника и т. д. При достаточно больших числах Рейнольдса ядро состоит из системы более мелких вторичных вихрей, при этом ядро вихря непрерывно деформируется и регулярно обменивается жидкостью с окружающим его потоком. Обмен осуществляется путем выброса из ядра спиральных рукавов, распространяющихся во внешний поток, и захвата внешней жидкости в ядро в виде отдельных струй. Обнаружена аналогия структур исследуемого течения и других вихревых течений.

1. Эксперименты по изучению течения между вращающимися дисками проводились в воздухе, воде, водных растворах глицерина и в растворе тетрахлорэтилена в бензине. При проведении опытов в жидкости диски находились в цилиндрическом сосуде, соосном с ними.

Основные параметры, при изменении которых наблюдалась качественная перестройка структуры течения, следующие: число Рейнольдса  $Re = \omega R^2/\nu$  и величина относительного зазора  $h/R$  ( $R$  — радиус диска,  $h$  — зазор между дисками,  $\omega$  — угловая скорость дисков,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости). В проведенных опытах  $Re$  изменялось от  $10$  до  $6,4 \cdot 10^5$ ,  $h/R$  — от  $0,08$  до  $1,28$ . Размерные параметры варьировались в диапазонах:  $R = 0,035—0,1$  м,  $\omega = 0,74—314$  с<sup>-1</sup>,  $\nu = 6 \cdot 10^{-7}—1,2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>. Радиус цилиндрического сосуда изменялся от  $0,05$  до  $0,085$  м.

Поле средней скорости течения между вращающимися дисками исследовалось с помощью лазерного доплеровского анемометра. Опыты проводились в растворе тетрахлорэтилена в бензине. В качестве центров, рассеивающих свет, в жидкость вводились мелкие частицы эбонита. Плотность раствора подбиралась равной плотности частиц.

Измерения показали, что во всей области течения, за исключением тонких пограничных слоев на дисках, окружная компонента скорости не зависит от осевой координаты, т. е. азимутальное движение жидкости между дисками плоское. Типичный график распределения окружной компоненты скорости  $v_\varphi$  вдоль радиальной координаты  $r$  представлен на рис. 1 ( $Re = 6,4 \cdot 10^5$ ,  $h/R = 0,5$ ,  $R = 0,035$  м,  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>, линия 1), где также приведены вычисленные по экспериментальным значениям  $v_\varphi$  распределения завихренности  $\Omega = v_\varphi/r + \partial v_\varphi/\partial r$  и циркуляции скорости  $\Gamma = 2\pi r v_\varphi$