

СТРУКТУРА БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ИОНОВ

В. И. Арефьев

(Москва)

Течение плазмы низкого давления в МГД канале в ряде случаев неустойчиво. Причиной неустойчивости может служить ток, текущий поперек магнитного поля.

В работе исследуется неустойчивое, турбулентное течение разреженной плазмы вблизи «намагниченных электродов», представляющих собой магнитные диполи плоской формы. Вследствие развития микроскопической турбулентности вблизи электродов локализуется максимальная плотность индуцированного в плазме тока и происходит турбулентное торможение набегающего потока. Энергия торможения идет на турбулентный нагрев плазмы. В этих условиях найдена структура пограничного слоя при стационарном обтекании. Характерный поперечный размер пограничного слоя значительно меньше длины свободного пробега частиц, поэтому такой пограничный слой можно назвать «бесстолкновительным».

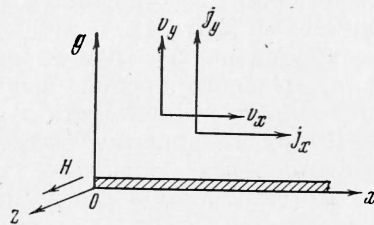
В ряде работ [1-3] при исследовании ламинарного течения разреженной плазмы низкого давления в МГД канале было показано, что вблизи электродов могут образоваться «бездиссипативные» пограничные слои, размер которых по порядку величины равен ларморовскому радиусу или дебаевскому радиусу электронов.

В таких пограничных слоях плазма бесстолкновительная и выделения энергии не происходит.

В пограничном слое плотность тока, текущего поперек магнитного поля, может значительно превысить критическую плотность $j \gg j^*$ [4], начиная с которой состояние плазмы становится неустойчивым. В этих условиях особую роль должны играть коллективные процессы, приводящие к «бесстолкновительной диссипации» энергии, турбулентному нагреву и торможению частиц и формированию бесстолкновительной структуры пограничного слоя.

Теоретически обосновывается возможность образования бесстолкновительных пограничных слоев в потоке разреженной плазмы, имеющих характерный размер, много меньший длины свободного пробега частиц, по порядку величины равный c / ω_{pi} , где $\omega_{pi} = (4\pi n e^2 / M)^{1/2}$ — ионная плазменная частота.

1. Рассмотрим плоское течение разреженной плазмы низкого давления $\beta = 4\pi n T_e / H^2 \ll 1$ вблизи электрода (фиг. 1). Будем полагать, что характерные частоты всех движений много меньше электронной ларморовской частоты $\omega_{He} = eH / mc$, а плазма квазинейтральна $n_e = n_i = n$. В этих условиях уравнения для электронной и ионной компонент плазмы



Фиг. 1

принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}_e) &= 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}_i) = 0 \\ mn \left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e \right) &= -en\mathbf{E} - \nabla p_e - \frac{en}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - \mathbf{R}_f \\ Mn \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i \right) &= en\mathbf{E} + \frac{en}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] + \mathbf{R}_f \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi ne}{c} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ — средние скорости электронов и ионов; m , M — соответственно их массы; $p_e = nT_e$ — газокINETическое давление электронного газа (предполагается, что $T_e \gg T_i$); T_e и T_i — температуры электронов и ионов соответственно; $\mathbf{R}_f$ — эффективная сила трения, обусловленная либо «редкими» кулоновскими, либо коллективными столкновениями. Вводя среднemasовую скорость

$$\mathbf{v} = (m\mathbf{v}_e + M\mathbf{v}_i) / M_0, \quad M_0 = m + M$$

и исключая в (1.1) электрическое поле $\mathbf{E}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0 \\ M_0 n \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) &= \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] - \nabla p_e - \frac{mMc^2}{M_0 (4\pi e)^2} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \operatorname{rot} \left(\frac{c\mathbf{R}_f}{ne} \right) - \frac{Mc}{4\pi e M_0} \operatorname{rot} \left[\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n}, \mathbf{H} \right] + \left(\frac{Mc}{4\pi e M_0} \right)^2 \frac{mc}{e} \times \\ &\times \operatorname{rot} \left\{ \left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} \nabla \right) \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} \right\} - \frac{Mmc^2}{4\pi e^2 M_0} \operatorname{rot} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} \nabla \right) \left(\mathbf{v} + \frac{mc}{4\pi e M_0} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{n} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

В таком виде система уравнений двухжидкостной гидродинамики неоднократно использовалась ранее, например в работе [5]. В настоящей работе исходная система уравнений (1.2), являющаяся полной, будет использована для решения частной задачи: для исследования структуры неустойчивого, турбулентного течения разреженной плазмы в пограничном слое (фиг. 1).

С этой целью ниже проанализирован один из возможных механизмов коллективного трения, появляющийся вследствие развития микроскопической турбулентности в пограничном слое, и в дополнении к системе (1.2) будет приведено замыкающее уравнение для плотности энергии неустойчивых колебаний.

2. Течение плазмы в пограничном слое неустойчиво, если токовая скорость

$$|\mathbf{u}| = \frac{c}{4\pi en} |\operatorname{rot} \mathbf{H}|$$

превышает некоторое критическое значение u^* [4]

$$|\mathbf{u}| = \frac{c}{4\pi en} |\operatorname{rot} \mathbf{H}| > u^* \quad (2.1)$$

В плазме с «горячими» электронами $T_e \gg T_i$ наиболее неустойчивы колебания типа «ионного звука», имеющие в соответствии с [4] следующие

значения для частоты ω_k и инкремента γ_k :

$$\omega_k = \mathbf{k}\mathbf{v} + kv_s\alpha, \quad \alpha = (1 + k_\perp^2 \rho_{He}^2)^{-1/2}$$

$$\gamma_k = \left(\frac{\sqrt{\pi} k v_s \alpha^3}{2k_\parallel v_{Te}} \right) \left(\frac{c \mathbf{k} \text{ rot } \mathbf{H}}{4\pi en} - \omega_k \right), \quad k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2 \quad (2.2)$$

Здесь введены обозначения

$$v_s = \left(\frac{T_e}{M} \right)^{1/2}, \quad \rho_{He} = \frac{v_{Te}}{\omega_{He}}, \quad v_{Te} = \left(\frac{2T_e}{m} \right)^{1/2}, \quad \omega_{He} = \frac{eH}{mc}$$

где v_s — скорость ионного звука, $k_\parallel$ и $k_\perp$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на продольное и поперечное направления к магнитному полю соответственно.

Исследование ионно-звуковой неустойчивости, проведенное в работе [4], показывает, что наиболее неустойчивыми являются «косые возмущения», у которых $k_\parallel / k \approx (m / M)^{1/2}$ и длины волн порядка ларморовского радиуса электронов $k^{-1} \approx \rho_{He}$. Граница неустойчивости лежит на уровне скорости ионного звука $u^* \approx v_s$, а максимальный инкремент по порядку величины равен гибридной частоте $\omega_{e,i} = (\omega_{Hi} \omega_{He})^{1/2}$, где $\omega_{Hi} = eH / Mc$ — ларморовская частота ионов.

Будем предполагать, что везде в пограничном слое токовая скорость превышает критическое значение и состояние плазмы неустойчиво. Развитие неустойчивости приведет к появлению коллективной силы трения $\mathbf{R}_f$ между электронной и ионной компонентами, в соответствии с [4] равной

$$\mathbf{R}_f = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \gamma_{\mathbf{k}} \frac{W_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\sqrt{\pi} k^2 v_s \alpha^3}{2\omega_k k_\parallel v_{Te}} \right) \left(\frac{c \text{ rot } \mathbf{H}}{4\pi en} - v_s \frac{\mathbf{k}}{k} \right) W_{\mathbf{k}} \quad (2.3)$$

Здесь суммирование проводится по всем волновым числам k , для которых колебания неустойчивы. Наибольший вклад в сумму дают волновые числа, для которых инкремент неустойчивости максимальный, поэтому везде ниже суммирование заменяется одним слагаемым с наиболее неустойчивыми компонентами волнового вектора $\mathbf{k}^*$.

$$k_\parallel^* \approx k^* (m / M)^{1/2}, \quad k^* \approx \rho_{He}^{-1}$$

В формуле (2.3) $W_{\mathbf{k}}$ — спектральная плотность энергии колебаний (шумов). В квазилинейной теории [6], описывающей слаботурбулентное состояние плазмы и на основе которой ниже будут рассмотрены основные макроскопические эффекты вследствие развития ионно-звуковой турбулентности, нарастание энергии колебаний задается следующим кинетическим уравнением:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \nabla \right) \right] \ln W_{\mathbf{k}} = 2\gamma_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} k v_s \alpha^3}{k_\parallel v_{Te}} \right) \left(\frac{c \mathbf{k} \text{ rot } \mathbf{H}}{4\pi en} - \omega_{\mathbf{k}} \right) \quad (2.4)$$

Здесь $\partial \omega_{\mathbf{k}} / \partial \mathbf{k}$ — групповая скорость колебаний, для ионно-звуковой неустойчивости, равная среднemasовой скорости v .

Таким образом, система уравнений (1.2) совместно с (2.3), (2.4) является самосогласованной и качественно правильно учитывает основные макроскопические эффекты, появляющиеся вследствие развития микроскопической ионно-звуковой турбулентности.

Помимо ионно-звуковой неустойчивости, имеющей низкий порог возбуждения $u^* \approx v_s$ и дающей максимальный вклад в аномальное сопротивление плазмы, при токовых скоростях, существенно превышающих скорость ионного звука $u \gg v_s$, могут возбуждаться микроскопические вихревые колебания в электронной жидкости, приводящие к появлению характерного макроскопического эффекта типа «аномальной электронной вязкости». Физический смысл этого эффекта можно понять, обратившись к уравнению движения электронов в системе (1.1).

Сначала рассмотрим неустойчивость вихревых ($\text{rot} E \neq 0$) колебаний в несжимаемой электронной жидкости $\text{div } v_e = 0$. Для определенности рассмотрим плоское течение электронной жидкости. Средняя скорость электронов направлена по оси y и неоднородна по оси x , магнитное поле направлено по оси z .

Введем следующие обозначения для скорости v_e и вихря скорости Ω :

$$v_e = -\frac{c}{4\pi en} \text{rot } \mathbf{H}, \quad \Omega = \text{rot } v_e = \frac{c}{4\pi en} \Delta \mathbf{H}$$

Применяя к уравнению движения электронов операцию rot и выполняя фурье-преобразования для малых возмущений, представляемых в виде $\sim H_{\sim}(x) \exp(-i\omega t +iky)$, находим дисперсионное уравнение, которое описывает неустойчивости течения несжимаемой электронной жидкости

$$H_{\sim}'' \left(-\omega a^2 - ia^2 v_f + \frac{e}{mc} a^4 k H_0' \right) + \quad (2.5) \\ + H_{\sim} \left[(1 + k^2 a^2) - \frac{k^3 e a^4 H_0'}{mc} - \frac{e}{mc} a^4 k H_0''' + ik^2 a^2 v_f \right] = 0$$

Здесь $v_f = \partial R_f / \partial v_e m n$ — эффективная частота упругих рассеяний электронов, $a = c / \omega_{pe}$ — масштаб дисперсии, $H_{\sim}(x)$ — амплитуда колебаний магнитного поля, зависящая от координаты x . Уравнение (2.5) по структуре напоминает уравнение вихревых колебаний идеальной жидкости.

Рассмотрим спектр неустойчивых колебаний в квазиклассическом приближении $k d \ln H / dx \gg 1$. Применяя к уравнению (2.5) метод «квазиклассического квантования», для предельного случая, когда $k d \ln H / dx \gg 1$, находим следующие значения для частоты ω_k и инкремента γ_k неустойчивых колебаний:

$$\omega_k = k a^4 \frac{e}{mc} [(k^2 + k_x^2) H_0' + H_0'''] \alpha^*, \quad \alpha^* = [1 + (k^2 + k_x^2) a^2]^{-1} \quad (2.6) \\ \gamma_k = -(k^2 + k_x^2) a^2 v_f \alpha^*, \quad k_x^2 = \left(\frac{2\pi n}{\Delta x} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Отсюда получаем простой критерий неустойчивости микроскопических вихрей тока

$$v_f = \frac{1}{mn} \frac{\partial R_f}{\partial v} < 0$$

Этот критерий означает, что сила трения, действующая на электроны, должна убывать с ростом средней скорости. Примером такой силы в плазме может служить сила кулоновского трения, если в ней среднетепловую скорость v_{Te} заменить на среднюю скорость v_e , а также сила коллективного трения. Физический смысл этой неустойчивости состоит в том, что любое малое возмущение скорости электронов, приводящее к увеличению скорости, уменьшает силу трения и, следовательно, вновь приводит к росту возмущения скорости.

Развитие микроскопических вихревых неустойчивостей приводит к эффекту «аномальной электронной вязкости». В этом нетрудно убедиться, проводя усреднения по фазам случайных колебаний в уравнении движения электронов. В результате усреднения в общий баланс сил для электронной компоненты войдет новая величина Π_{xy}

$$\Pi_{xy} = mn_0 \langle v_x \sim v_y \sim^* \rangle \quad (R_y = -\partial \Pi_{xy} / \partial x)$$

физически означающая тензор вязких напряжений, который появляется вследствие рассеяния электронов на хаотических вихревых колебаниях. Для вычисления этой величины умножим уравнение (2.5) на комплексно сопряженную амплитуду $H \sim^*$ и вычтем из полученного равенства комплексно сопряженное. В результате для случая, когда $k d \ln H / dx \gg \gg 1$, получим

$$\Pi_{xy} = - \sum_k 2\pi m n_0 |v_{kx}|^2 \delta(\omega - \mathbf{k}u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$v_{kx} = -i \frac{kc}{4\pi en} H_k \quad (2.7)$$

Появление здесь δ -функции означает резонансный механизм взаимодействия участков профиля скорости электронов $v_e(x)$ с возбуждаемыми колебаниями, у которых фазовая скорость равна $\omega/k = v_e(x)$.

Формула (2.7) позволяет сделать оценку коэффициента аномальной электронной вязкости

$$\eta = \sum_k 2\pi n_0 m |v_{kx}|^2 \delta(\omega - \mathbf{k}u)$$

Этот коэффициент пропорционален квадрату амплитуды вихревых колебаний $|v_{kx}|^2$ или плотности энергии колебаний. Для этой величины по аналогии с ионно-звуковой турбулентностью можно написать кинетическое уравнение. Однако для последующего анализа такой необходимости нет, поэтому ограничимся лишь приведенными выше качественными представлениями.

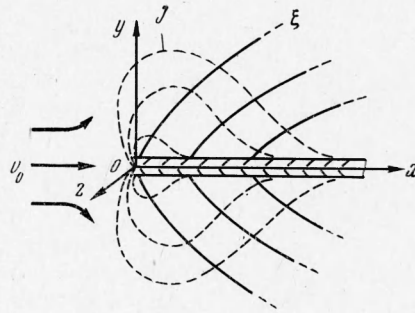
3. Рассмотрим сначала пример обтекания «намагниченного плоского электрода», представляющего собой сильно вытянутый вдоль скорости невозмущенного потока v_0 магнитный диполь, образованный, например, системой линейных проводников с током (фиг. 2).

Граничные условия в этой задаче следующие:

$$\begin{aligned} H &= H_0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \\ H &\rightarrow H_\infty, \quad n \rightarrow n_0, \quad v \rightarrow v_0 \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В идеальном случае намагниченный электрод можно представить себе бесконечно тонким, так что возмущения, вносимые им в поток плазмы, малы. В этом случае исходную систему уравнений можно линеаризовать по малым возмущениям, а нелинейность учесть лишь через силу трения R_f . Критерий применимости теории возмущений будет заключаться в малости относительной флуктуации концентрации в потоке $(n - n_0) / n_0 \ll 1$. Представим исходные величины в виде

$$V_x = v_0 + v_x, \quad V_y = v_y, \quad n = n_0 + n$$



Фиг. 2

Полагая, что перпендикулярное скорости потока магнитное поле H направлено по оси z , из системы исходных уравнений (1. 2), (2. 3), (2. 4) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} + n_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{H_0}{4\pi n_0 M} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{n_0 M} \frac{\partial p_e}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{H_0}{4\pi n_0 M} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{n_0 M} \frac{\partial p_e}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + v_0 \frac{\partial H}{\partial x} + H_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - a^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(W_{k^*} \chi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(W_{k^*} \chi \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left(k_y^* \frac{\partial}{\partial x} - k_x^* \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{c \nabla^2 k^*}{n_0 e} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \right) n \ln W_{k^*} &= 2 \left(\frac{c k^* \operatorname{rot} H}{4\pi e} - n v_s k^* \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $a = c / \omega_{pe}$ — характерный дисперсионный масштаб, появляющийся вследствие учета инерции электронов, волновое число k^* и произвольный параметр $(k^* v_s \alpha^3 / k_{\parallel}^* v_{Te})$, влияющие на скорость развития микроскопической турбулентности, здесь и ниже полагаются соответственно равными

$$k^* \approx \rho_{He}^{-1}, \quad k^* v_s \alpha^3 / k_{\parallel}^* v_{Te} \approx 1, \quad \chi = a^2 k^* / n_0 m v_s$$

Решение исходной системы уравнений (3. 2), описывающей структуру течения плазмы в магнитном пограничном слое, удобно исследовать методом характеристик. Сначала найдем приближенное в рамках линейной теории выражение для характеристик (установим их наклон к плоскости электрода), а затем проанализируем малые возмущения, распространяющиеся вдоль них.

Уравнения для характеристик получаются, если в исходной системе уравнений (3. 2) пренебречь бесстолкновительной диссипацией и дисперсией, т. е. положить плотность энергии шумов равной нулю и $a \rightarrow 0$

$$\xi = y - x \operatorname{tg} \alpha = \text{const}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{H_0^2 / 4\pi n_0 M}{v_0^2 - H_0^2 / 4\pi n_0 M} \quad (3.3)$$

Здесь α — угол наклона соответствующей характеристики к плоскости электрода. Вследствие нелинейности наклон характеристик при удалении от электрода уменьшается вплоть до нуля в области невозмущенного потока (фиг. 2), при этом скорость течения вдоль характеристики монотонно возрастает от нуля до скорости невозмущенного потока v_0 , а напряженность магнитного поля уменьшается от максимального значения H_0 на электроде до нуля в невозмущенном потоке.

Рассмотрим распространение малых возмущений вдоль характеристик. Вводя координату характеристики $\xi = y - x \operatorname{tg} \alpha$ и проводя в исходной системе уравнений (3. 2) следующие замены:

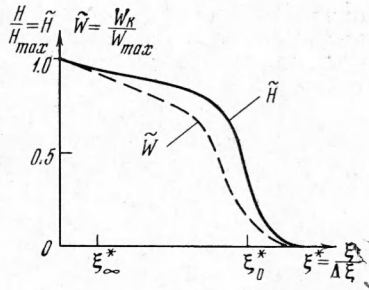
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad v_{\xi} &= (v_y - v_x \operatorname{tg} \alpha) \\ -v_0 \operatorname{tg} \alpha &= v_{0\xi}, \quad k_{\xi}^* = k_x^* + k_y^* \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

получим уравнения, описывающие распространение малых возмущений вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_0 v_\xi + n v_{0\xi}) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left(\frac{H_0 H}{4\pi n_0 M} + \frac{p_e}{n_0 M} \right) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (v_{0\xi} H + H_0 v_\xi) - a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[W_{k*} \chi (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{k_\xi^* c W_{k*}}{en_0} \right] &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \ln W_k = \left(\frac{ck_\xi^*}{2\pi en_0} \frac{\partial H}{\partial \xi} - 2k^* v_s \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти уравнения по структуре напоминают систему уравнений, исследованную авторами работы [6], описывающую динамику квазилинейной релаксации пучка в плазме. Роль функции распределения в рассматриваемой задаче играет магнитное поле. Однако прежде чем применить результаты работы [6] к системе (3.4), упростим ее.

Предварительно обсудим общий характер описываемого процесса. Начальная стадия развития возмущений на плоской пластине, создающей в полупространстве $x > 0$ начальное распределение магнитного поля $H_0(y)$, будет протекать следующим образом. Разреженный поток плазмы, поступающий в область невозмущенного магнитного поля, начинает с ним взаимодействовать. В плазме возникает индуцированное магнитное поле, поддерживаемое вихревым током, которое начинает вытеснять начальное магнитное поле. Нелинейная волна сжатия магнитного поля движется к электроду вдоль характеристик, причем профиль волны, представляющей собой простую волну Римана, вследствие нелинейного искажения формы со временем увеличивает крутизну. «Опрокидывание» такой волны сдерживается конкурирующими эффектами: дисперсионными и диссипативными [7]. На фронте такой волны вследствие токовой неустойчивости может возникнуть микроскопическая турбулентность, макроскопические эффекты которой качественно правильно описывает система уравнений (3.4).



Фиг. 3

В соответствии с работой [6] исследуем лишь конечную стадию квазилинейной релаксации, когда фронт волны сформировался и представляет собой вид «крутой ступеньки» (фиг. 3), причем скорость плазмы перед фронтом близка к нулю, а за фронтом достигается максимальное значение, близкое к скорости невозмущенного потока v_0 .

Пренебрегая скоростью плазмы перед фронтом в сравнении со скоростью движения самого фронта, из системы уравнений (3.4) можно получить

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) H &= a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} w_{k*} \chi (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \ln \left(\frac{W_{k*}}{W_0} \right) &= \frac{ck_\xi^*}{2\pi en_0} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad \text{при } j \gg j^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эти уравнения по структуре совпадают с аналогичными уравнениями, исследованными в работе [6] с точностью до замены

$$H \rightarrow j, \quad \frac{\partial}{\partial t} + v_{0\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{при } a \rightarrow 0$$

В этих уравнениях W_0 — начальная плотность энергии колебаний, равная плотности энергии тепловых флуктуаций, а

$$\left| \frac{ck_{\xi}^*}{2\pi n_0 k^*} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right| \gg v_s$$

Решение можно представить в виде

$$H = H_0 \left[1 + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{W_{k^*} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) k^*}{(2n_0 M v_s \omega_{Hi, \infty} k_{\xi}^*)} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$li \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) = \frac{1}{2} z_0 (z_0 - z), \quad z = \frac{\xi}{(t - \xi/v_{0\xi})^{1/2}} \left[\frac{n_0 M v_s}{a^2 k^* W_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \right]^{1/2}$$

где z_0 — начальная координата, li — функция интегрального логарифма.

Анализ решения показывает, что фронт магнитного поля, представляющий собой крутую ступеньку (фиг. 3), опережает фронт шумов. Это характерное свойство динамики квазилинейной релаксации, отмеченное авторами работы [6], имеет прямую аналогию с «тепловой волной», крутизна фронта которой обусловлена степенной зависимостью теплопроводности от температуры. Уравнение для тепловой волны вытекает из (3.5), если провести формальную замену $w_k^* \rightarrow T$, где T — температура в тепловой волне, и положить $a \equiv 0$.

При нахождении решения (3.6), описывающего переднюю часть крутого фронта, пренебрегли дисперсионным эффектом, поскольку он не влияет на крутизну переднего фронта, целиком определяемую скоростью нарастания энергии шумов. В этом можно убедиться следующим образом. Предположим, что на переднем фронте волны релаксации эффект дисперсии компенсирует эффект изменения крутизны вследствие формирования тепловой волны, иными словами, будем предполагать, что на переднем фронте сила инерции электронов уравнивает силу турбулентного трения. В этом случае можно ожидать, что крутизна фронта сгладится. Покажем, однако, что это не так.

Приравнявая в системе (3.5) два типа сил и используя уравнение для шумов, после интегрирования находим следующее решение, описывающее передний фронт волны:

$$\frac{1}{W_{k^*}} = \frac{t'}{\rho_{He} n_0 m v_s} + \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi} = - \frac{2\pi n_0 \chi}{ca^2 k_{\xi}^*} W_{k^*}, \quad k_{\xi}^* \approx \rho_{He}^{-1}$$

Отсюда видно, что характерный размер фронта

$$\Delta x = v_0 \Delta t' \approx \rho_{He} \frac{n_0 m v_s v_0}{W_{\max}} \approx \rho_{He} \left(\frac{v_s v_0}{u^2} \right)$$

сильно зависит от плотности энергии колебаний и может стать сколь угодно малым, например меньше масштаба дисперсии $\Delta x \ll a$, с увеличением энергии колебаний. Выше была сделана оценка ширины фронта для максимальной плотности энергии ионно-звуковой турбулентности, по порядку величины равной $W_{\max} \approx 1/2 \pi m u^2$.

Таким образом, развитие микроскопической турбулентности благоприятствует эффекту увеличения крутизны магнитного поля и может привести к опрокидыванию фронта волны и возникновению двухпоточкового движения. Однако даже в рамках рассмотренного приближения существует сдерживающий механизм. Если бы шумы за фронтом волны нарастали бесконечно быстро в сравнении с характерным временем движения фронта, то фронт магнитного поля стал бы бесконечно крутым и опрокинулся, но в действительности время развития неустойчивости конечно, поэтому размер фронта конечен и пропорционален его скорости. Если же при заданной скорости движения фронта микроскопическая турбулентность не сможет обеспечить необходимый для этого перепад магнитного давления, то при таких критических магнитных полях фронт волны опрокинется и появится двухпоточковое движение.

Таким образом развитие ионно-звуковой турбулентности может привести к увеличению крутизны фронта магнитного поля и, следовательно, к локальному усилению

индуцированного в плазме тока. Этот эффект «микропичевания плазмы» можно также связать с особым характером зависимости турбулентной силы трения от средней скорости электронов $R_f(v_e)$, убывающей с увеличением v_e . Это условие является необходимым для раскачки микроскопических вихревых колебаний, развитие которых может привести к появлению эффекта аномальной электронной вязкости, и следовательно, механизма, стабилизирующего эффект увеличения крутизны фронта магнитного поля. Из конкуренции двух противоположных механизмов можно найти стационарное решение для магнитного поля и шумов на фронте. Однако это рассмотрение выходит за рамки данной статьи.

Найдем скорость движения фронта и критическое магнитное поле. Исходя из системы уравнений (3.4), найдем стационарное решение $\partial/\partial t \equiv 0$, описывающее установившееся распределение магнитного поля вдоль характеристики. В этом случае скорость движения фронта приблизительно равна скорости невозмущенного потока

$$v_f \approx v_0$$

Эти решения описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} v_{0\xi}(H - H_\infty) &= a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) v_{0\xi} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \chi W_{k^*}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \frac{ck_{\xi^*}}{2\pi en_0}(H - H_\infty) &= v_{0\xi} \ln \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение для магнитного поля и шумов имеет вид

$$H = H_0 \left[1 + \frac{v_{0\xi}}{2k_{\xi^*} a^2 \omega_{Hi,\infty}} \ln \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) \right] \quad (3.8)$$

$$\int_1^{W_{k^*}/W_0} dw \left\{ \ln w \left[1 - \left(\frac{n_0 m v_s v_{0\xi}}{k^* a w} \right)^2 \frac{(1 - \ln w)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \right] \right\}^{-1} = \left(\frac{W_0 k^* a^2 M}{n_0 m v_s v_{0\xi} m} \right) \xi + \text{const}$$

Оно описывает переднюю часть крутого фронта и применимо вплоть до значений градиента магнитного поля

$$\partial H / \partial \xi \approx 2\pi en_0 v_s k^* / ck_{\xi^*}$$

для пологой части распределения, где токовая скорость близка к критическому значению. Полагая в уравнениях (3.7)

$$\partial H / \partial \xi \approx H_\infty k^* v_s / 2k_{\xi^*} a^2 \omega_{Hi,\infty}$$

найдем скорость фронта волны $v_{0\xi}$ и критическое магнитное поле H_c , начиная с которого волна опрокинется

$$\begin{aligned} v_{0\xi} &= \left(\frac{H_\infty^2}{4\pi n_0 T_e} \right)^{1/2} \left[\frac{W_{\max}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{mn_0 \ln(W_{\max}/W_0)} \right]^{1/2} \\ H_c &= H_\infty \left[1 + \frac{v_{0\xi}}{2k_{\xi^*} a^2 \omega_{Hi,\infty}} \ln \left(\frac{W_{\max}}{W_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для всей пологой части распределения (фиг. 2, 3) с хорошей точностью выполняется равенство

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{2\pi en_0 k^*}{ck_{\xi^*}} v_s \quad \text{или} \quad nT_e = \frac{c^2}{\pi \omega_{pi}^2} \left(\frac{k_{\xi^*}^2}{k^*} \right)^2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 \quad (3.10)$$

Оно может служить уравнением энергии для электронов. Подставляя это выражение для газокINETического давления в (3.4), получим

следующее уравнение для пологой части распределения магнитного поля:

$$\left(\frac{c}{\omega_{pi}} \frac{k_{\xi}^*}{k^*}\right)^2 \left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2 = \left[n_0 M v_{0\xi}^2 \frac{(H - H_{\infty})}{H_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} - \frac{H_0 (H - H_{\infty})}{4\pi} \right] \quad (3.11)$$

Находим решение для $H \rightarrow H_{\infty}$, которое «сшивается» с крутой частью при $H \rightarrow H_0$

$$2 \left(\frac{ck_{\xi}^*}{\omega_{pi} k^*} \right) [(H - H_{\infty}) H_0]^{1/2} = \left[\frac{n_0 M v_{0\xi}^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} - \frac{H_0^2}{4\pi} \right]^{1/2} (\xi - \xi_{\infty}) \quad (3.12)$$

Вся ширина фронта по порядку величины равна

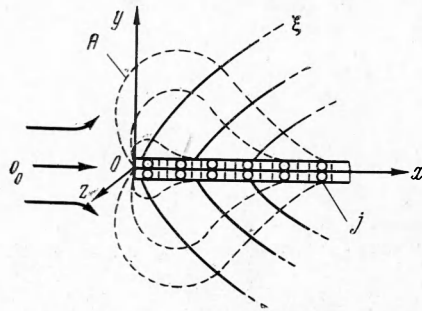
$$\Delta \xi \approx 2 \left(\frac{ck_{\xi}^*}{\omega_{pi} k^*} \right) \left[\frac{H_0 (H_0 - H_{\infty}) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{n_0 M v_{0\xi}^2 - H_0^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) / 4\pi} \right]^{1/2} \approx \frac{c}{\omega_{pi}} \quad (3.13)$$

Таким образом, решение для пограничного слоя найдено. Такой пограничный слой можно назвать бесстолкновительным, поскольку длина свободного пробега частиц может значительно превышать его размер. На фиг. 2, 3 приведена структура пограничного слоя в этом случае. Из фигур видно, что вблизи электрода, где крутизна магнитного поля велика, течет большой ток, направленный против скорости невозмущенного потока. В этой области происходит сильное торможение основного потока. Напишем баланс сил, действующих на ионы в этой области

$$M n v_{ix} \frac{dv_{ix}}{dx} = - R_{fx} = - \frac{k^*}{2\omega_{k^*}} v_{ix} \frac{dW_{k^*}}{dx} \quad (3.14)$$

Тормозятся ионы турбулентной силой трения R_f . При этом работа, идущая на возбуждение шумов и, следовательно, на турбулентный нагрев электронов, равна

$$(R_f v_i) \approx \frac{1}{24 (Mn)^2 v_s^3} \frac{d}{dx} W_{k^*}^3$$



Фиг. 4

4. Рассмотрим обтекание магнитного диполя, создающего магнитные силовые линии, лежащие в плоскости течения (фиг. 4). Для определенности будем считать диполь бесконечно тонким, так что возмущения, вносимые им в поток, малы. Рассмотрим течение в плоскости xu . Скорость течения имеет компоненты v_x, v_y , магнитное поле — соответственно компоненты H_x, H_y . Линеаризуем исходную систему уравнений (1.2) и учтем нелинейность только лишь через силу трения R_f

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} + n_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0, & \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} &= 0 \\ M n_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) &= \frac{H_{0y}}{4\pi} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial p_e}{\partial x} \\ M n_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &- \frac{H_{0x}}{4\pi} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial p_e}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{W_k}{W_0} \right) &= \frac{ck^*}{2\pi e n_0} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - 2k^* v_s \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v_x H_{0y} - v_y H_{0x} + v_0 h_y + \frac{ckW_k}{en_0} \left[\frac{c}{4\pi en_0 v_s} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - 1 \right] \right\} \\ \frac{\partial h_y}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ v_x H_{0y} - v_y H_{0x} + v_0 h_x + \frac{ck^*W_{k^*}}{en_0} \left[\frac{c}{4\pi en_0 v_s} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - 1 \right] \right\}\end{aligned}$$

Найдем уравнения для характеристик

$$\begin{aligned}\xi &= y - x \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{(H_{0x}^2 + H_{0y}^2)}{4\pi n_0 M v_0^2 - (H_{0x}^2 + H_{0y}^2)} \\ H_x &= H_{0x} + h_x, \quad H_y = H_{0y} + h_y, \quad V_x = v_0 + v_x, \quad V_y = v_y\end{aligned}\quad (4.2)$$

Здесь $a \rightarrow 0$, ток направлен по оси z .

Рассмотрим стационарные малые возмущения вдоль характеристик. Система уравнений, описывающая распределение магнитного поля и шумов вдоль характеристических линий $\xi = y - x \operatorname{tg} \alpha$, имеет вид

$$\begin{aligned}(h_y - h_{y\infty}) \left[1 + \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (H_{0x}^2 + H_{0y}^2)}{\operatorname{tg}^2 \alpha 4\pi M n_0 v_0^2} \right] &= \\ = \frac{ck^*}{en_0 v_0} W_{k^*} \left[\frac{c}{4\pi en_0 v_s} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right] & \\ \ln \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) &= \frac{ck^*}{2\pi en_0 v_0} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} (h_y - h_{y\infty})\end{aligned}\quad (4.3)$$

Аналогично находим решение для крутой и пологой частей распределения фронта магнитного поля. Для крутой части ступеньки получаем решения

$$\begin{aligned}h_y &= h_{y\infty} \left[1 + \frac{v_0}{2k^* a^2 \omega_{Hi, \infty}} \ln \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) \right] \\ li \left(\frac{W_{k^*}}{W_0} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha n_0 v_0 v_s}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) W_0} \left[1 + \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (H_{0x}^2 - H_{0y}^2)}{\operatorname{tg}^2 \alpha 4\pi M n_0 v_0^2} \right] \frac{\xi}{a^2 k^*}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Это решение справедливо для всех градиентов магнитного поля вплоть до

$$\frac{\partial h_y}{\partial \xi} \gtrsim \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \frac{4\pi en_0 v_s}{c}$$

при котором токовая скорость близка к критическому значению. Замечая для пологой части газокINETическое давление $p_e = nT_e$ на

$$p_e = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 c^2}{4\pi \operatorname{tg}^2 \alpha \omega_{pi}^2} \left(\frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right)^2$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4\pi M n_0 v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{c^2}{\omega_{pi}^2} \left(\frac{\partial h_y}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{(h_y - h_{y\infty})}{(H_{0y} + H_{0x} / \operatorname{tg} \alpha)} \left[1 - \frac{(H_{0x}^2 + H_{0y}^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4\pi n_0 M v_0^2} \right]\quad (4.5)$$

Оно дает решение

$$\frac{c}{\omega_{pi}} \left[\frac{(h_y - h_{y\infty}) (H_{0y} + H_{0x} / \operatorname{tg} \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4\pi n_0 M v_0^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (H_{0x}^2 + H_{0y}^2)} \right]^{1/2} = - \operatorname{tg} \alpha (\xi - \xi_{\infty}) \quad (4.6)$$

которое «сшивается» при $\xi \rightarrow 0$ с решением для крутой части. Подставляя в уравнение (4.3) вместо токовой скорости критическое значение, найдем скорость невозмущенного потока v_0 и критическое магнитное поле H_c

$$v_0 = \frac{(H_{0x}^2 + H_{0y}^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4\pi n T_e \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{W_{\max}}{n_0 m v_s \ln(W_{\max}/W_0)} \right) \left[1 + \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(H_{0x}^2 + H_{0y}^2)}{\operatorname{tg}^2 \alpha 4\pi n_c M V_0^2} \right]^{-1} \quad (4.7)$$

$$H_c = H_{y\infty} \left[1 + \frac{v_0}{2k^* a^2 \omega_{Hi\infty}} \ln \left(\frac{W_{\max}}{W_0} \right) \right]$$

На фиг. 4 изображена структура течения в этом случае. Размер пограничного слоя по порядку величины равен

$$\Delta \xi \approx c/\omega_{pi}$$

и может оказаться значительно меньше характерной длины свободного пробега частиц, поэтому этот пограничный слой можно назвать бесстолкновительным. Основная диссипация энергии и сильное торможение потока происходят вблизи электрода в узком слое, в котором локализована максимальная плотность тока. В этом слое происходит турбулентное торможение ионов. Энергия, выделяемая при торможении ионов, идет на турбулентный нагрев электронов.

Таким образом, показано, что при обтекании разреженным потоком плазмы намагниченных тел, при некоторой величине скорости потока в пограничном слое может возникнуть микроскопическая турбулентность, приводящая к бесстолкновительной диссипации энергии потока, турбулентному нагреву плазмы и формированию бесстолкновительного пограничного слоя, размер которого меньше длины свободного пробега частиц. Однако при некотором соотношении между скоростью потока и напряженностью поля такое обтекание может оказаться неустойчивым из-за опрокидывания профиля волны.

Поступила 15 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.
2. Морозов А. И., Шубин А. П. О приэлектродных слоях в течениях хорошо проводящей невязкой плазмы. ПМТФ, 1967, № 5.
3. Морозов А. И., Шубин А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, вып. 6.
4. Арефьев В. И. Турбулентный нагрев ионов магнитогидродинамическими волнами. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2.
5. Березин Ю. А. О цилиндрических волнах, распространяющихся поперек магнитного поля в разреженной плазме. ПМТФ, 1966, № 4.
6. Иванов А. А., Рудаков Л. И. Динамика квазилинейной релаксации бесстолкновительной плазмы. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 5.
7. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964.