

## ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕТОДОВ

Л.А. Табаровский, М.И. Эпов\*

*Baker Atlas, 2001 Rankin Road, Houston, Texas, 77073, USA*

*\* Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Обоснована и описана методика качественной и количественной оценки результатов интерпретации данных геоэлектрики. Формализованы понятия разрешающей способности, глубинности и эквивалентности при решении обратных задач. Приведены примеры, иллюстрирующие различные аспекты предложенных подходов.

*Эквивалентность, разрешающая способность, распределение измеренных величин, доверительные интервалы, геоэлектрика.*

### ESTIMATING RESOLUTION OF ELECTROMAGNETIC LOGGING

L.A. Tabarovsky and M.I. Epov

A new method for estimating the quality of geoelectrical data inversion implies formalization of the concepts of horizontal and vertical resolution and equivalence. Various aspects of the suggested approach are illustrated by examples.

*Equivalence, resolution, log data distribution, confidence intervals, geoelectric prospecting*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений развития геоэлектрики является повышение разрешающей способности при одновременном увеличении глубинности исследований [1]. Разрешающая способность представляет основную суммарную характеристику геофизического эксперимента и отражает предельно достижимое при данной системе наблюдений качество определения параметров изучаемого геологического объекта. Известные подходы к оценке разрешающей способности [2] различаются выбором критериев. В настоящей работе предпочтение отдано статистическому подходу [3]. Систематизированное описание применения методов статистики к решению обратных задач дано в работе В.Ф. Турчина с соавторами [4].

Оценка эффективности интерпретации осуществляется, как и в работе Л.Н. Порохоровой, А.А. Ковтун [5], на основе информационной матрицы. Однако подход, приводящий к этой матрице, связан не с байесовскими оценками, а с проектированием области неопределенности данных в пространство параметров. Проектирование и анализ структуры ошибок осуществляется методом Марквардта [6].

Новые подходы, связанные с адекватным учетом априорной информации, к оценке разрешения с использованием метода наименьших квадратов и статистических распределений изложены в ряде работ С.В. Гольдина с соавторами [7—9].

Как известно, интерпретация геофизических данных принципиально неоднозначна [10]. Причины этого можно усмотреть уже в самой общей схеме интерпретации, если рассматривать ее как процесс согласования экспериментальных ( $E$ ) и модельных ( $M$ ) данных в рамках некоторого решающего правила  $R$ . Под модельными данными понимаются результаты моделирования сигналов в экспериментальной системе наблюдения на математической модели геофизического объекта. Решающее правило — это критерий согласованности  $E$ - и  $M$ -данных. Если критерий удовлетворяется, модель отождествляется с объектом. Такая структура соответствует наиболее употребительной схеме интерпретации — подбору. Все математические модели, не противоречащие наблюдениям, будем называть, согласно общепринятой терминологии, эквивалентными. Источником эквивалентности могут быть свойства как модели, так и экспериментальных данных. В соответствии с этим будем рассматривать два типа эквивалентности: модельно обусловленную, или  $M$ -эквивалентность, и экспериментально обусловленную, или  $E$ -эквивалентность.

$M$ -эквивалентность связана с неоднозначностью выбора модели в рамках зафиксированной экспериментом структуры данных. Например, если число независимых параметров модели равно числу независимых измерений, то эквивалентность может проявляться как результат нелинейной зависимости  $M$ -данных от параметров модели. Множество эквивалентных моделей в этом случае будет счетным. Если число параметров превышает количество данных, то множество эквивалентных моделей будет непрерывным в пространстве параметров или будет состоять из ряда непрерывных подмножеств. Сущест-

вание  $M$ -эквивалентности не противоречит теоремам единственности для обратных задач, поскольку эти теоремы доказываются для непрерывно распределенных систем наблюдений, мы же рассматриваем их конечные дискретные аналоги. Теоремы единственности в этом случае указывают лишь возможный способ сужения эквивалентности — увеличение плотности наблюдений.

$E$ -эквивалентность порождается неотъемлемым внутренним свойством экспериментальных данных — неопределенностью, обусловленной естественными помехами и ограниченной инструментальной точностью. Относительно результатов измерений может быть высказано лишь утверждение об их принадлежности к определенным доверительным областям. Всевозможным значениям данных в пределах доверительной области соответствует множество эквивалентных моделей.

Принципиальное различие двух типов эквивалентности выявляется при сравнении размеров эквивалентных областей в нормированном пространстве параметров. В случае  $E$ -эквивалентности диаметр эквивалентной области определяется погрешностью эксперимента и в пределе, для идеальных измерений, стремится к нулю. В то же время диаметр модельно обусловленной эквивалентной области остается конечным. В соответствии с такими представлениями будем  $E$ -эквивалентность считать локальной, а  $M$ -эквивалентность — глобальной.

Основное средство преодоления глобальной эквивалентности при недостаточной системе наблюдений — привлечение априорной информации, на основе которой формируется начальное приближение для подбора параметров модели. Для сужения экспериментально обусловленной эквивалентности и, следовательно, для повышения достоверности интерпретации необходимо наряду с увеличением точности измерений разрабатывать методы более эффективного планирования эксперимента и обработки его результатов. При этом важнейшей целью является повышение чувствительности данных к параметрам исследуемых объектов при одновременном подавлении естественных и геологических помех. На этапе планирования эта задача решается средствами проектирования установок и соответствующих алгоритмов обработки.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для математического описания системы эксперимент—модель целесообразно ввести пять линейных пространств, точки которых будут соответствовать экспериментальным данным, геофизическому объекту, системе наблюдений, модели среды и синтетическим данным.

**Пространство экспериментальных данных  $G$ .** Пусть результат эксперимента представляет собой совокупность  $n_g$  измеренных величин и описывается вектором  $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_{n_g}\}$ . Эту совокупность будем представлять точкой в евклидовом пространстве  $G$ . Пространство описывает весьма различные по физической природе экспериментальные данные. Величины  $g_1, \dots, g_{n_g}$  могут быть физически однородны и соответствовать, например, значениям какой-либо компоненты поля на частотах, временах задержки или на разносах. Они могут также описывать комплексный эксперимент и иметь несхожую физическую природу.

**Пространство параметров объекта  $Q$ .** Считаем, что геометрические и физические свойства объекта допускают описание с помощью конечного числа параметров  $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_{n_q}\}$ . Тогда объект изображается точкой в  $n_q$ -мерном пространстве. Целью интерпретации является определение размерности и компонент вектора  $\mathbf{q}$ .

**Пространство конструктивных параметров  $K$ .** Управляемые экспериментатором параметры системы наблюдений будем называть конструктивными. К их числу относятся моменты, частоты, времена регистрации, координаты активных и пассивных элементов, установок и т. д. Пусть измеряемая величина  $\mathbf{g}$  зависит от  $n_k$  конструктивных параметров  $\mathbf{k}_j$  ( $j = 1, \dots, n_k$ ). Величины  $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_{n_k}\}$  будем рассматривать как координаты точки в пространстве  $K$ .

**Пространство параметров модели  $P$ .** На стадии интерпретации результатов измерений выдвигается определенная гипотеза о параметрическом описании объекта, основанная на априорных данных о разрезе и предварительном их качественном анализе. Она определяет параметризацию класса априорно допустимых моделей. Пусть  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n_p$ ) — параметры моделей. Точку с координатами  $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_{n_p}\}$  будем считать принадлежащей  $n_p$ -мерному пространству  $P$ .

**Пространство модельных данных  $F$ .** Сигналы в конструктивной конфигурации  $\mathbf{k}$  из пространства  $K$  могут быть смоделированы (на основе соответствующих уравнений) на модели  $\mathbf{p}$  из пространства  $P$ . Результат моделирования — вектор  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_{n_g}\}$ . Векторы  $\mathbf{f}$  будем считать элементами линейного векторного пространства  $F$ . По физической природе и структуре элементов пространства  $F$  и  $G$  тождественны. Поэтому между этими пространствами можно не делать различия.

Между элементами различных пространств существуют функциональные связи. Экспериментальные данные  $\mathbf{g}$  определяются конструктивными параметрами  $\mathbf{k}$  и параметрами объекта  $\mathbf{q}$ . Кроме того, в результаты измерения входит естественная помеха  $\Delta$ . Вектор  $\Delta$  идентичен по структуре и размерности векторам  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ . Таким образом

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \Delta.$$

Элементы пространства модельных данных определяются векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{k}, \mathbf{p}).$$

Решающее правило  $R$  формулируется в терминах определенным образом выбранной меры близости векторов  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  и обычно имеет вид неравенства

$$L(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq L_k.$$

Здесь  $L_k$  — критическое значение принятой меры.

Отождествление объекта и модели осуществляется в рамках локальной эквивалентности. Величина  $L$  является мерой расстояния между объектом и моделью в пространстве параметров.

### КРИТЕРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДАННЫХ

В процессе проведения эксперимента конструктивные параметры могут быть нестабильны или измеряться с определенной погрешностью, т. е.  $\mathbf{k}$  — случайный вектор. Случайным является также вектор помехи  $\Delta$ . Отсюда вытекает, что измеряемый и модельный сигналы  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{f}$  также случайны.

Геофизические измерения выполняются с весьма разнообразными объемами выборок  $n_a$ . В уникальных экспериментах  $n_a = 1$ , а в схемах с накоплением  $n_a \gg 1$ . Будем считать, что для любого случайного вектора  $\mathbf{v}$  объем выборок по всем компонентам  $v_1, \dots, v_n$  одинаков. Для оценки математического ожидания  $\mathbf{m}_v$  и рассеяния вектора  $\mathbf{v}$  будем использовать выборочное среднее  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_v$  и выборочную ковариационную матрицу  $\hat{B}_v$ :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_v = \frac{1}{n_a} \sum_{j=1}^{n_a} \mathbf{v}_j,$$

$$\hat{B}_v = \frac{1}{n_a - 1} \sum_{j=1}^{n_a} (\mathbf{v}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_v) (\mathbf{v}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}}_v)^T.$$

Здесь индекс „т“ означает транспонирование вектор-столбца. Решающее правило  $R$ , на основе которого выносится суждение о тождественности модели и объекта, является обычно мерой близости модельного сигнала  $\mathbf{f}$  и выборочного среднего  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_g$  вектора экспериментальных данных  $\mathbf{g}$ . Таким образом, необходимо нормировать пространство  $G$ . Поскольку выборочное среднее является случайной величиной, то распределение нормы  $\|\hat{\boldsymbol{\mu}}_g - \mathbf{m}_g\|$  может служить для определения доверительной области значений вектора  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_g$ . Следовательно, при нормировании пространства  $G$  целесообразно отдавать предпочтение таким нормам, которые, как статистики, имели бы известные распределения, по крайней мере, в рамках соответствующих параметрических гипотез. Например, при многомерном нормированном распределении задается статистика  $T^2$ , определяемая соотношением

$$T^2 = n_a (\hat{\boldsymbol{\mu}}_g - \mathbf{m}_g)^T \hat{B}_g^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_g - \mathbf{m}_g), \quad n_a > n_g.$$

Величина  $\left( \frac{T^2}{n_a - 1} \frac{n_a - n_g}{n_g} \right)$  подчиняется центральному  $F$ -распределению с  $n_g$  и  $(n_a - n_g)$  степенями свободы.

С другой стороны, функция  $T$  удовлетворяет всем аксиомам нормы.

В процессе интерпретации целесообразно оценивать близость векторов  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_g$  и  $\mathbf{f}$  в смысле  $T$ -нормы, принимая текущие значения  $\mathbf{f}$  как гипотезы о математическом описании  $\mathbf{m}_g$ . Если  $T_\alpha^2$  квантиль  $T^2$ -распределения, соответствующая доверительному уровню  $(1 - \alpha)$ , то доверительное множество значений  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_g$  в случае нормального распределения определяется, как известно, соотношением

$$n_a ((\hat{\boldsymbol{\mu}}_g - \mathbf{m}_g)^T \hat{B}_g^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_g - \mathbf{m}_g)) \leq T_\alpha^2.$$

Если в процессе подбора минимизировать  $T^2(\boldsymbol{\mu}_g - \mathbf{f})$ , то решающее правило для принятия текущего значения  $\mathbf{f}$  в качестве основной гипотезы о значении  $\mathbf{m}_g$  можно сформулировать следующим образом:

$$R : T^2(\boldsymbol{\mu}_g - \mathbf{f}) \leq T_\alpha^2. \quad (1)$$

Правило (1) имеет смысл при условии, что величина подчиняется многомерному нормальному распределению. Значение вектора параметров модели, минимизирующее левую часть (1), обозначим через  $\mathbf{p}_0$ , соответствующее значение модельного сигнала — через  $\mathbf{f}_0$ . Модель  $\mathbf{p}_0$  будем называть центральной.

После того как принята основная гипотеза  $\mathbf{f}_0(\mathbf{p}_0)$ , нужно рассмотреть вероятные конкурирующие. При критическом уровне  $\alpha$  вероятность отвергнуть основную гипотезу, если она верна, равна  $\alpha$  (ошибка первого рода). Представляется вполне разумным принимать во внимание на равных с основной гипотезой все конкурирующие гипотезы, для которых вероятность ошибки второго рода больше  $\alpha$ . Совокупность таких гипотез может быть описана в случае нормального распределения с помощью параметра нецентральности  $F$ -распределения. Обозначим через  $\tau_\alpha$  такое значение параметра нецентральности, при котором ошибка второго рода равна  $\alpha$  при критическом уровне основной гипотезы, равным  $\alpha$ . Таким образом, область эквивалентных конкурирующих гипотез определится соотношением

$$n_a (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^T \hat{S}_g^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \leq \tau_\alpha^2. \quad (2)$$

Здесь  $\hat{S}_g$  — истинная ковариационная матрица. Поскольку она неизвестна, можно использовать для оценки области (2) выборочно-ковариационную матрицу. Соотношение (2) определяет в случае нормального распределения область эквивалентных значений модельных или измеренных сигналов на доверительном уровне  $(1 - \alpha)$ .

Параметрическое оценивание области эквивалентности требует выдвижения довольно жестких гипотез о характере распределения. Целесообразно рассмотреть непараметрические критерии. В случае нормального распределения мы исходим из того, что в процессе интерпретации следует по возможности приблизить модельный сигнал  $\mathbf{f}$  к выборочному среднему в смысле критерия (1).

#### КРИТЕРИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Соотношение (2) определяет область эквивалентности в пространстве модельных данных. Наша основная задача заключается в том, чтобы описать область эквивалентности в пространстве параметров  $P$ . Для этого нужно найти в этом пространстве прообраз эллипсоида (2). Мы сделаем это в линейном приближении по параметрам модели  $\mathbf{p}$ . Разложим вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  в ряд в окрестности точки  $\mathbf{p}_0$ . Поскольку  $\mathbf{f}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{f}_0$ , то можно записать

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_0 \approx \hat{Z} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0).$$

Здесь  $\hat{Z}$  — матрица  $n_g n_p$  частных производных модельного сигнала по параметрам  $p_j$ :

$$Z_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} (\mathbf{p}_0).$$

В результате получаем соотношение, определяющее область эквивалентности в пространстве параметров

$$n_a ((\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \hat{A} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)) \leq L_\alpha^2. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{A} = \hat{Z}^T \hat{B}_g^{-1} \hat{Z}$ . Неравенство (3) описывает эллипсоид в пространстве параметров, и все его свойства определяются свойствами симметричной и неотрицательной матрицы  $\hat{A}$  размерностью  $n_p$ . Предельно возможное значение ее ранга равно  $n_p$ . Для нормировки векторов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_0$  и матрицы  $\hat{A}$  в (3) целесообразно ввести диагональную матрицу

$$\hat{M}_0 = \begin{pmatrix} p_{01} & & & & 0 \\ & p_{02} & & & \\ & & 0 & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p_{0N_p} \end{pmatrix}.$$

В нормированном виде (3) переписывается следующим образом:

$$n_a (\boldsymbol{\delta}_p^T \hat{A}_m \boldsymbol{\delta}_p) \leq L_\alpha^2. \quad (4)$$

Здесь  $\delta p_i = \frac{p_i}{p_{0i}} - 1$ ,

$$\hat{A}_m = \hat{M}_p^T \hat{Z}^T \hat{B}_g^{-1} \hat{Z} \hat{M}_p. \quad (5)$$

Компоненты вектора  $\delta \mathbf{p}$  имеют, согласно (5), смысл относительных приращений компонент вектора  $\mathbf{p}$  в точке  $\mathbf{p}_0$ .

Соотношение (4) определяет область эквивалентности в пространстве параметров, объединяя важнейшие характеристики натурального и модельного этапов эксперимента. Ковариационная матрица  $\hat{B}_g$ , а также объем выборки  $n_a$  характеризуют статистические свойства данных об измерительной процедуре. Матрица описывает аналитические свойства модели. Это соотношение носит вероятностный смысл. Гипотеза  $p_0$  принимается с доверительной вероятностью  $(1 - \alpha)$ . За пределами области (4) остаются те модели, для которых вероятность быть отброшенным, если они верны, не превышает  $\alpha$ .

Рассмотрим подробнее структуру области эквивалентности, определяемую соотношением (4). Пусть  $l_1^A, l_2^A, \dots, l_{n_p}^A$  — собственные числа матрицы  $\hat{A}_M$ ;  $\mathbf{w}_1^A, \mathbf{w}_2^A, \dots, \mathbf{w}_{n_p}^A$  — нормированные собственные векторы.

Полагая

$$\delta p = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{w}_i^A dt_i \quad (6)$$

и подставляя (6) в (4), получим с учетом ортогональности собственных векторов

$$n_a \sum_{i=1}^{n_p} \frac{l_i^A (dt_i)^2}{L_\alpha^2} \leq 1. \quad (7)$$

Очевидно, что (7) определяет внутренность  $n_p$ -мерного эллипсоида с полуосями

$$\beta_i = \frac{L_\alpha}{\sqrt{l_i^A} n_a}.$$

Направление  $i$ -й полуоси в пространстве  $P$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{w}_i^A$ . Если изменять параметры  $p_i$  совместно таким образом, чтобы это соответствовало перемещению вдоль одного из собственных векторов  $\mathbf{w}_i^A$ , то мы получим один из  $n_p$  возможных главных принципов эквивалентности:

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{w}_i^A dt, \quad (8)$$

или по компонентам

$$\frac{dp_k}{p_{0k}} = (\mathbf{w}_i^A)_k dt. \quad (9)$$

В том же линейном приближении можно (9) представить в виде

$$p_k = p_{0k} e^{(\mathbf{w}_i^A)_k dt}. \quad (10)$$

Смысл параметра  $t_i$  легко установить, если умножить скалярно правую и левую части (8) на  $\mathbf{w}_i^A$ . Учитывая нормированность вектора  $\mathbf{w}_i^A$ , получаем

$$(\mathbf{w}_i^A)^T \delta \mathbf{p} = dt_i.$$

Понимая компоненты в смысле левой части (9), получаем

$$d \ln m_i = dt_i,$$

$$m_i = p_1^{(\mathbf{w}_i^A)_1} p_2^{(\mathbf{w}_i^A)_2} \dots p_{n_p}^{(\mathbf{w}_i^A)_{n_p}}.$$

Таким образом, параметр  $t_i$  есть логарифм обобщенного параметра, а абсолютные приращения  $dt_i$  характеризуют относительные приращения  $t_i$ . Параметры  $t_i$  являются независимыми в том смысле, что если относительные приращения параметров  $p_k$  связаны соотношениями (10), то это приводит к изменению только  $t_i$ , все остальные параметры  $t_j$  ( $j \neq i$ ) при этом не изменяются. Допустимые пределы изменений параметра  $t_i$  в рамках принципа эквивалентности (4) или (7) определяются соотношением (полагаем, что  $t_i(\mathbf{p}_0) = 0$ )

Таблица 1. Собственные значения и векторы матрицы чувствительности для ВЭЗ в трехслойной среде

Номер обобщенного параметра				
1	2	3	4	5
Собственные значения матрицы $\hat{A}_M$				
69,7	40,7	1,66	0,348	$0,375 \cdot 10^{-5}$
Собственные векторы матрицы $\hat{A}_M$				
$w_1$				$w_5$
-0,503	0,788	0,296	0,197	-0,0003
-0,114	0,267	-0,301	-0,908	0,019
-0,149	0,080	-0,623	0,233	-0,728
0,156	-0,077	0,652	-0,273	-0,686
-0,829	-0,543	0,097	-0,087	-0,0009
Главные полуоси				
0,083	0,108	0,535	1,17	357,0

$$-\frac{L_k}{\sqrt{I_i^A n_a}} \leq t_i \leq \frac{L_k}{\sqrt{I_i^A n_a}}.$$

Соотношения (4), (7) описывают  $n_p$  принципов эквивалентности. При этом наиболее широкая эквивалентность (т. е. наиболее значительные относительные изменения параметров, оставляющие модель в пределах зоны эквивалентности) имеет место в направлении собственного вектора матрицы  $\hat{A}_M$ , соответствующего наименьшему собственному числу.

В табл. 1 приведены в качестве примера результаты исследования эквивалентности для системы данных вертикальных электрических зондирований (ВЭЗ), полученных на трехслойной модели среды с параметрами  $\rho_1 = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ,  $h_1 = 100 \text{ м}$ ,  $\rho_2 = 10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ,  $h_2 = 10 \text{ м}$ ,  $\rho_3 = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Они включали 10 измерений  $f_i$  на разносах  $r_i/h_1 = (\sqrt{2})^{i-1}$ . Имитировались многократные измерения путем наложения нормально распределенной помехи с диагональной ковариационной матрицей  $\hat{S}_g$ , диагональные элементы которой имели значения:

$$(\hat{S}_g)_{ii} = 0,25f_i^2, \quad i = 1, \dots, 10.$$

В результате формировалась выборка наблюдаемых данных  $\{\mathbf{g}_k\}, k = 1, \dots, 60$ , т. е. моделировалось 60 реализаций процесса ( $n_a = 60$ ).

Собственные значения матрицы  $\hat{A}_M$  изменяются в очень широких пределах. По крайней мере, последнее из них определяет явно несущественный параметр. Полуоси эллипсоида эквивалентности приведены для доверительного уровня 0,95. Координаты собственных векторов расположены по столбцам и упорядочены в соответствии со следующим размещением параметров:  $\rho_1, h_1, \rho_2, h_2, \rho_3$ .

Собственный вектор  $w_5$  с хорошей точностью определяет обобщенный параметр  $T_2 = \rho_2 h_2$  (поперечное сопротивление тонкого слоя), который на имеющейся системе наблюдений не определяется. Анализ остальных собственных векторов показывает, что влияние тонкого слоя устойчиво определяется параметром  $S_2 = h_2/\rho_2$ , т. е. продольной проводимостью.

### РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЙ

В результате интерпретации получается вектор  $\mathbf{p}_0$ , характеризующий основную гипотезу о строении среды, и область эквивалентности, определяемую соотношением (4). Среди эквивалентных моделей могут быть такие, в которых те или иные детали отсутствуют. Например, в точке  $\mathbf{p}_0$  проводимости пласта  $\sigma_1$  и локального объекта  $\sigma_2$  могут различаться. Однако модель, характеризуемая соотношением  $\sigma_1 = \sigma_2$ , может принадлежать области эквивалентности (рис. 1). В этом случае следует признать, что на принятом доверительном уровне объект не выделяется. Он может быть выделен либо на более низком доверительном уровне, либо при более высокой точности измерений (в обоих случаях будет уменьшена область эквивалентности). Это наводящее соображение мы и положим в основу математического определения понятия разрешающей способности.

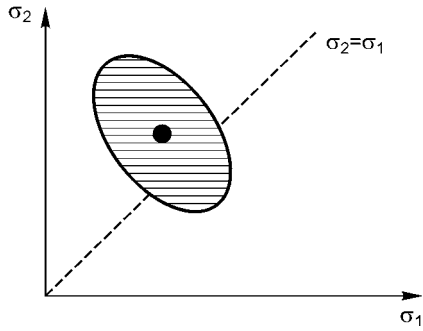


Рис. 1. Модель, характеризуемая соотношением  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Всякий элемент геоэлектрической структуры при определенных соотношениях между его параметрами и параметрами прилегающих участков среды может быть частью одного или нескольких соседних элементов или ликвидирован вообще. При этом число параметров, характеризующих модель, уменьшается. Совокупность точек, определяемых уравнением  $\sigma_1 = \sigma_2$ , образует в параметрическом пространстве  $P$  линейное многообразие  $P_A$ . Это многообразие будем называть аннулирующим многообразием локального проводника. Очевидно, можно предложить другие аннулирующие многообразия, например,  $r = 0$  или  $h = \infty$  ( $r$  — наибольший линейный размер,  $h$  — глубина погружения объекта). В общем случае будем полагать, что аннулирующее многообразие любого элемента модели может быть задано с помощью линейных соотношений, разрешенных относительно аннулируемых параметров

$$\delta p = \hat{R} \delta \Pi + Q.$$

Здесь  $\hat{R}$  — матрица размерности  $n_p (n_p - k)$ ,  $\delta \Pi$  — вектор длины  $(n_p - k)$ , образованный из вектора  $\delta p$  вычеркиванием элементов  $\delta p_{i1}, \delta p_{i2}, \dots, \delta p_{ik}$ ,  $Q$  — вектор длины  $n_p$ , с отличными от нуля элементами  $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}$ . Параметры  $p_i$  на аннулирующем многообразии целесообразно выбрать таким образом, чтобы минимизировать квадратичную форму (4). Точка  $p^*$ , минимизирующая норму, является на аннулирующем многообразии ближайшей к исходной модели.

Получаем принцип эквивалентности в пространстве параметров упрощенной модели:

$$n_a (\delta \Pi - \delta \Pi^*)^T (\hat{R}^T \hat{A}_M \hat{R}) (\delta \Pi - \delta \Pi^*) \leq L_\alpha^2 - (\delta p^{*T} \hat{A}_M \delta p^*) n_a. \quad (11)$$

Если правая часть (11) положительна, это означает, что точка  $p^*$  осталась в пределах области эквивалентности. В этом случае система измерений не обладает разрешающей способностью, необходимой для выделения аннулирующего объекта на принятом доверительном уровне. Таким образом, критерий разрешимости данных по отношению к какому-либо объекту на зафиксированном доверительном уровне можно сформулировать следующим образом:

$$n_a (\delta p^{*T} \hat{A}_M \delta p^*) > L_\alpha^2. \quad (12)$$

Здесь  $(\delta p^*)_i = \frac{p_i^* - p_{0i}}{p_{0i}}$ ,  $p^*$  — ближняя к исходной модели точка аннулирующего многообразия объекта. Если объект не разрешим, то соотношение (12) описывает новую область эквивалентности. Это эллипсоид с центром в точке  $p^*$ . Действительно

$$(\delta \Pi - \delta \Pi^*)_i = - \frac{\Pi_i - \Pi_i^*}{\Pi_i}.$$

Это равенство записано с учетом линейного приближения. Совместное аннулирование некоторых объектов осуществляется точно так же, при этом нужно в соотношении (11) включить все условия аннулирования.

Рассмотренная методика оценки разрешающей способности позволяет построить процедуру упрощения разреза в пределах эквивалентной области. Такая процедура является важным этапом оценки окончательных результатов интерпретации, позволяя проверять достоверность выделения тех или иных элементов среды и отказываться от них, если данные не разрешены или нет априорных сведений, подтверждающих их существование в реальном объекте.

Последовательно отказываясь от неразрешенных деталей, можно построить предельно простой разрез, все элементы которого выделяются достоверно. Естественно, что начинать процедуру упрощения разреза нужно с аннулирования объекта, наименее отдаляющего модель от центральной. Таким образом, в дополнение к уже разработанным приемам аннулирования необходимо сформулировать принцип упорядочения структурных элементов объекта по степени удаленности ближайших точек аннулирующих многообразий от центральной модели. Если рассмотреть частные принципы эквивалентности по каждому параметру модели, то из (4) легко увидеть, что вклад параметра  $p_i$  в норму пропорционален диагональному элементу матрицы  $\hat{A}_M$ . Это обстоятельство можно принять за основу при ранжировании элементов среды.

Пусть объект содержит  $n_s$  структурных элементов  $s_i$ , а  $Tr(s_i)$  — сумма тех диагональных элементов

Таблица 2.

Относительная чувствительность ВЭЗ данных

Параметр	1	2	3	4	5
	101	55,2	22,3	8,36	0,163
$\rho_1$	0,734	0,319	0,575	-0,169	-0,0172
$h_1$	0,576	0,0213	0,583	0,539	0,196
$\rho_2$	0,325	-0,546	-0,230	-0,335	-0,657
$h_2$	0,155	0,526	0,0058	0,414	-0,726
$\rho_3$	0,0217	-0,569	0,526	0,630	-0,0434
$h_3$	0,069	0,096	0,146	0,239	1,69

матрицы  $\hat{A}_M$ , которые соответствуют всем параметрам, определяющим элемент  $s_i$ . Для процедуры упрощения разреза целесообразно упорядочить элементы  $s_i$  в порядке возрастания величин  $Tr(s_i)$ .

В качестве примера рассмотрим проверку разрешающей способности и процедуру упрощения для следующего горизонтально-слоистого разреза:  $\rho_1 = 1$  Ом·м,  $h_1 = 100$  м,  $\rho_2 = 0,1$  Ом·м,  $h_2 = 100$  м,  $\rho_3 = 0,2$  Ом·м,  $h_3 = 100$  м,  $\rho_4 = 1$  Ом·м. Метод — вертикальные электрические зондирования, система разносов  $r_i/h_1 = (0,25) 2^{i-1}$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). Совокупность данных  $\{g_k\}$  ( $k = 1, \dots, 60$ ) получена из модельного сигнала  $\mathbf{f}$  также в примере, рассмотренном в табл. 1. Доверительный уровень 0,95. Обозначим слои через  $s_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Величины  $Tr(s_i)$  в исходной модели имеют следующие значения:

$$Tr(s_1) = 113,8, \quad Tr(s_2) = 13,45, \quad Tr(s_3) = 9,609, \quad Tr(s_4) = 27,78.$$

Упрощение разреза целесообразно начинать с проверки разрешающей способности данных относительно слоя  $s_3$ . В качестве уравнения аннулирующего многообразия для этого слоя следует принять условие  $\rho_3 = \rho_2$ . Объединение  $s_3$  с нижним полупространством нецелесообразно, поскольку  $Tr(s_4) > Tr(s_1)$ . После аннулирования  $s_3$  получается трехслойный разрез.

Величина нормы в левой части (12) составила 1,11 при  $L_\alpha^2 = 28,63$ . Таким образом, слой  $s_3$  не выделяется. Отметим, что при упрощении разреза с высокой точностью сохранилась суммарная продольная проводимость слоев  $s_2$  и  $s_3$ . В исходной модели  $h_2/\rho_2 + h_3/\rho_3 = 20$ , в упрощенной модели  $h_2/\rho_2 = 21,6$ . Попытка объединить слои  $s_2, s_3$  и  $s_4$  дает значение левой части выражения (13), равное 726,8. Таким образом, полученный трехслойный разрез имеет разрешение по всем элементам. Вместе с тем это не означает, что все параметры разреза могут быть в результате интерпретации определены с высокой точностью. Структура окончательной модели приведена в табл. 2. Из нее следует, что, по меньшей мере, один параметр разреза в результате интерпретации определить не удастся (в силу малости последнего собственного числа).

Рассмотрим пример построения доверительных областей в индукционном каротаже высокого разрешения (HDIL) [11—13]. Модель включает скважину (диаметр  $d_c = 0,3$  м, электропроводность бурового раствора  $\sigma_c = 0,5$  См/м), пересекающую коллектор (мощность 1,2 м, электропроводность  $\sigma_{\text{п}} = 0,1$  См/м). Пласт расположен во вмещающей среде с электропроводностью  $\sigma_{\text{вм}} = 0,05$  См/м. Из 1000 измерений с нормально распределенным шумом (стандартное отклонение 1 мСм/м) 953 попали в предсказанную 95%-ю доверительную область в пространстве параметров (т. е. 95,3 %, рис. 2).

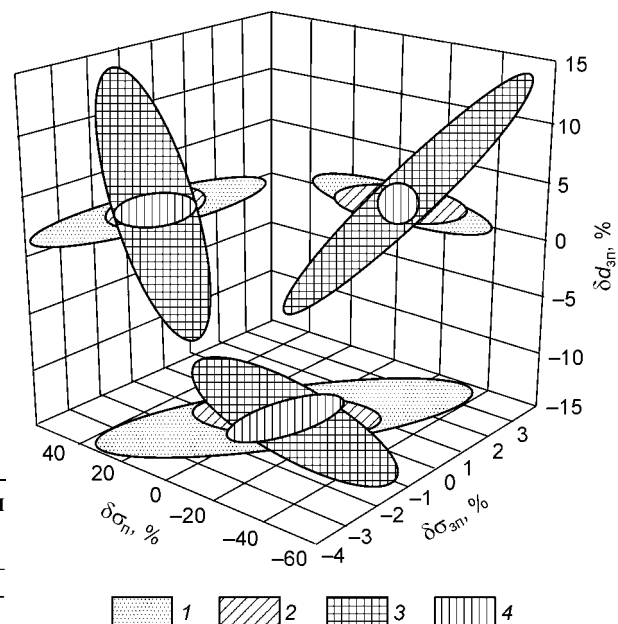
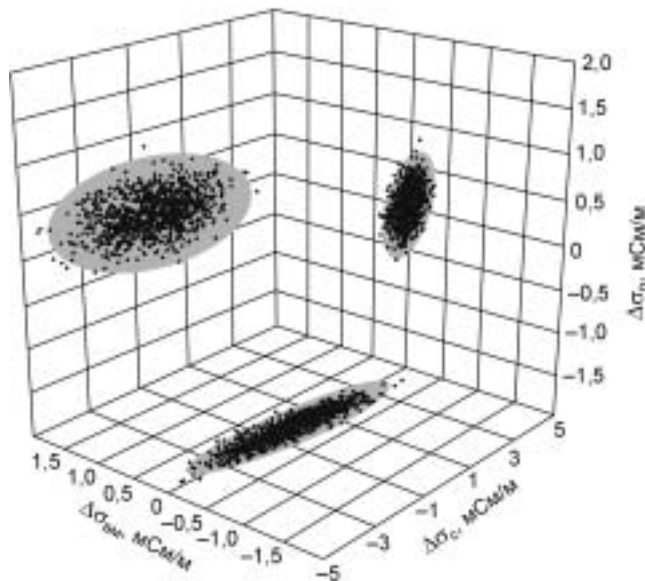


Рис. 2. Разрешающая способность комбинации инструментов.

1 — DPIL + SFL; 2 — DPIL + SFL + MLL + TBRT; 3 — DLL + TBRT + MLL; 4 — DPIL + SFL + DLL + MLL + TBRT. Пояснения в тексте.





**Рис. 3. Статистический эксперимент с синтетическими данными индукционного каротажа высокого разрешения.**

Как уже указывалось выше, области неопределенности могут оцениваться по данным не одного, а целой совокупности методов. Рассмотрим в качестве модели реально встречающуюся ситуацию, когда скважина ( $\sigma_c = 0,1$  См/м,  $d_c = 0,2$  м) вскрывает тонкий пласт высокой электропроводности  $\sigma_n = 10$  См/м, содержащий зону проникновения (электропроводность  $\sigma_{zn} = 1$  См/м, диаметр  $d_{zn} = 1,5$  м). Доверительные области построены для следующего набора методов постоянного и переменного токов: DPIL (двухфазный индукционный каротаж [14]), SFL (малоглубинный фокусированный боковой каротаж [15]), MLL (микробоковой каротаж [16]), TBRT (ме-

тод сопротивлений для мелкослоистой среды [17]), DLL (двойной боковой каротаж [18]). Все синтетические данные смоделированы с нормально распределенным шумом (относительное стандартное отклонение 1 %).

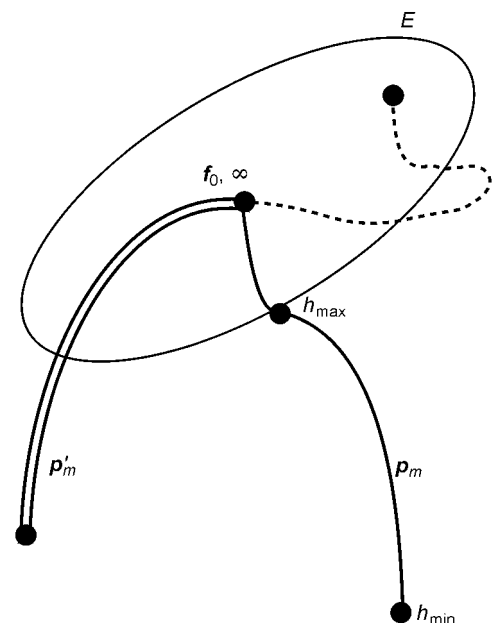
На рис. 3 показаны области неопределенности параметров для различных наборов данных. Комбинируя различные инструменты, можно, в зависимости от их физической природы, более точно определять те или иные модельные параметры. Наилучший результат дает совместное применение всего набора инструментов.

Рассмотрим вопрос о глубинности системы наблюдений. Он может быть решен на основе оценки разрешающей способности в пространстве данных. Пусть есть некоторая основная модель  $M_0$ , на которой система наблюдений дает сигнал  $f_0$  с областью эквивалентности  $E$ , определенной в пространстве данных соотношением (3). Пусть есть объем  $m$ , который характеризуется параметрами  $p_m$  и может в модели  $M_0$  размещаться в диапазоне глубин от  $h_{min}$  до  $\infty$  (точка  $h = \infty$  является аннулирующим многообразием объекта). Рассмотрим траекторию объекта в пространстве  $F$ , когда он перемещается из бесконечности в предельно допустимую геометрически точку  $h = h_{min}$ . Очевидно, эта траектория начинается в точке  $f_0$  и вначале проходит внутри области  $E$  (рис. 4). При некотором  $h = h_{max}$  траектория выходит за пределы области эквивалентности и объект становится разрешимым. Значение  $h_{max}$  можно принять за характеристику глубинности метода по отношению к объекту  $m$ . Очевидно, что глубинность при фиксированной основной модели  $M_0$  определяется двумя главными факторами: доверительным уровнем  $(1 - \alpha)$  и параметрами объекта  $p_m$ :

$$H = h_{max}(p_m, \alpha).$$

Если параметры  $p_m$  изменяются, очевидно, изменяется и  $h_{max}$  (см. рис. 4, двойная линия). Траектория объекта в пространстве данных может пройти и таким образом, что объект окажется разрешенным как в одном (см. рис. 4, сплошная линия), так и в нескольких (см. рис. 4, штриховая) диапазонах глубин.

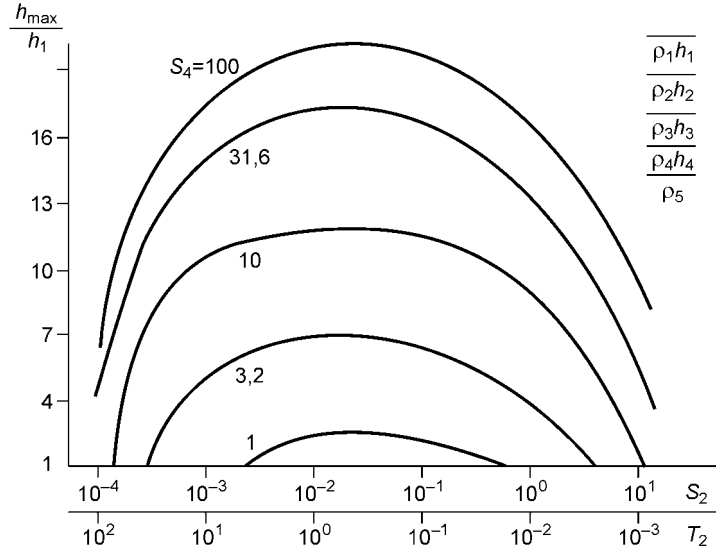
На рис. 5 в качестве примера приведены графики глубинности метода ВЭЗ по отношению к проводящему пласти мощностью  $h_4/h_1 = 0,1$ , перекрытому изолирующим или проводящим экраном мощностью  $h_2/h_1 = 0,1$ . Верхняя граница



**Рис. 4. Траектория объекта в пространстве  $F$ .**

**Рис. 5. Графики глубинности метода ВЭЗ по отношению к проводящему пласту.**

экрана расположена на глубине  $h_1 = 100$  м. Система разносов —  $r_i/h_1 = (\sqrt{2})^{i-1}$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). Варьируются параметры  $S_2 = h_2/\rho_2$  (или  $T_2 = h_2/\rho_2$ ), а также  $S_4 = h_4/\rho_4$ . По оси ординат отложены значения  $h_{\max}/h_1$  при доверительном уровне 0,95 %. Система экспериментальных данных смоделирована так же, как и в предыдущих случаях. Как видно из рис. 5, глубинность существенно уменьшается в двух крайних случаях, когда второй слой становится либо совсем плохо проводящим ( $S_2 < 10^{-4}$ ,  $T_2 > 10$ ), либо очень сильно проводящим ( $S_2 > 10$ ,  $T_2 < 10^{-3}$ ). Причем глубинность возрастает, если 4-й пласт становится все более проводящим. В этом случае глубинность изменяется от 2,5 до 17 при изменении проводимости в 100 раз. Отметим, что максимальная глубинность достигается при  $S_2 \approx 0,05$ ,  $T_2 \approx 0,5$ . Следовательно, можно говорить, что глубинность является неотъемлемым свойством модели, тестового объекта и системы наблюдения.



**Вывод.** Математическая модель эксперимента описывается пятью линейными пространствами. Введены статистические критерии, позволяющие соотнести области эквивалентности в пространствах данных и моделей. Описаны критерии разрешающей способности системы наблюдений. И на их основе определено понятие глубинности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эпов М.И., ду Плой А., Никитенко М.И., Ельцов И.Н. Повышение разрешающей способности по глубине в индукционных электромагнитных зондированиях // Геология и геофизика, 1996, т. 37 (4), с. 83—90.
2. Глинских В.Н., Эпов М.И. Анализ пространственной чувствительности относительных характеристик в задачах высокочастотного электромагнитного каротажа // Геология и геофизика, 2005, т. 46, с. 1168—1175.
3. Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М., Наука, 1977, 328 с.
4. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Успехи физ. наук, 1970, т. 102, вып. 3, с. 345—386.
5. Порохорова Л.Н., Ковтун А.А. Исследование эффективности интерпретации экспериментальных кривых МТЗ // Прикладная геофизика. Вып. 61. М., Недра, 1970, с. 134—140.
6. Marquardt O.W. An algorithm of least squares estimation of nonlinear parameters // J. Soc. Indust. Appl. Math., 1963, v. 11, p. 431—441.
7. Гольдин С.В., Бембель Р.М. О некоторых способах регуляризации метода наименьших квадратов при обработке геофизических наблюдений // Математические методы в нефтяной геологии и геофизике. Тюмень, 1970, с. 86—102. (Труды ЗапСибНИГНИ, вып. 36).
8. Гольдин С.В., Матис Л.И. Регуляризация критерия  $T^2$  в задачах статистической классификации // Там же, с. 109—121.
9. Гольдин С.В. Основные понятия теории расчлененных алгоритмов интерпретации данных сейсморазведки // Обработка данных сейсморазведки на ЭВМ. Тюмень, 1974, с. 5—74. (Труды ЗапСибНИГНИ, вып. 72).
10. Backus G.E., Gilbert F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 266, 1970 p. 123—192.
11. Tabarovskiy L.A., Beard D.R., Mezzatesta A. Induction logging: resolution analysis and optimal tool design using block spectrum analysis // Society of professional well loganalysts logging symposium. Transactions, 1994, p. DD1—DD19.
12. Beard D.R., Zhou Q., Bigelow E.L. Practical application of new multichannel and fully digital spectrum induction system. SPE paper 36504, SPE ATCE.

13. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=3741689](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=3741689)
14. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=3741688](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=3741688)
15. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=3741688](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=3741688)
16. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=3741694](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=3741694)
17. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=3741697](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=3741697)
18. [http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS\\_SERVICES&CurrentState=START\\_SERVICEOVERVIEW&oid=4223780](http://www.bakerhughesdirect.com/cgi-bin/atlas/ATLAS/atlasDispatcher.jsp?Workflow=ATLAS_SERVICES&CurrentState=START_SERVICEOVERVIEW&oid=4223780)

*Поступила в редакцию  
25 ноября 2005 г.*