

УДК 550.834

## Разностные схемы 4-го порядка аппроксимации для уравнения Максвелла

А.Ф. Матрюков

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: maf@omzg.sccc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 15, 2022.

**Матрюков А.Ф.** Разностные схемы 4-го порядка аппроксимации для уравнения Максвелла // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 289–301.

В работе рассматриваются оптимальные разностные схемы для решения уравнений Максвелла с использованием спектрального преобразования Лагерра. В разностную схему уравнений для гармоник вводятся дополнительные параметры. Численные значения этих параметров получаются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца. Полученные таким образом оптимальные значения параметров используются при построении разностных схем — оптимальных разностных схем. Рассмотрены два варианта оптимальных разностных схем. Показано, что использование оптимальных разностных схем ведет к повышению точности решения уравнений. Простая модернизация разностной схемы дает повышение эффективности алгоритма.

**DOI:** 10.15372/SJNM20220305

**Ключевые слова:** конечно-разностный метод, оптимальный, точность, электромагнитные волны, метод Лагерра.

**Mastryukov A.F.** Finite difference schemes of the 4th order of approximation for Maxwell's equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3. — P. 289–301.

In this paper, optimum differential schemes for the solution of the Maxwell equations with the use of the Laguerre spectral transformation are considered. Additional parameters are introduced into the differential scheme of equations for harmonics. Numerical values of these parameters are obtained by minimization of an error of differential approximation of the Helmholtz equation. The optimum values of parameters thus obtained are used when constructing differential schemes — optimum differential schemes. Two versions of optimum differential schemes are considered. It is shown that the use of optimum differential schemes leads to an increase in the accuracy of the solution of the equations. A simple modification of the differential scheme gives an increase in the efficiency of the algorithm.

**Keywords:** finite difference, optimal, accuracy, electromagnetic waves, Laguerre method.

---

## 1. Введение

Спектральные методы, используемые при численном решении дифференциальных уравнений, позволяют более эффективно, чем конечно-разностные методы [1, 2], решать задачи со сложной зависимостью параметров уравнений от времени, как, например, в случае с релаксацией диэлектрической проницаемости, выраженной в интегральной форме [3, 4]. Есть задачи, такие как частотное зондирование в электроразведке [5], где также предпочтительнее использовать спектральные методы.

В ряде задач спектральный метод, основанный на преобразовании Лагерра, по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье. Эффективность обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра [6–8]. Левая часть этих уравнений не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Кроме того, система уравнений для гармоник всегда содержит только действительные переменные.

Существуют различные способы повышения точности решения, например использование разностных схем более высокого порядка аппроксимации [9] или построение разностных схем, минимизирующих погрешность дисперсионного соотношения (dispersion-relation-preserving) [10]. Ко второму типу схем относятся так называемые оптимальные разностные схемы.

В работе оптимальными называются разностные схемы, параметры которых определяются минимизацией некоего функционала. В данном случае параметры определяются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца.

В работе [11] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармоники Фурье вводятся три дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в работе [12] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по четырем параметрам.

В работах [13, 14] была рассмотрена оптимальная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла, основанная на разложении Лагерра по временной переменной. В работе [15] это было выполнено для решения волнового уравнения. Здесь оптимизация проводилась по четырем параметрам.

В работе [16] была рассмотрена оптимальная разностная схема 4-го порядка аппроксимации для решения волнового уравнения, основанная на разложении Лагерра.

В настоящей работе рассматриваются оптимальные разностные схемы 4-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла на основе преобразования Лагерра. Сравниваются два различных вида оптимальных разностных схем и для одномерных уравнений, и для двумерных уравнений.

В работе приводятся параметры оптимальных разностных схем и результаты тестовых расчетов с использованием этих схем.

Предлагаемые оптимальные схемы являются простой модернизацией обычных разностных схем, но они обладают более высокой точностью и более высокой эффективностью в сравнении с неоптимальными схемами.

## 2. Постановка задачи

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в двумерном случае имеют вид [5, 17]:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  — напряженность магнитного поля,  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  — ток внешнего источника,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — магнитная проницаемость.

Проведем преобразование Лагерра [18] по времени уравнений (1)–(3):

$$E_n = \int_0^\infty E(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (4)$$

$$E(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} E_n l_n^\alpha(ht), \quad (5)$$

где  $l_n^\alpha(ht)$  — ортогональная функция Лагерра [18] степени  $n$ ,  $\alpha$  — целая константа,  $h$  — параметр преобразования Лагерра. В результате получим уравнение для  $n$ -й гармоники Лагерра электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{nx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{nz}}{\partial x} &= \varepsilon \left( \frac{h}{2} E_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{ky} \right) + \sigma E_{ny} + J_{ny}, \\ \frac{\partial E_{ny}}{\partial z} &= \mu \left( \frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right), \\ -\frac{\partial E_{ny}}{\partial x} &= \mu \left( \frac{h}{2} H_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kz} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим разностную аппроксимацию этих уравнений.

### 3. Аппроксимация уравнений

Определим электрическое поле  $E_{ny}$  и параметры  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $J_{ny}$  в целых  $i, j$  узлах разностной сетки. Магнитное поле  $H_{nx}$ ,  $H_{nz}$  определим в промежуточных узлах  $i + 1/2$ ,  $j + 1/2$  разностной сетки. Первые производные заменим конечными разностями четвертого порядка аппроксимации.

Запишем уравнения (6) в разностном виде:

$$\begin{aligned} & \left( g_1 \frac{H_{x,i+1/2,j} - H_{x,i-1/2,j}}{\Delta z} - g_2 \frac{H_{x,i+3/2,j} - H_{x,i-3/2,j}}{\Delta z} \right) - \\ & \left( g_1 \frac{H_{z,i,j+1/2} - H_{z,i,j-1/2}}{\Delta x} - g_2 \frac{H_{z,i,j+3/2} - H_{z,i,j-3/2}}{\Delta x} \right) \\ &= \left( \varepsilon \left( \frac{h}{2} \langle E_n \rangle + h \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle \right) + \sigma \langle E_n \rangle + J_{ny} \right)_{i,j} \frac{E_{ni+1,j} - E_{ni,j}}{\Delta z} - g_2 \frac{E_{ni+2,j} - E_{ni-1,j}}{\Delta z} \\ &= \mu \left( \frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right)_{i+1/2,j} - \left( g_1 \frac{E_{ni,j+1} - E_{ni,j}}{\Delta x} - g_2 \frac{E_{ni,j+2} - E_{ni,j-1}}{\Delta x} \right) \\ &= \mu \left( \frac{h}{2} H_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kz} \right)_{i,j+1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta x, \Delta z$  — шаги разностной сетки по координатам  $x, z$  соответственно,  $g_1 = 27/24$ ,  $g_2 = 1/24$  — коэффициенты разностной аппроксимации первой производной. Здесь у электрического поля  $E_k$  опущен индекс  $y$ .

В первом уравнении у компонент магнитного поля опущен номер гармоники  $n$ . В правой части этого уравнения гармоники электрического поля  $E_{k,i,j}$  заменена средними  $\langle E_k \rangle$  по значениям поля  $E_k$  в нескольких пространственных точках.

Возможны несколько вариантов представления  $\langle E_k \rangle$ . Здесь рассмотрим только два из них. Конкретный вид приведем в следующем пункте.

#### 4. Выбор оптимальных параметров

Систему уравнений (7) для нулевой гармоники  $n = 0$  можно свести к одному уравнению для электрического поля, подставив в первое уравнение выражения для компонент магнитного поля из второго и третьего уравнений.

Без учета источников уравнение для нулевой гармоники имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( g_1^2 (E_{i+1,j} - 2E_{i,j} + E_{i-1,j}) - 2g_1g_2 (E_{i+2,j} + E_{i+1,j} + E_{i-1,j} + E_{i-2,j}) + \right. \\ & \quad \left. g_2^2 (E_{i+3,j} - 2E_{i,j} + E_{i-3,j}) \right) / \Delta z^2 + \left( g_1^2 (E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}) - \right. \\ & \quad \left. 2g_1g_2 (E_{i,j+2} + E_{i,j+1} + E_{i,j-1} + E_{i,j-2}) + g_2^2 (E_{i,j+3} - 2E_{i,j} + E_{i,j-3}) \right) / \Delta x^2 \\ & = k_0^2 \langle E_n \rangle_{i,j}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $k_0$  — волновой вектор:

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left( \varepsilon \frac{h}{2} + \sigma \right).$$

Рассмотрим вариант, когда величина  $\langle E_n \rangle_{i,j}$  заменяется суммой по 9-и пространственным точкам:

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= cE_{k,i,j} + d(4(E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) - (E_{k,i+2,j} + E_{k,i-2,j}))/6 + \\ & \quad g(4(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}) - (E_{k,i,j+2} + E_{k,i,j-2}))/6, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c, d, g$  — весовые множители, удовлетворяющие уравнению

$$c + d + g = 1, \quad g = (1 - c - d).$$

Здесь выражения при множителях  $d, g$  представляют аппроксимацию 4-го порядка поля  $E_{k,i,j}$  по шагу разностной сетки. Точки разностной сетки при коэффициентах  $d, g$  по направлениям  $x, z$  расположены в форме креста.

Система дифференциальных уравнений (6) для нулевой гармоники в однородной среде имеет точное решение

$$E = E_0 \operatorname{ch}(k_x x) \operatorname{ch}(k_z z), \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta,$$

$$E_{i,j} = E_0 \operatorname{ch}(k_x x_j) \operatorname{ch}(k_z z_i), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2.$$

Подставим это решение в разностное уравнение (8). После простых преобразований получим уравнение  $V^2(\theta, k) = 1$ :

$$V^2(\theta, k) = \left\{ r^2 \left( 2g_1^2 \left( \operatorname{ch} \left( \frac{k \cos \theta}{r} \right) - 1 \right) - 4g_1g_2 \left( \operatorname{ch} \left( \frac{2k \cos \theta}{r} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{k \cos \theta}{r} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. 2g_2^2 \left( \operatorname{ch} \left( \frac{3k \cos \theta}{r} \right) - 1 \right) \right) + 2g_1^2 (\operatorname{ch}(k \sin \theta) - 1) - 4g_1g_2 (\operatorname{ch}(2k \sin \theta) - \operatorname{ch}(k \sin \theta)) + \\ \left. 2g_2^2 (\operatorname{ch}(3k \sin \theta) - 1) \right\} / \left( k^2 \left( c + d \left( 4 \operatorname{ch} \left( \frac{k \cos \theta}{r} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{2k \cos \theta}{r} \right) \right) \right) / 3 + \right. \\ \left. g(4 \operatorname{ch}(k \sin \theta) - \operatorname{ch}(2k \sin \theta)) / 3 \right), \quad (10)$$

где  $r = \Delta x / \Delta z$ ,  $k = k_0 \Delta x$ .

Будем искать параметры  $c, d, g$ , требуя максимального точного выполнения равенства  $V^2(\theta, k) = 1$  в пределах допустимых значений  $\theta, k$ . Для этого определим функционал

$$F(u) = F(c, d, g) = \int \int (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk, \quad (11)$$

где  $u = (c, d, g)$  — вещественный вектор искомых параметров.

Пределы интегрирования по углу  $\theta = [0, \pi/2]$ . Пределы интегрирования по второй переменной — от  $k = 0$  до  $k = K$ . Величина  $k$  определяет отношение шага разностной сетки  $\Delta x$  к характерному размеру  $1/k_0$  изменения решения. Поэтому брать величину верхнего предела интегрирования  $K$  значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Будем искать точку минимума функционала (11) при заданных значениях  $r, K$  по параметрам  $c, d, g$ .

Для минимизации функционала будем использовать итерационный метод Ньютона [19]. Этот метод требует вычисления первой и второй производных функционала  $F(u)$ . Производные  $F(u)$  по параметрам  $c, d, g$  легко вычисляются, т. к. выражение под интегралом и функция  $V(\theta, k)$  имеют явный вид.

Минимальное значение функционала  $F(u)$  при заданных значениях  $r, K$  обозначим  $I(r, K) = \min F(u)$ . Значения параметров  $c, d, g$  в точке минимума функционала  $F(u)$  будем называть оптимальными параметрами.

В таблице 1 приведены оптимальные значения параметров  $c, d, g$  и интеграла  $I(r, K)$ , полученные при  $c = 1 - d - g$ , т. е. при минимизации по трем параметрам.

При заданном  $r = \Delta x / \Delta z$  при значениях верхнего предела интегрирования  $K$  в промежутке от  $K = 0$  до  $K \simeq 0.5$  минимизация функционала не дает ожидаемого результата. Оптимальные параметры здесь очень мало отличаются от неоптимальных значений. Значение интеграла  $I(r, K)$  здесь близко к единице, а значения  $d, g$  близки к нулю. То есть при малых значениях  $K$  использование схемы (9) неэффективно. Малые  $K$  соответствуют слабо меняющимся решениям уравнения (6). Но уже при  $K = 0.6$  значение интеграла  $I(r, K)$  падает примерно на два порядка. Далее, в промежутке от  $K = 0.6$  до  $K = 2$  происходит падение минимального значения  $I(r, K)$  примерно в 1.5 раза. При  $K > 2$  начинается рост минимального значения интеграла  $I(r, K)$ . В промежутке от  $K = 2.4$  до  $K = 2.5$  происходит быстрый рост минимального значения интеграла  $I(r, K)$  примерно на два порядка, до величины близкой к единице. Здесь, как и при малых  $K$ ,

использование схемы (9) неэффективно. Таким образом, область применения оптимальных схем лежит в промежутке  $0.5 < K < 2.5$ . В этом промежутке, при заданном верхнем пределе  $K$ , с ростом  $r = \Delta x / \Delta z$  от  $r = 1$  до  $r = 2$  минимальное значение  $I(r, K)$  падает примерно на 30 процентов. То есть использование оптимальных разностных схем при больших значениях  $r$  более эффективно, чем при малых  $r$ .

Таблица 1.

| $c$    | $d$         | $g$         | $I(r, K)$ | $r$ | $K$ |
|--------|-------------|-------------|-----------|-----|-----|
| 0.9997 | 1.549 e-04  | 1.549 e-04  | 0.9937    | 1   | 0.5 |
| 0.9048 | 0.04761     | 0.04761     | 2.68 e-02 | 1   | 0.6 |
| 0.9091 | 0.04543     | 0.04543     | 2.40 e-02 | 1   | 1   |
| 0.9174 | 0.04129     | 0.04129     | 1.98 e-02 | 1   | 1.5 |
| 0.9287 | 0.03564     | 0.03564     | 1.65 e-02 | 1   | 2   |
| 0.9401 | 0.02994     | 0.02994     | 1.74 e-02 | 1   | 2.4 |
| 0.9998 | 0.9312 e-04 | 0.9312 e-04 | 0.9949    | 1   | 2.5 |
| 0.9998 | 6.963 e-06  | 1.487 e-04  | 0.9943    | 1.5 | 0.5 |
| 0.9196 | 0.03140     | 0.04899     | 2.13 e-02 | 1.5 | 0.6 |
| 0.9129 | 0.04042     | 0.04668     | 1.81 e-02 | 1.5 | 1   |
| 0.9181 | 0.03966     | 0.04221     | 1.53 e-02 | 1.5 | 1.5 |
| 0.9253 | 0.03852     | 0.03620     | 1.35 e-02 | 1.5 | 2   |
| 0.9324 | 0.03741     | 0.03021     | 1.56 e-02 | 1.5 | 2.4 |
| 0.9999 | 9.824 e-07  | 1.478 e-04  | 0.9942    | 2   | 0.5 |
| 0.9503 | 0.0003240   | 0.04939     | 1.77 e-02 | 2   | 0.6 |
| 0.9315 | 0.02158     | 0.04690     | 1.54 e-02 | 2   | 1   |
| 0.9339 | 0.02374     | 0.04238     | 1.30 e-02 | 2   | 1.5 |
| 0.9370 | 0.02673     | 0.03631     | 1.19 e-02 | 2   | 2   |
| 0.9395 | 0.03027     | 0.03028     | 1.48 e-02 | 2   | 2.4 |

Кроме рассмотренного выше выражения (9) для среднего значения поля возможны другие представления  $\langle E_n \rangle_{i,j}$  в формуле (8). Одним из таких является

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle = & cE_{k,i,j} + d(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1} + E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + \\ & g(E_{k,i,j+2} + E_{k,i,j-2} + E_{k,i+2,j} + E_{k,i-2,j}), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c, d, g$  — весовые множители, удовлетворяющие уравнению

$$c + 4d + 4g = 1, \quad g = (1 - c - 4d)/4. \quad (13)$$

Здесь точки разностной сетки в выражениях при каждом множителе  $d, g$  расположены в форме ромба. Эти выражения представляют аппроксимацию 2-го порядка поля  $E_{k,i,j}$  по шагу разностной сетки.

В табл. 2 приведены оптимальные значения параметров  $c, d, g$  для разных значений величины  $r = \Delta x / \Delta z$  и при разных верхних пределах интегрирования по  $k$  в формуле (11). Указаны также значения интеграла  $I(r, K)$ , полученные при этих значениях параметров. Эти значения интеграла, как и ранее, нормированы на величину интеграла для неоптимальной схемы, т. е. при  $c = 1, d = 0, g = 0$ .

Зависимость интеграла  $I(r, K)$  от  $r, K$  подобна случаю, приведенному в табл. 1. Но есть два отличия. Здесь более широкая область значений  $K$ , при которых использование разностных схем с оптимальными параметрами эффективно. Область применения оптимальных схем лежит в промежутке  $0.4 < K < 2.7$ . Это шире на 5–10% в сравнении со случаем из табл. 1.

Таблица 2.

| $c$    | $d$     | $g$      | $I(r, K)$ | $r$ | $K$ |
|--------|---------|----------|-----------|-----|-----|
| 0.8781 | 0.04054 | -0.01006 | 1.75 e-02 | 1   | 0.5 |
| 0.8794 | 0.04006 | -0.00990 | 1.74 e-02 | 1   | 0.6 |
| 0.8848 | 0.03803 | -0.00923 | 1.66 e-02 | 1   | 1   |
| 0.8970 | 0.03373 | -0.00797 | 1.55 e-02 | 1   | 1.5 |
| 0.9171 | 0.02710 | -0.00638 | 1.54 e-02 | 1   | 2   |
| 0.9430 | 0.01915 | -0.00491 | 1.73 e-02 | 1   | 2.4 |
| 0.9518 | 0.01915 | -0.00451 | 1.85 e-02 | 1   | 2.5 |
| 1.0001 | 0.00028 | -0.00306 | 2.60 e-01 | 1.5 | 0.5 |
| 0.8913 | 0.03599 | -0.00882 | 1.38 e-02 | 1.5 | 1   |
| 0.9039 | 0.03168 | -0.00766 | 1.32 e-02 | 1.5 | 1.5 |
| 0.9241 | 0.02516 | -0.00617 | 1.34 e-02 | 1.5 | 2   |
| 0.9491 | 0.01656 | -0.00478 | 1.57 e-02 | 1.5 | 2.4 |
| 0.9671 | 0.01222 | -0.00400 | 1.89 e-02 | 1.5 | 2.6 |
| 1.0001 | 0.00031 | -0.00332 | 2.43 e-01 | 2   | 0.5 |
| 0.8901 | 0.03614 | -0.00885 | 1.20 e-02 | 2   | 1   |
| 0.9031 | 0.03191 | -0.00770 | 1.15 e-02 | 2   | 1.5 |
| 0.9231 | 0.02543 | -0.00629 | 1.18 e-02 | 2   | 2   |
| 0.9488 | 0.01759 | -0.00479 | 1.42 e-02 | 2   | 2.4 |
| 0.9679 | 0.01202 | -0.00398 | 1.74 e-02 | 2   | 2.6 |

Другое отличие состоит в величине  $I(r, K)$  при конкретных  $r, K$ . Во всей области эффективности значения  $I(r, K)$  здесь меньше, чем в случае усреднения по формуле (9). Наибольшая разница, примерно в 50%, при  $r = 1$  и  $K \simeq 0.6$ , она уменьшается с ростом  $r$  и  $K$  практически до нуля.

Эти два отличия делают метод усреднения по формуле (12) более предпочтительным в сравнении с методом усреднения по формуле (9).

Формулы (8)–(12), используемые для определения оптимальных параметров разностных схем двумерных уравнений Максвелла, легко преобразуются в аналогичные формулы для одномерных уравнений Максвелла.

В одномерном случае формула (9) перейдет в

$$\langle E_k \rangle = cE_{k,i} + d(4(E_{k,i+1} + E_{k,i-1}) - (E_{k,i+2} + E_{k,i-2}))/6, \quad (14)$$

где остается только два параметра  $c, d$ , формула (12) перейдет в

$$\langle E_k \rangle = cE_{k,i} + d(E_{k,i+1} + E_{k,i-1}) + g(E_{k,i+2} + E_{k,i-2}), \quad (15)$$

где остается три параметра. В формулах (10), (11) достаточно положить  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $\sin \theta = 0$ ,  $r = 1$ .

В табл. 3 приведены оптимальные значения параметров  $c, d, g$  и интеграла  $I(K)$  для одномерного случая при разных значениях верхнего предела интегрирования  $K$  в формуле (11). Там, где опущены значения параметра  $g$ , данные соответствуют формуле (14), там, где указаны значения  $g$ , данные соответствуют формуле (15).

В одномерном случае эффективность применения оптимальных параметров существенно выше, чем в двумерном случае. Разница в значениях интеграла  $I(K)$  достигает двух порядков. Область эффективности применения оптимальных схем, т. е. область, где  $I(r, K)$  существенно меньше единицы, лежит в промежутке  $0.4 \leq K \leq 2.4$ . Минимальное значение  $I(K)$  находятся вблизи точки  $K \approx 0.5$ , где оно порядка  $10^{-5} - 10^{-6}$ . С ростом  $K$  значение интеграла  $I(K)$  растет на два, три порядка.

Таблица 3.

| $c$    | $d$         | $g$          | $I(K)$    | $K$ |
|--------|-------------|--------------|-----------|-----|
| 0.9999 | 8.8444 e-05 |              | 0.9968    | 0.4 |
| 0.9449 | 5.5026 e-02 |              | 1.64 e-05 | 0.5 |
| 0.9485 | 5.1455 e-02 |              | 2.62 e-04 | 1   |
| 0.9542 | 4.5793 e-02 |              | 1.37 e-03 | 1.5 |
| 0.9617 | 3.8308 e-02 |              | 4.97 e-03 | 2   |
| 0.9670 | 3.3966 e-02 |              | 1.05 e-02 | 2.3 |
|        |             |              |           |     |
| 1.0002 | 2.3989 e-03 | -3.1904 e-04 | 7.53 e-02 | 0.4 |
| 0.9458 | 3.6123 e-02 | -9.0373 e-03 | 3.67 e-06 | 0.5 |
| 0.9517 | 3.2297 e-02 | -8.1614 e-03 | 4.83 e-05 | 1   |
| 0.9626 | 2.5495 e-02 | -6.8068 e-03 | 2.32 e-04 | 1.5 |
| 0.9802 | 1.5019 e-02 | -5.1240 e-03 | 7.48 e-04 | 2   |
| 1.0016 | 2.8299 e-02 | -3.6101 e-03 | 1.83 e-03 | 2.4 |

Как и в двумерном случае, усреднение по формуле (15) более эффективно в сравнении с усреднением по формуле (14). Разница в значениях  $I(K)$  составляет 3–6 раз.

## 5. Результаты численных расчетов

Будем сравнивать три метода решения системы уравнений (1)–(3): решение уравнений спектральным методом Лагерра без оптимальных параметров (МЛ), решение уравнений спектральным методом Лагерра, полученное с использованием оптимальных параметров (МЛО) и решение уравнений высокоточным [20] конечно-разностным методом (ВКР). Метод ВКР имеет 7-й порядок аппроксимации по времени и 6-й порядок аппроксимации по пространству. Подробности метода ВКР изложены в [20].

Расчеты выполнены для двумерных и одномерных уравнений Максвелла.

В численных расчетах источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s)\delta(x - x_s), \quad (16)$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)),$$

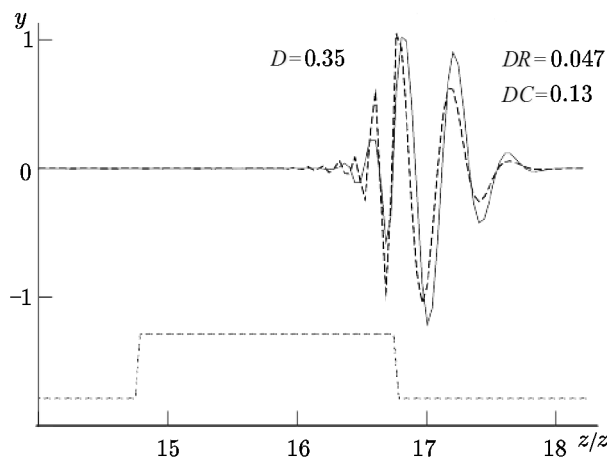
где  $f_0$  — несущая частота источника,  $t_0$  — момент центра импульса источника,  $x_s, z_s$  — координаты точки расположения источника.

В преобразовании Лагерра использовались 310 гармоник Лагерра, параметры  $\alpha = 1$ ,  $h = 100$ .

Точность решения оценивалось по величине относительной погрешности решения  $D$ , которая определялась выражением

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |E_y(x, z, t) - E_{0y}(x, z, t)| dx dz}{\int_0^\infty |E_{0y}(x, z, t)| dx dz}, \quad (17)$$

здесь  $E_y = E$  — решение уравнений (1)–(3), полученное с использованием разложения Лагерра,  $E_{0y}$  — решение уравнений (1)–(3), полученное с использованием конечно-разностной схемы метода ВКР. На графиках, приведенных на рисунках 1 и 2, решение этой конечно-разностной схемой метода ВКР показано сплошной линией.



**Рис. 1.** Решение двумерных уравнений (1)–(3) неоптимальной схемой (штриховая линия) и оптимальной схемой (сплошная линия)

На рис. 1 приведено решение двумерных уравнений Максвелла. Показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника ( $E_y$  — компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Внизу показано расположение слоя в среде. Параметры среды терпят разрыв на границах слоя. Соотношение значений параметров слоя и однородной среды составляет 4.0 для диэлектрической проницаемости и 1.5 для проводимости. Сплошная линия соответствует решению уравнений (1)–(3) конечно-разностной схемой. Штрихованная линия соответствует решению обычной неоптимальной разностной схемой 4-го порядка метода МЛ. Указана величина погрешности  $D$  для этого решения. Шаг разностной схемы  $\Delta x = 0.06$ , соотношение шагов разностной схемы  $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$ .

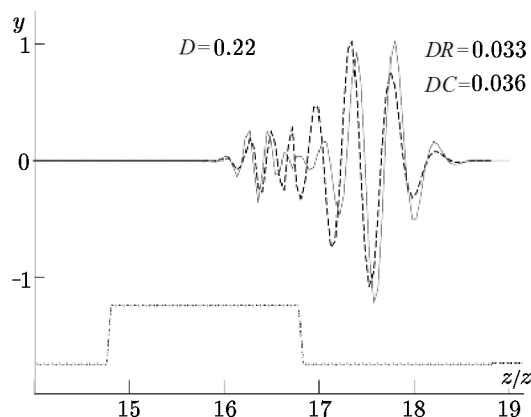
На рис. 1 также приведено решение, полученное оптимальной разностной схемой 4-го порядка метода МЛЮ. Графически оно совпадает с решением конечно-разностной схемой метода ВКР. Показано решение после пробега импульсом расстояния примерно 15–20 длин волн. Поле и длина по координатам приводятся в безразмерных единицах.

Проведенные расчеты оптимальной разностной схемой подтверждают данные, приведенные в табл. 1 и 2. Оптимальные разностные схемы дают более точное решение, чем неоптимальные разностные схемы. Усреднение в форме ромба, формула (12), дает более точное решение, чем усреднение (9) в форме креста.

На рис. 1  $DC$  — это погрешность решения при усреднении по формуле (9), полученная при параметрах, приведенных в табл. 1 при  $r = 1.5$ ,  $K = 2$ , и  $DR$  — это погрешность решения при усреднении по формуле (12), полученная при параметрах, приведенных в табл. 2 при  $r = 1.5$ ,  $K = 1.5$ . Эти параметры соответствуют минимальным значениям интеграла  $I(r, K)$  в табл. 1 и 2 при  $r = 1.5$ .

Величина погрешности решения неоптимальной разностной схемой в 4–6 раз больше, чем оптимальной схемой. Время счета оптимальной схемой на 3–5 процентов меньше, чем неоптимальной схемой.

На рис. 2 приведено решение одномерных уравнений Максвелла. Здесь в уравнениях (1)–(3) опущены производные по  $x$ , остаются только уравнения для  $E_y$  и  $H_x$ . Показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника ( $E_y$  — компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Шаг разностной схемы  $\Delta z = 0.045$ .



**Рис. 2.** Решение одномерных уравнений (1)–(3) неоптимальной схемой (штриховая линия) и оптимальной схемой (сплошная линия)

Внизу рис. 2 показано расположение слоя в среде. Параметры среды терпят разрыв на границах слоя. Соотношение значений параметров слоя и однородной среды составляет 3.5 для диэлектрической проницаемости и 1.5 для проводимости. Сплошная линия соответствует решению уравнений конечно-разностной схемой метода ВКР, штрихованная линия соответствует решению разностной схемой 4-го порядка без оптимальных параметров метода МЛ. Указана величина погрешности  $D$  для этого решения. Показано решение после пробега импульсом расстояния примерно 15–20 длин волн.

Проведенные расчеты одномерных уравнений Максвелла подтверждают данные, приведенные в табл. 3. Оптимальные схемы дают более точное решение, чем неоптимальные схемы. Усреднение по формуле (15) дает более точное решение, чем усреднение по формуле (14).

На рис. 2  $DC$  — это погрешность решения при усреднении по формуле (14),  $DR$  — это погрешность решения при усреднении по формуле (15). Оба значения погрешности получены при оптимальных параметрах, приведенных в табл. 3 при  $K = 0.5$ . Эти оптимальные параметры соответствуют минимальным значениям интеграла  $I(r, K)$  из табл. 3. При других значениях параметра  $K$  погрешность решения больше.

Величина погрешности решения неоптимальной разностной схемой метода МЛ в 5–7 раз больше, чем величина погрешности решения оптимальной схемой метода МЛЮ.

Отметим особенность, важную как для двумерного случая, так и для одномерного случая. Хотя усреднение по формулам (12), (15) является аппроксимацией 2-го порядка, точность аппроксимации и точность решения уравнений, при использовании оптимальных параметров, оказывается выше, чем точность аппроксимации и точность решения при усреднении 4-го порядка аппроксимации по формулам (9), (14).

Отметим также, что размер области значений параметра  $K$ , где эффективность применения оптимальных разностных схем зависит от порядка аппроксимации уравнений. У схем 4-го порядка она существенно меньше, чем у схем 2-го порядка [13, 14]. Разница составляет 20–30 процентов.

## 6. Заключение

Использование оптимальных разностных схем позволяет повысить точность решения уравнения в сравнении с обычными схемами 4-го порядка аппроксимации. Оптимальные схемы с оптимальными параметрами требуют простой модернизации обычных неопти-

мальных разностных схем. Оптимальные схемы повышают точность решения задачи и сокращают время счета задачи. Точность решения с использованием оптимальных разностных схем существенно зависит от метода усреднения. Это верно и в одномерном, и двумерном случаях уравнений Максвелла.

## Литература

1. **Bergmann T., Robertsson J.O.A., Hollige K.** Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // *Geophysics*. — 1998. — Vol. 63. — P. 856–867.
2. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // *Geophysics*. — 1999. — Vol. 64. — P. 1369–1377.
3. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Trans. Ant Propag.* — 1992. — Vol. 40. — P. 1297–1301.
4. **Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics*. — 1994. — Vol. 59. — P. 1192–1200.
5. Электроразведка. Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова — М.: Недра, 1980.
6. **Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.** Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмоки // *Тр. ИВМиМГ СО РАН. Мат. моделирование в геофизике*. — Новосибирск. — 1998. — № 5. — С. 107–112.
7. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофизика*. — 2003. — Т. 44, № 10. — С. 1060–1069.
8. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофизика*. — 2006. — Т. 47, № 3. — С. 397–407.
9. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
10. **Tam C.K. and Webb J.C.** Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. Computational Physics*. — 1993. — Vol. 107, № 2. — P. 262–281.
11. **Jo C.H., Shin C., Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // *Geophysics*. — 1996. — Vol. 61. — P. 529–537.
12. **Chen J.B.** An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophysics*. — 2012. — Vol. 77. — P. 201–210.
13. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // *Геология и геофизика*. — 2015. — Т. 56, № 9. — С. 1713–1722.
14. **Мастрюков А.Ф.** Разностная схема для одномерных уравнений Максвелла // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние*. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 1. — С. 69–82.
15. **Мастрюков А.Ф.** Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние*. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 5. — С. 107–112.
16. **Мастрюков А.Ф.** Разностные схемы на основе преобразования Лагерра // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*. — 2021. — Т. 61, № 3. — С. 373–381.
17. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
18. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган — М.: Наука, 1979.

19. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
20. **Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38. — P. 718–741.

*Поступила в редакцию 29 сентября 2021 г.*

*После исправления 09 декабря 2021 г.*

*Принята к печати 24 апреля 2022 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Bergmann T., Robertsson J.O.A., Hollige K.** Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics. — 1998. — Vol. 63. — P. 856–867.
2. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics. — 1999. — Vol. 64. — P. 1369–1377.
3. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Ant Propog. — 1992. — Vol. 40. — P. 1297–1301.
4. **Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics. — 1994. — Vol. 59. — P. 1192–1200.
5. **Elektrorazvedka. Spravochnik geofizika /** Pod red. A.G. Tarhova — М.: Nedra, 1980.
6. **Konyuh G.V., Mikhailenko B.G.** Primenenie integral'nogo preobrazovaniya Lagerra pri reshenii dinamicheskikh zadach seismiki // Tr. IVMiMG SO RAN. Mat. modelirovanie v geofizike. — Novosibirsk. — 1998. — № 5. — S. 107–112.
7. **Mastryukov A.F., Mikhailenko B.G.** Chislennoe modelirovanie rasprostraneniya elektromagnitnykh voln v neodnorodnykh sredakh s zatuhaniem na osnove spektral'nogo preobrazovaniya Lagerra // Geologiya i geofizika. — 2003. — Т. 44, № 10. — S. 1060–1069.
8. **Mastryukov A.F., Mikhailenko B.G.** Modelirovanie rasprostraneniya elektromagnitnykh voln v relaksatsionnykh sredakh na osnove spektral'nogo preobrazovaniya Lagerra // Geologiya i geofizika. — 2006. — Т. 47, № 3. — S. 397–407.
9. **Golub Dzh., Van Loun Ch.** Matrichnye vychisleniya. — М.: Mir, 1999.
10. **Tam C.K. and Webb J.C.** Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Computational Physics. — 1993. — Vol. 107, № 2. — P. 262–281.
11. **Jo C.H., Shin C., Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics. — 1996. — Vol. 61. — P. 529–537.
12. **Chen J.B.** An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics. — 2012. — Vol. 77. — P. 201–210.
13. **Mastryukov A.F., Mikhailenko B.G.** Optimal'nye raznostnye skhemy dlya uravnenii Maksvella pri reshenii pryamykh zadach elektromagnitnykh zondirovaniy // Geologiya i geofizika. — 2015. — Т. 56, № 9. — S. 1713–1722.
14. **Mastryukov A.F.** Raznostnaya skhema dlya odnomernykh uravnenii Maksvella // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2020. — Т. 23, № 1. — S. 69–82.
15. **Mastryukov A.F.** Optimal'nye raznostnye skhemy dlya volnovogo uravneniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — Т. 19, № 5. — S. 107–112.
16. **Mastryukov A.F.** Raznostnye skhemy na osnove preobrazovaniya Lagerra // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — Т. 61, № 3. — S. 373–381.
17. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Elektrodinamika sploshnykh sred. — М.: Nauka, 1982.

18. Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam / Pod red. M. Abramovitsa, I. Stigan — M.: Nauka, 1979.
19. **Vasil'ev F.P.** Chislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach. — M.: Nauka, 1980.
20. **Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38. — P. 718–741.

