

УДК 537.84

ВЛИЯНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ НА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАССООБМЕНА

С. Иджаз*, Н. Салим**, С. Манавар*,***

* Школа науки и технологий Университета менеджмента и технологий,
54000 Лахор, Пакистан

** Университет принца Мухаммада бин Фахда, 31952 Эль-Хубар,
Саудовская Аравия

*** Колледж делового администрирования Университета г. Дамман,
Дамман, Саудовская Аравия

E-mails: saima_ijaz@hotmail.com, nsaleem@pmu.edu.sa, sufian.munawar@hotmail.com

Исследовано влияние скольжения на поперечный массообмен в трехмерном потоке вязкой жидкости в канале с растягивающейся стенкой в предположении, что стенки канала являются пористыми, вследствие чего возможен поперечный массообмен. Определяющие уравнения решаются аналитически. Проверена точность решения, полученного в виде рядов, путем его сравнения с численным решением. Показано, что с использованием условий скольжения можно управлять величиной сопротивления на обтекаемой поверхности.

Ключевые слова: поперечный массообмен, аналитическое решение, течение в канале, магнитогидродинамика, условия скольжения.

DOI: 10.15372/PMTF20170106

Введение. В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию течения вязкой жидкости вблизи растягивающейся поверхности. При этом основное внимание уделялось вычислению вязкого сопротивления на растягивающейся поверхности. Развиваются методы уменьшения вязкого сопротивления на твердой поверхности и управления им. В работе [1] впервые вычислен коэффициент поверхностного трения для течения вблизи нагретой растягивающейся поверхности. Влияние однородного поперечного магнитного поля на электропроводящую жидкость в окрестности растягивающейся поверхности изучено в [2]. В работах [3, 4] исследовалось влияние магнитогидродинамического поля на течение неньютоновских жидкостей вблизи растягивающейся поверхности. В [5] получено решение подобия для пограничного слоя жидкости вблизи растягивающейся поверхности. В [6] исследовано трехмерное течение жидкости, при этом рассматривалось растяжение в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В [7] изучено нестационарное трехмерное течение вблизи растягивающейся поверхности с использованием метода прогонки. Исследование течений вблизи растягивающейся поверхности проведено также в работах [8–14].

Наибольший интерес представляет изучение течения вязкой жидкости в окрестности растягивающейся поверхности. В работе [15] исследовалось магнитогидродинамическое течение в канале, ограниченном двумя пластинами, в случае однородного вдува через верхнюю пластину, при этом нижняя пластина являлась растягивающейся поверхностью. В [16] продолжено исследование влияния гидромагнитных и кориолисовых сил в потоке, начатое в работе [15]. В [17] получено численное решение этой задачи для вязкоупругой жидкости. В [18] исследован процесс сжатия потока в канале. В работе [19] получено аналитическое обобщенное решение задачи о трехмерном потоке в канале, ограниченном двумя пластинами, в случае когда через верхнюю пластину осуществляется однородный вдув, а нижняя пластина растягивается. Установлено, что при увеличении скорости вдува на верхней пластине вязкое сопротивление на нижней пластине увеличивается. В [20] обнаружено уменьшение вязкого сопротивления на растягивающейся поверхности в случае наличия поперечного массообмена при различных комбинациях вдува (отсоса) на верхней (нижней) поверхности пластины. В [20] также показано, что вязким сопротивлением на растягивающейся поверхности можно управлять с помощью отсоса и вдува на верхней и нижней пластинах.

В настоящей работе изучается влияние скольжения на трехмерное течение в канале с нижней растягивающейся стенкой при наличии поперечного массообмена. Для решения нелинейных уравнений используется метод гомотопического анализа [21–32].

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерное несжимаемое вязкое течение внутри канала, нижняя стенка которого растягивается в плоскости $z = 0$, а верхняя фиксирована в плоскости $z = h$. Обе пластины однородно-пористые, возможны вдув и отсос. В направлении, перпендикулярном электрически изолированным пластинам, приложено однородное магнитное поле интенсивностью β_0 (рис. 1). При малых магнитных числах Рейнольдса индуцированным магнитным полем можно пренебречь. В данном случае определяющие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho} \beta_0^2 u,$$

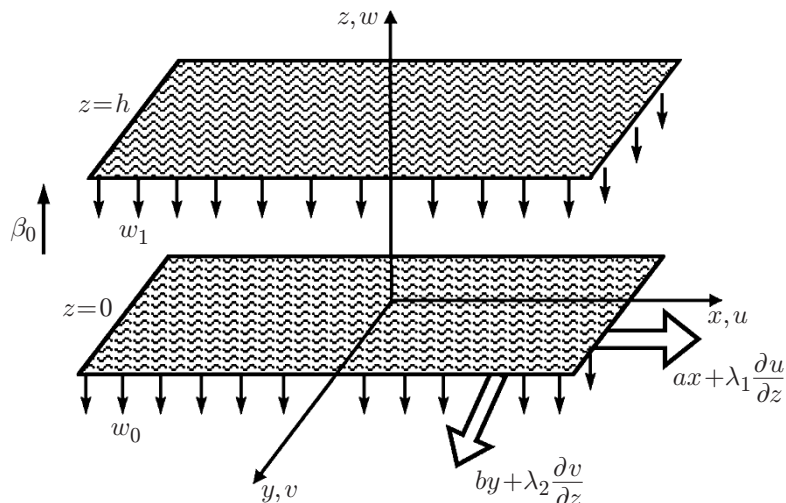


Рис. 1. Схема течения

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho} \beta_0^2 v,$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

граничные условия записываются следующим образом:

$$z = 0: \quad u = ax + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad v = by + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad w = -w_0^*,$$

$$z = h: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = -w_1^*.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; u, v, w — компоненты вектора скорости в направлениях x, y, z соответственно; p — давление; ρ — плотность; σ — электропроводность; λ_1 — параметр скольжения вдоль оси x ; λ_2 — параметр скольжения вдоль оси y ; β_0 — интенсивность магнитного поля; a, b — скорости растяжения в направлениях x и y соответственно.

Для нормирования уравнения использованы следующие безразмерные величины:

$$\eta = z/h, \quad u = axf'(\eta), \quad v = ayg'(\eta), \quad w = -ah(f + g). \quad (1)$$

Используя (1), можно получить нелинейные дифференциальные уравнения

$$f^{iv} - \text{Re}(M^2 f'' + f' f'' - f f''' - f'' g' - f''' g) = 0, \quad (2)$$

$$g^{iv} - \text{Re}(M^2 g'' + g' g'' - f g''' - f' g'' - g''' g) = 0$$

с граничными условиями

$$f'(0) = 1 + \text{Kn}_1 f''(0), \quad g'(0) = \beta + \text{Kn}_2 g''(0), \quad f(0) + g(0) = w_0, \quad (3)$$

$$f'(1) = 0, \quad g'(1) = 0, \quad f(1) + g(1) = w_1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по η ; $\text{Re} = ah^2/\nu$ — число Рейнольдса; $\text{Kn}_1 = \lambda_1/h$, $\text{Kn}_2 = \lambda_2/h$ — числа Кнудсена; $\beta = b/a$ — отношение градиентов скоростей; $w_0 = w_0^*/(ah)$, $w_1 = w_1^*/(ah)$ — параметры отсоса (вдува) для нижней и верхней пластин соответственно; $M = \beta_0 \sqrt{\sigma/(a\rho)}$ — число Гартмана.

Коэффициенты сил поверхностного трения в направлениях x и y определяются по формулам

$$C_{fx} = \frac{\tau_{xz}}{\rho(ax)^2} = \frac{1}{\text{Re}_x} f''(0), \quad C_{fy} = \frac{\tau_{yz}}{\rho(ay)^2} = \frac{1}{\text{Re}_y} g''(0),$$

суммарное касательное напряжение на поверхности — по формуле

$$\tau = \sqrt{(\text{Re}_x C_{fx})^2 + (\text{Re}_y C_{fy})^2} = \sqrt{(f''(0))^2 + (g''(0))^2},$$

где $\text{Re}_x = axh/\nu$, $\text{Re}_y = ayh/\nu$ — локальные числа Рейнольдса.

2. Решение задачи. Система уравнений (2) с граничными условиями (3) решается с использованием метода гомотопического анализа.

2.1. *Решение методом гомотопического анализа.* Выражения для искомых функций в начальный момент времени запишем в виде

$$f_0(0) = \frac{1}{2} w_0 + \left(1 + \frac{2 \text{Kn}_1}{4 \text{Kn}_1 + 1} \left(\frac{3}{2} w_1 - \frac{3}{2} w_0 - 2 \right) \right) \eta + \left(\frac{1}{4 \text{Kn}_1 + 1} \left(\frac{3}{2} w_1 - \frac{3}{2} w_0 - 2 \right) \right) \eta^2 +$$

$$+ \left(-\frac{1}{3} - \frac{2(\text{Kn}_1 + 1)}{4 \text{Kn}_1 + 1} \left(\frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_0 - \frac{2}{3} \right) \right) \eta^3,$$

$$g_0(0) = \frac{1}{2} w_0 + \left(\beta + \frac{2 \text{Kn}_2}{4 \text{Kn}_2 + 1} \left(\frac{3}{2} w_1 - \frac{3}{2} w_0 - 2\beta \right) \right) \eta + \left(\frac{1}{4 \text{Kn}_2 + 1} \left(\frac{3}{2} w_1 - \frac{3}{2} w_0 - 2\beta \right) \right) \eta^2 + \\ + \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{2(\text{Kn}_2 + 1)}{4 \text{Kn}_2 + 1} \left(\frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_0 - \frac{2}{3} \beta \right) \right) \eta^3,$$

а выражение для линейного оператора — в виде

$$L \equiv \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}.$$

Представим уравнения деформации m -го порядка и граничные условия при $m \geq 1$:

$$L[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = \nabla_1 R_{1m}(\eta), \quad L[g_m(\eta) - \chi_m g_{m-1}(\eta)] = \nabla_2 R_{2m}(\eta); \quad (4)$$

$$f'_m(0) = \text{Kn}_1 f''_m(0), \quad g'_m(0) = \text{Kn}_2 g''_m(0), \quad f_m(0) + g_m(0) = 0, \quad (5) \\ f'_m(1) = g'_m(1) = f_m(1) + g_m(1) = 0.$$

Здесь

$$R_{1m}(\eta) = f_{m-1}^{iv}(\eta) - \text{Re} \left(M^2 f''_{m-1}(\eta) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} (f'_{m-1-k}(\eta) f''_k(\eta) - f_{m-1-k}(\eta) f'_k(\eta) - g_{m-1-k}(\eta) f'''_k(\eta) - g'_{m-1-k}(\eta) f''_k(\eta)) \right),$$

$$R_{2m}(\eta) = g_{m-1}^{iv}(\eta) - \text{Re} \left(M^2 g''_{m-1}(\eta) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} (g'_{m-1-k}(\eta) g''_k(\eta) - f_{m-1-k}(\eta) g'''_k(\eta) - g_{m-1-k}(\eta) g'_k(\eta) - f'_{m-1-k}(\eta) g''_k(\eta)) \right),$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & k \leq 1, \\ 1, & k > 1. \end{cases}$$

Решения этих уравнений запишем в виде бесконечных рядов

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad g(\eta) = g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta),$$

где $f_m(\eta)$, $g_m(\eta)$ — решения уравнений деформации m -го порядка (4) при $m \geq 1$.

2.2. Исследование сходимости решений. Сходимость рядов зависит от выбора параметров h_1 и h_2 [32]. Оптимальные значения h_1 и h_2 могут быть найдены на основе вычисления квадратичных погрешностей уравнений (2). Из рис. 2 следует, что оптимальные значения равны $h_1 = -0,70341$, $h_2 = -0,67489$, соответствующие им квадратичные погрешности уравнений (2) равны $\Delta_1 = 1,74878 \cdot 10^{-10}$, $\Delta_2 = 4,04897 \cdot 10^{-10}$. Сходимость и точность решений представлены в табл. 1. Из табл. 1 следует, что решения сходятся начиная с приближения пятого порядка. Более того, квадратичные погрешности уменьшаются, когда порядок приближения растет. Это свидетельствует о сходимости и точности полученного решения.

Оценка точности решения уравнений (2), полученного с использованием метода гомотопического анализа (МГА), выполняется путем сравнения его с численным решением, полученным методом прогонки (табл. 2).

3. Результаты исследования и их обсуждение. На рис. 3 показано влияние чисел Кнудсена Kn_1 и Kn_2 (предполагается, что $\text{Kn}_1 = \text{Kn}_2$) на скорость f' при наличии поперечного потока массы (вдува на верхней пластине и отсоса на нижней). Из рис. 3 следует,

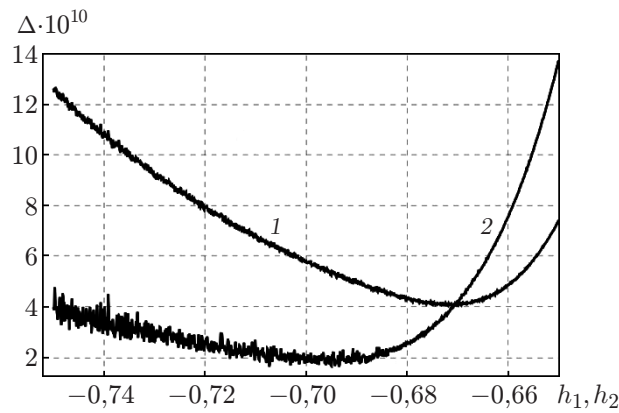


Рис. 2. Зависимости квадратичной погрешности первого (1) и второго (2) уравнений (2) от величин h_1, h_2

Таблица 1

Сходимость решения, полученного методом гомотопического анализа при $Re = 2, w_0 = w_1 = Kn_1 = Kn_2 = \beta = 0,5$

m	$f''(0)$	Δ_1	$g''(0)$	Δ_2
2	-1,401 672	$9,3099 \cdot 10^{-2}$	-0,700 117	$4,7804 \cdot 10^{-2}$
5	-1,401 140	$1,1829 \cdot 10^{-4}$	-0,699 835	$6,4019 \cdot 10^{-5}$
10	-1,401 140	$2,5757 \cdot 10^{-9}$	-0,699 835	$1,6559 \cdot 10^{-9}$
15	-1,401 140	$5,9756 \cdot 10^{-12}$	-0,696 835	$1,6151 \cdot 10^{-11}$
20	-1,401 140	$5,9743 \cdot 10^{-11}$	-0,696 835	$2,3129 \cdot 10^{-10}$

Таблица 2

Значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ при $Re = 2$ и различных значениях параметров задачи

M	w_0	w_1	f''					
			$Kn_1 = 0$		$Kn_1 = 1$		$Kn_1 = 2$	
			Результаты расчета с помощью МГА	Результаты численного расчета	Результаты расчета с помощью МГА	Результаты численного расчета	Результаты расчета с помощью МГА	Результаты численного расчета
0	0,5	0,5	-4,766 06	-4,766 06	-0,821 06	-0,821 06	-0,450 70	-0,450 70
1,0	0,5	0,5	-5,014 09	-5,014 09	-0,828 82	-0,828 82	-0,453 06	-0,453 06
3,0	0,5	0,5	-6,680 11	-6,680 11	-0,867 34	-0,867 34	-0,464 43	-0,464 43
5,0	0,5	0,5	-9,102 45	-9,102 45	-0,899 91	-0,899 91	-0,473 64	-0,473 64
0,5	0	0,5	-2,747 18	-2,747 18	-0,503 87	-0,503 87	-0,277 90	-0,277 90
0,5	0,5	0,5	-4,829 16	-4,829 16	-0,823 10	-0,823 10	-0,451 32	-0,451 32
0,5	1,0	0,5	-7,358 73	-7,358 73	-1,161 44	-1,161 44	-0,633 16	-0,633 16
0,5	2,0	0,5	-14,062 55	-14,062 55	-1,894 43	-1,894 43	-1,021 46	-1,021 46
0,5	0,5	0	-6,411 52	-6,411 52	-1,123 48	-1,123 48	-0,618 71	-0,618 71
0,5	0,5	0,5	-4,829 16	-4,829 16	-0,823 10	-0,823 10	-0,451 32	-0,451 32
0,5	0,5	1,0	-3,040 58	-3,040 58	-0,503 78	-0,503 78	-0,275 08	-0,275 08
0,5	0,5	2,0	1,168 71	1,168 71	0,183 74	0,183 74	0,099 60	0,099 60

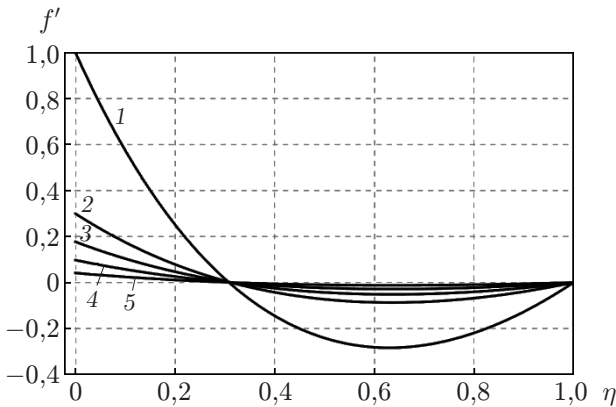


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость скорости от координаты η при $w_0 = w_1 = 0,5$, $Re = 2$, $\beta = M = 0,5$ и различных значениях чисел Кнудсена:

1 — $Kn_1 = Kn_2 = 0$, 2 — $Kn_1 = Kn_2 = 0,5$, 3 — $Kn_1 = Kn_2 = 1$, 4 — $Kn_1 = Kn_2 = 2$, 5 — $Kn_1 = Kn_2 = 5$

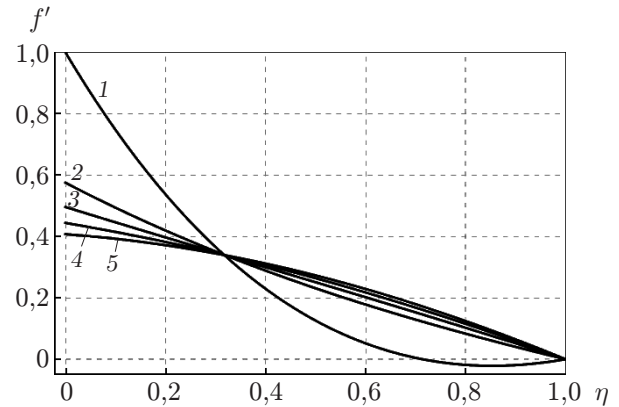


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость скорости от координаты η при $w_0 = 0$, $w_1 = 0,5$, $Re = 2$, $\beta = M = 0,5$ и различных значениях чисел Кнудсена:

1 — $Kn_1 = Kn_2 = 0$, 2 — $Kn_1 = Kn_2 = 0,5$, 3 — $Kn_1 = Kn_2 = 1$, 4 — $Kn_1 = Kn_2 = 2$, 5 — $Kn_1 = Kn_2 = 5$

что с увеличением числа Кнудсена скорость жидкости вблизи растягивающейся пластины уменьшается. Это вызвано уменьшением переноса количества движения при увеличении параметра скольжения. При $Kn_1 = Kn_2$ (скольжение отсутствует) имеет место обратное течение, вследствие чего трение на растягивающейся поверхности увеличивается. Однако при увеличении чисел Кнудсена это течение исчезает. На рис. 4 показано влияние параметра скольжения на скорость в случае отсутствия отсоса на нижней стенке ($w_0 = 0$) и наличия вдува на верхней стенке. Наличие поперечного потока массы и скольжения приводит к более существенному уменьшению вязкого сопротивления на растягивающейся поверхности, чем в случае отсутствия скольжения.

На рис. 5 показано влияние поперечного потока массы на скорость при наличии скольжения. Видно, что при увеличении скорости отсоса на нижней пластине и скорости вдува на верхней пластине скорость жидкости увеличивается. Это приводит к увеличению вязкого сопротивления на растягивающейся пластине (рис. 6). Увеличение скорости отсоса на нижней пластине и скорости вдува на верхней пластине приводит к росту вязкого сопротивления на растягивающейся поверхности. Из рис. 6 следует, что при малом значении параметра скольжения с увеличением значений w_0 и w_1 вязкое сопротивление существенно увеличивается, однако при увеличении параметра скольжения сопротивление уменьшается и при $Kn_1 = Kn_2 = 1,5$ становится постоянным. Из табл. 2 следует, что при фиксированном параметре w_0 можно найти значение параметра w_1 , при котором сопротивление трения является минимальным.

На рис. 7 показано влияние магнитного поля на сопротивление трения. Видно, что при увеличении числа Гартмана M скорость растет при $0 < \eta \leq 0,35$ и уменьшается при $\eta > 0,35$. На рис. 8 показана зависимость касательного напряжения от числа Кнудсена при различных значениях числа Гартмана M . Видно, что с увеличением M величина поверхностного трения растет вследствие увеличения силы сопротивления. Поэтому с увеличением числа Кнудсена касательное напряжение уменьшается. Это означает, что

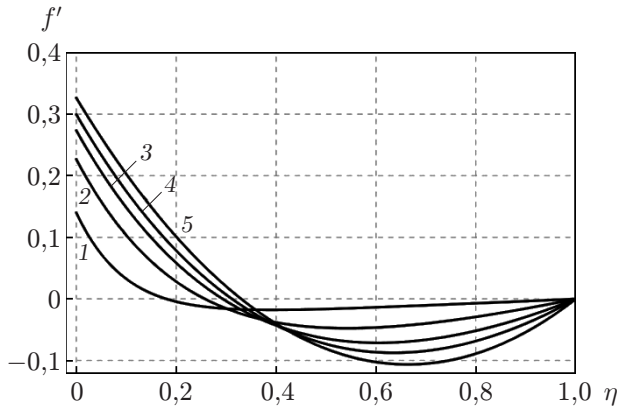


Рис. 5

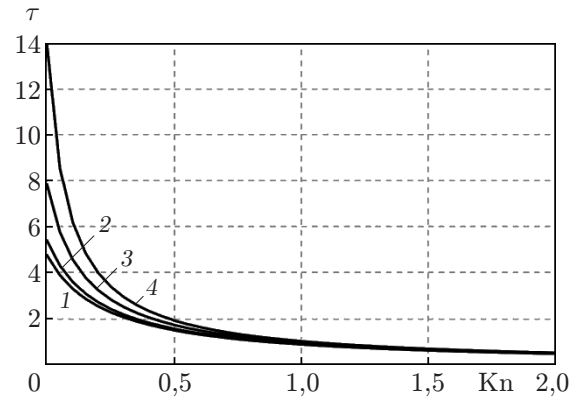


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость скорости от координаты η при $Kn_1 = Kn_2 = 0,5$, $Re = 2$, $\beta = M = 0,5$ и различных значениях скорости поперечного потока массы: 1 — $w_0 = w_1 = 0$, 2 — $w_0 = w_1 = 0,5$, 3 — $w_0 = w_1 = 1$, 4 — $w_0 = w_1 = 2$, 5 — $w_0 = w_1 = 5$

Рис. 6. Зависимость касательного напряжения τ от числа Кнудсена при $Re = 2$, $\beta = M = 0,5$, $Kn_1 = Kn_2$ и различных значениях скорости поперечного потока массы:

1 — $w_0 = w_1 = 0$, 2 — $w_0 = w_1 = 0,5$, 3 — $w_0 = w_1 = 2$, 4 — $w_0 = w_1 = 5$

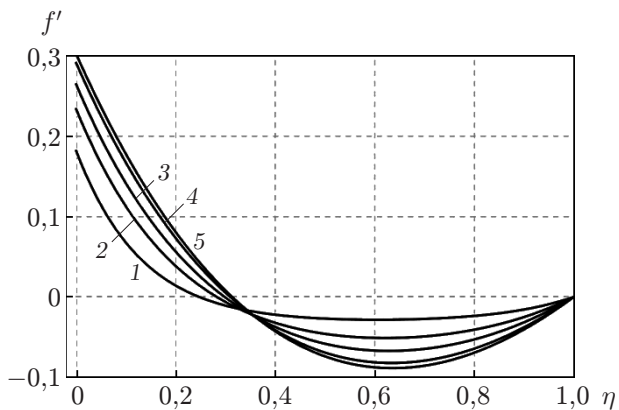


Рис. 7

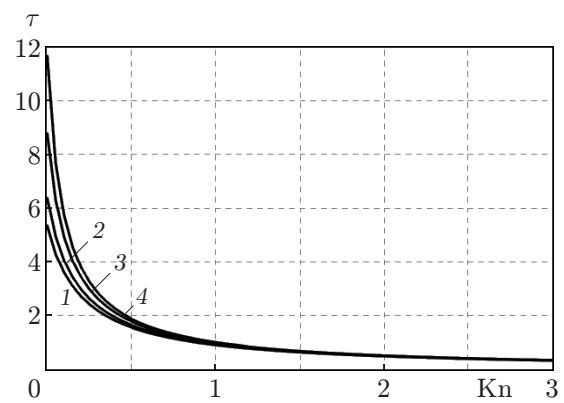


Рис. 8

Рис. 7. Зависимость скорости от координаты η при $Kn_1 = Kn_2 = 0,5$, $Re = 2$, $\beta = 0,5$, $w_0 = w_1 = 0,5$ и различных значениях числа Гартмана M : 1 — $M = 0$, 2 — $M = 1$, 3 — $M = 2$, 4 — $M = 3$, 5 — $M = 5$

Рис. 8. Зависимость касательного напряжения τ от числа Кнудсена при $Re = 2$, $\beta = w_0 = w_1 = 0,5$, $Kn_1 = Kn_2$ и различных значениях числа Гартмана M :

1 — $M = 0$, 2 — $M = 2$, 3 — $M = 4$, 4 — $M = 6$

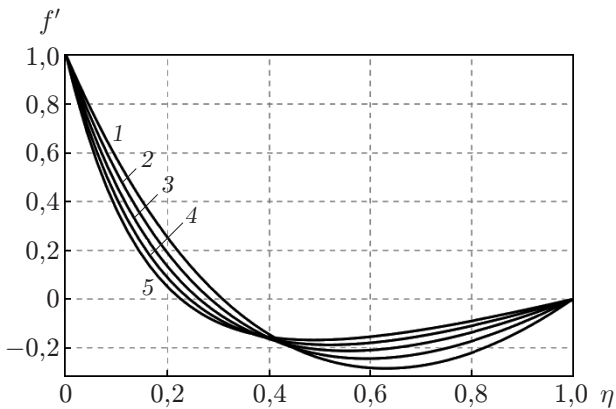


Рис. 9

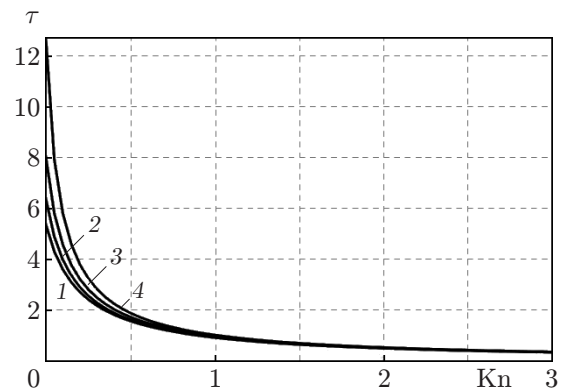


Рис. 10

Рис. 9. Зависимость скорости от координаты η при $\text{Kn}_1 = \text{Kn}_2 = M = 0,5$, $w_0 = w_1 = 0,5$ и различных значениях числа Рейнольдса:

1 — $\text{Re} = 2$, 2 — $\text{Re} = 4$, 3 — $\text{Re} = 6$, 4 — $\text{Re} = 8$, 5 — $\text{Re} = 10$

Рис. 10. Зависимость касательного напряжения τ от числа Кнудсена при $M = \beta = 0,5$, $w_0 = w_1 = 0,5$, $\text{Kn}_1 = \text{Kn}_2$ и различных значениях числа Рейнольдса:

1 — $\text{Re} = 2$, 2 — $\text{Re} = 4$, 3 — $\text{Re} = 7$, 4 — $\text{Re} = 15$

в гидромагнитных течениях число Кнудсена существенно влияет на вязкое сопротивление в условиях скольжения.

На рис. 9 показано влияние числа Рейнольдса Re на скорость. Видно, что с увеличением Re в нижней области канала скорость уменьшается, а в верхней — увеличивается. Это обусловлено увеличением инерции жидкости вследствие растяжения. На рис. 10 видно, что с увеличением числа Рейнольдса касательное напряжение на растягивающейся поверхности растет. Это обусловлено тем, что величина поверхностного трения увеличивается вследствие увеличения разности скоростей движения стенки и жидкости. Тем не менее при увеличении параметра скольжения вязкое сопротивление вдоль растягивающейся поверхности увеличивается менее существенно.

Заключение. В работе проведен анализ влияния магнитогидродинамического течения вдоль растягивающейся поверхности внутри канала на вязкое сопротивление жидкости при наличии поперечного потока массы. С использованием метода гомотопического анализа получены аналитические решения сильнонелинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение этих решений с решениями, полученными методом прогонки. Установлено, что данные решения хорошо согласуются. Показано, что влияние поперечного потока массы на вязкое сопротивление вблизи растягивающейся поверхности более существенно при наличии скольжения. При увеличении числа Кнудсена вязкое сопротивление на растягивающейся поверхности уменьшается даже при наличии сильного магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crane L. J. Flow past a stretching plate // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. Pavlov K. B. Magnetohydrodynamic flow of an incompressible viscous fluid caused by deformation of a plane surface // Magnetohydrodynamics. 1974. V. 10, N 4. P. 507–510.
3. Andersson H. I., Bech K. H. Magnetohydrodynamic flow of a power-law fluid over a stretching sheet // Intern. J. Nonlinear Mech. 1992. V. 27, N 6. P. 929–936.

4. **Andersson H. I.** MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface // *Acta Mech.* 1992. V. 95. P. 227–230.
5. **Banks W. H. H.** Similarity solutions of the boundary-layer equations for a stretching wall // *J. Mec. Theor. Appl.* 1983. V. 2. P. 375–392.
6. **Wang C. Y.** The three-dimensional flow due to a stretching flat surface // *Phys. Fluids.* 1984. V. 27. P. 1915–1917.
7. **Lakshmisha K. N., Nath G., Venkateswaran S.** Three-dimensional unsteady flow with heat and mass transfer over a continuous stretching surface // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1988. V. 110. P. 590–595.
8. **Dandapat B. S., Gupta A. S.** Flow and heat transfer in a viscoelastic fluid over a stretching sheet // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1989. V. 24. P. 215–219.
9. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow of a second grade fluid past a stretching sheet // *Intern. J. Engng Sci.* 2001. V. 39. P. 529–553.
10. **Liao S. J.** A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 2529–2539.
11. **Abbas Z., Wang Y., Hayat T., Oberlack M.** Slip effects and heat transfer analysis in a viscous fluid over an oscillatory stretching surface // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2009. V. 59. P. 443–458.
12. **Munawar S., Mehmood A., Ali A.** Unsteady flow of viscous fluid over the vacillate stretching cylinder // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2012. V. 70. P. 671–681.
13. **Ali A., Mehmood A.** Homotopy analysis of unsteady boundary layer flow adjacent to permeable stretching surface in a porous medium // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008. V. 13. P. 340–349.
14. **Mehmood A., Ali A.** Analytic solution of three-dimensional viscous flow and heat transfer over a stretching flat surface by homotopy analysis method // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 2008. V. 130. 121701.
15. **Borkakoti A. K., Bharali A.** Hydromagnetic flow and heat transfer between two horizontal plates, the lower plate being a stretched sheet // *Quart. Appl. Math.* 1983. V. 41. P. 461–467.
16. **Banerjee B.** Magnetohydrodynamic flow between two horizontal plates in a rotating system, the lower plate being a stretching sheet // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1983. V. 50. P. 470–471.
17. **Vajravelu K., Kumar B. V. R.** Analytical and numerical solutions of a coupled non-linear system arising in a three-dimensional rotating flow // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2004. V. 39. P. 13–24.
18. **Munawar S., Mehmood A., Ali A.** Three-dimensional squeezing flow in a rotating channel of lower stretching porous wall // *Comput. Math. Appl.* 2012. V. 64. P. 1575–1586.
19. **Mehmood A., Ali A.** Analytic homotopy solution of generalized three-dimensional channel flow due to uniform stretching of the plate // *Acta Mech. Sinica.* 2007. V. 23. P. 503–510.
20. **Mehmood A., Ali A.** Across mass transfer phenomenon in a channel of lower stretching wall // *Chem. Engng Comm.* 2011. V. 19. P. 678–691.
21. **Liao S. J., Cheung K. F.** Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water // *J. Engng Math.* 2003. V. 45. P. 105–116.
22. **Wang C., Zhu J. M., Liao S. J., Pop I.** On the explicit analytic solution of Cheng — Chang equation // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2003. V. 46. P. 1855–1860.
23. **Liao S. J.** On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 488. P. 189–212.

24. **Xu H., Liao S. J.** Series solutions of unsteady magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids caused by an impulsively stretching plate // *J. Non-Newton., Fluid Mech.* 2005. V. 129. P. 46–55.
25. **Tan Y., Abbasbandy S.** Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008 V. 13. P. 539–546.
26. **Domairry G., Bararnia H.** An approximation of the analytic solution of some nonlinear heat transfer equations: A survey by using homotopy analysis method // *Adv. Stud. Theor. Phys.* 2008. V. 2, N 11. P. 507–518.
27. **Mehmood A., Ali A.** Unsteady boundary layer flow due to an impulsively started moving plate // *Proc. Inst. Mech. Engng. Pt G. J. Aerospace Engng.* 2007. V. 221. P. 385–390.
28. **Mehmood A., Ali A.** An explicit analytic solution of steady three-dimensional stagnation point flow of second grade fluid toward a heated plate // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2008. V. 75. 061003.
29. **Moghaddam M. M., Ghazizadeh H. R., Mansouri A.** Homotopy analysis solution of free convection flow on a horizontal impermeable surface embedded in a saturated porous medium // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14, N 11. P. 3833–3843.
30. **Mehmood A., Munawar S., Ali A.** Cooling of a hot stretching surface in the presence of across mass transfer phenomenon // *Z. Naturforsch. Ser. A. J. Phys. Sci.* 2014. Bd 69a. S. 34–42.
31. **Butt A. S., Ali A., Munawar S.** Slip effects on entropy generation in MHD flow over a stretching surface in the presence of thermal radiation // *Intern. J. Exergy.* 2013. V. 13. P. 1–20.
32. **Liao S. J.** *Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method.* L.; Boca Raton: Chapman and Hall: CRC, 2003.

*Поступила в редакцию 7/І 2015 г.,
в окончательном варианте — 2/ІІІ 2015 г.*
