

УДК 517.95

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ ТЕПЛОВЫХ ОБОЛОЧЕК

Г. В. Алексеев<sup>\*,\*\*</sup>, В. А. Левин<sup>\*\*\*</sup>, Д. А. Терешко<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

<sup>\*\*</sup> Дальневосточный федеральный университет, 690041 Владивосток, Россия

<sup>\*\*\*</sup> Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия  
E-mails: alekseev@iam.dvo.ru, levin@iacp.dvo.ru, ter@iam.dvo.ru

Исследуются обратные задачи теплопереноса, возникающие при проектировании многослойных сферических маскировочных оболочек и других функциональных устройств, служащих для управления тепловыми полями. Полагается, что оболочки состоят из конечного числа слоев, каждый из которых заполнен однородной изотропной либо анизотропной средой. Приводится и анализируется точное решение для частного случая однослойной однородной анизотропной оболочки. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые обратные задачи сводятся к задачам управления. Предлагается численный алгоритм их решения, основанный на методе роя частиц, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: теплоперенос, тепловая маскировка, проектирование функциональных устройств, обратные задачи, метод оптимизации, метод роя частиц.

DOI: 10.15372/PMTF20190213

В последнее время интенсивно развивается новое направление исследований теплопереноса, связанное с разработкой технологий проектирования специальных функциональных устройств, служащих для управления потоками тепла. Одним из таких функциональных тепловых устройств является тепловая оболочка, представляющая собой сферический слой (или кольцо на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ), заполненный неоднородной анизотропной в общем случае средой. В зависимости от поставленной цели указанная тепловая оболочка может служить для тепловой маскировки любого помещенного внутрь нее объекта, либо для концентрирования тепла внутри нее [1–3]. Возможные цели построения тепловых оболочек описаны, например, в [4–6].

При решении задач проектирования средств тепловой маскировки и других функциональных устройств используются как экспериментальные, так и теоретические методы. Большинство экспериментальных работ в этой области посвящено исследованию возможностей и способов управления тепловыми потоками с помощью специально разрабатываемых для этой цели новых материалов [1]. Теоретические исследования направлены на разработку методов проектирования тепловых функциональных устройств, служащих для управления потоками тепла. Использование теоретических методов приводит к необхо-

---

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00400-19-00.

© Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А., 2019

димости решения обратных задач для соответствующей модели теплопереноса. Решение указанных задач заключается в выборе параметров среды, заполняющей оболочку с заданной топологией, на основе информации о создаваемом тепловом поле в зависимости от назначения проектируемого устройства.

При некоторых упрощающих предположениях задачи проектирования функциональных тепловых устройств рассматривались в ряде работ (см., например, [4–6] и библиографию к ним), в которых предложен метод построения точных решений, основанный на методе Фурье. Однако этот метод применим лишь при выполнении жестких упрощающих предположений, обеспечивающих построение в явном виде точного или приближенного решения прямой задачи теплопереноса.

Целью настоящей работы является создание эффективного численного алгоритма решения осесимметричных обратных задач проектирования средств тепловой маскировки и других функциональных устройств и анализ результатов проведенных вычислительных экспериментов. Поэтому для решения данных задач целесообразно применить оптимизационный метод, используемый при исследовании обратных задач тепломассопереноса (см., например, [7–10]). Разрабатываемый ниже алгоритм основан на численном решении экстремальных задач, возникающих при использовании оптимизационного метода для решения рассматриваемых обратных задач. В качестве процедуры численной оптимизации используется метод роя частиц по схеме, предложенной в [11, 12] для решения задач тепловой маскировки.

**1. Постановка прямой задачи. Анализ точного решения.** Сформулируем прямую задачу для рассматриваемой модели теплопереноса. В задаче тепловой маскировки рассматриваются трехмерная область  $D$ , в которую помещается маскируемый объект, внешнее приложенное тепловое поле  $T^e$ , служащее для обнаружения объекта, и маскировочная оболочка, предназначенная для маскировки скрываемого объекта [4–6]. В качестве основной области будем рассматривать цилиндр  $D = \{\mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: -z_0 < z < z_0, x^2 + y^2 < c^2\}$  при заданных числах  $z_0 > 0$  и  $c$  (рис. 1). Будем полагать, что внешнее приложенное тепловое поле  $T^e$  создается двумя нагретыми до разных температур  $T_1$  и  $T_2$  горизонтальными основаниями  $z = \pm z_0$ , тогда как боковая поверхность  $\Gamma$  цилиндра  $D$  является теплоизолированной.

Далее предположим, что в цилиндр  $D$  помещается маскировочная оболочка, представляющая собой пару  $(\Omega, \varkappa)$ , где  $\Omega$  — сферический слой  $\{a < r = |\mathbf{x}| < b\}$ ;  $b < c$ ;  $\varkappa$  — тензор проводимости анизотропной в общем случае среды, заполняющей  $\Omega$ . Тогда поле  $T^e$  изменяется и принимает вид  $\tilde{T}^e = T^e + T^s$  ( $T^s$  — возмущение поля  $T^e$ , вызванное помещением объекта  $(\Omega, k)$  в область  $D$ , которое будем называть его рассеянным тепловым откликом). Отклик  $T^s$  зависит от вносимого объекта, а задача нахождения  $T^s$  называется также прямой задачей теплового рассеяния (по аналогии с прямыми задачами электромагнитного рассеяния). Данная прямая задача сводится к нахождению тройки функций ( $T_i$  в  $\Omega_i$ ,  $T$  в  $\Omega$ ,  $T_e = T^e + T^s$  в  $\Omega_e$ ), удовлетворяющих уравнениям

$$k_b \Delta T_i = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad k_b \Delta T_e = 0 \quad \text{в } \Omega_e, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$T|_{z=-z_0} = T_1, \quad T|_{z=z_0} = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

и условиям сопряжения на границах  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_e$  слоя  $\Omega$  [6. Гл. 4]:

$$T_i = T, \quad k_b \frac{\partial T_i}{\partial n} = (\varkappa \nabla T) \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_i, \quad T_e = T, \quad k_b \frac{\partial T_e}{\partial n} = (\varkappa \nabla T) \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_e. \quad (1.3)$$

Здесь  $k_b = \operatorname{const}$  — коэффициент теплопроводности однородной и изотропной среды, заполняющей область  $D$ . Заметим, что каждая введенная область (цилиндр  $D$  и слой  $\Omega$ )

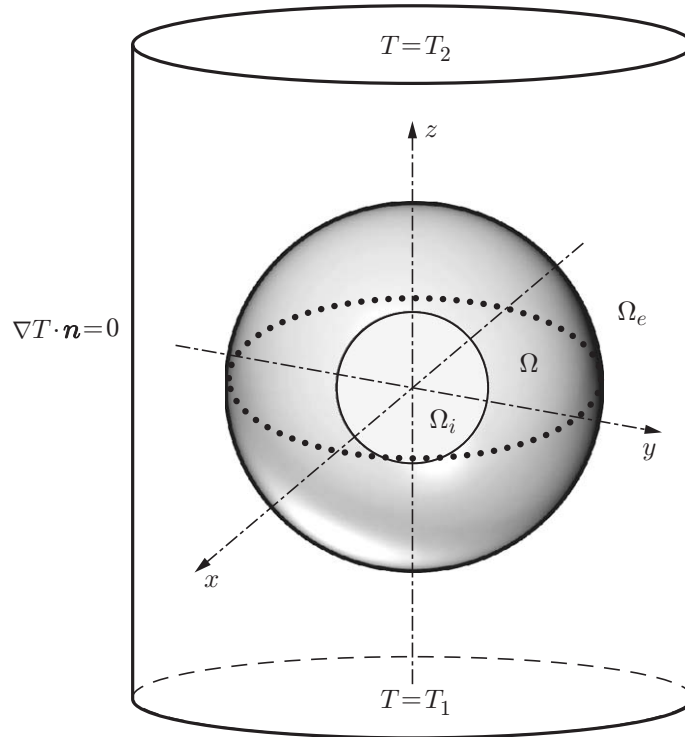


Рис. 1. Геометрия задачи

обладает осевой симметрией. Это свойство будем использовать наряду со следующим предположением.

Тензор  $\kappa$  является диагональным в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ , а его диагональные компоненты (радиальный, полярный и азимутальный коэффициенты теплопроводности)  $k_r, k_\theta$  и  $k_\varphi$  не зависят от  $\varphi$  и удовлетворяют условиям

$$k_r \in L^\infty(\Omega), \quad k_\theta \in L^\infty(\Omega), \quad k_r \geq k_r^0 = \text{const} > 0, \quad k_\theta \geq k_\theta^0 = \text{const} > 0, \quad k_\varphi = k_\theta. \quad (1.4)$$

Условие  $k_\varphi = k_\theta$  в (1.4) часто используется при исследовании трехмерных задач проектирования тепловых функциональных устройств. В частном случае, когда параметры  $k_r, k_\theta$ , а также граничные функции  $T_1$  и  $T_2$  постоянны и выполняется условие  $2k_r k_\theta = k_b^2 + k_b k_r$ , задача (1.1)–(1.3) допускает точное решение, которое можно построить с помощью метода Фурье. Данное решение  $(T_i, T, T_e)$  является осесимметричным, т. е. не зависит от величины угла  $\varphi$  и, как нетрудно проверить с помощью непосредственной подстановки, описывается формулами

$$\begin{aligned} T_i(r, \theta) &= \frac{T_0}{z_0} \left(\frac{a}{b}\right)^{q-1} r \cos \theta + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{в } \Omega_i, \\ T(r, \theta) &= \frac{T_0}{z_0} \left(\frac{r}{b}\right)^{q-1} r \cos \theta + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{в } \Omega, \\ T_e(r, \theta) &= \frac{T_0}{z_0} r \cos \theta + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{в } \Omega_e, \\ q(s) &\equiv \frac{-1 + \sqrt{1 + 8s}}{2}, \quad s = \frac{k_\theta}{k_r}, \quad T_0 = \frac{T_2 - T_1}{2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В (1.5) введен параметр анизотропии  $s = k_\theta/k_r$ , характеризующий степень анизотропии соответствующей оболочки  $(\Omega, k_r, k_\theta)$ . Анализ показывает, что введенная в (1.5) величина

на  $q(s)$  является непрерывной монотонно возрастающей функцией  $s$  при  $s \geq 0$ , при этом выполняются условия

$$q(s) > 0 \quad \text{на} \quad (0, \infty), \quad q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q(s) \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

В случае когда  $s = 1$ ,  $k_r = k_\theta = k_b$ , т. е. среда, заполняющая область  $D$ , однородна и изотропна, формулы (1.5) принимают вид

$$T^e(r, \theta) = \frac{T_0}{z_0} r \cos \theta + \frac{T_1 + T_2}{2} = T_0 \frac{z}{z_0} + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{в} \quad D. \quad (1.7)$$

Описываемое формулой (1.7) поле  $T^e$  выполняет функцию внешнего приложенного поля, используемого для обнаружения объектов, помещаемых в область  $D$ .

Из (1.5), (1.7) следует

$$|\nabla T^e| = \frac{T_0}{z_0}, \quad |\nabla T_i| = \frac{T_0}{z_0} P \quad \text{в} \quad \Omega_i, \quad P(s) \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^{q-1}. \quad (1.8)$$

Введем величину  $Q(s) = 1 - P(s)$ , имеющую смысл маскировочной эффективности исследуемой оболочки  $(\Omega, k_r, k_\theta)$  при  $s > 1$  [6. Гл. 4]. Поскольку  $a < b$ , из (1.8), (1.6) следует, что  $0 \leq P(s) \leq 1$ ,  $0 \leq Q(s) \leq 1$  при  $s \geq 1$ , причем  $P(s) \rightarrow 1$ ,  $Q(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 1$  и  $P(s) \rightarrow 0$ ,  $Q(s) \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow \infty$ . Это означает, что маскировочная эффективность оболочки  $(\Omega, k_r, k_\theta)$ , спроектированной с использованием формул (1.5), увеличивается при увеличении параметра  $s = k_\theta/k_r$ . В предельном случае  $s \rightarrow \infty$  маскировочная эффективность оболочки максимальна:  $Q = 1$ , при  $s \rightarrow 1$  имеем тепловую оболочку  $(\Omega, k_r, k_\theta)$ , для которой  $Q = 0$ , при  $s < 1$  получаем  $q(s) < 1$ ,  $P(s) > 1$ , а оболочка  $(\Omega, k_r, k_\theta)$  действует как концентратор тепла [12]. Указанные свойства точного решения задачи (1.1)–(1.3) используются при проверке точности и качества предложенного в п. 2 численного алгоритма решения обратных задач.

**2. Постановка обратных задач. Применение оптимизационного метода и метода роя частиц.** В общем виде рассматриваемые обратные задачи заключаются в нахождении параметров  $k_r$  и  $k_\theta$  среды, заполняющей область  $\Omega$ , с использованием следующих условий:

$$\nabla T_\varkappa = \nabla T_i^d \quad \text{в} \quad \Omega_i, \quad T_\varkappa = T_e^d \quad \text{в} \quad \Omega_e. \quad (2.1)$$

При этом должно выполняться предположение, сделанное в п. 1. В (2.1)  $T = T_\varkappa$  — решение прямой задачи (1.1)–(1.3) при  $\varkappa = \text{diag}(k_r, k_\theta)$ ; функции  $T_i^d$  и  $T_e^d$  моделируют заданные в  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$  тепловые поля. Указанная обратная задача часто рассматривается как задача теплового камуфляжа. В частном случае, когда  $T_i^d = 0$ ,  $T_e^d = T^e$  и условия (2.1) принимают вид  $\nabla T_\varkappa = 0$  (т. е.  $T_\varkappa = T^0 = \text{const}$ ) в  $\Omega_i$  и  $T_\varkappa = T^e$  (т. е.  $T^s = 0$ ) в  $\Omega_e$ , данная задача называется задачей общей маскировки. Это обусловлено тем, что, если объект произвольной формы с постоянной температурой  $T^0$  поместить внутрь  $\Omega_i$ , это не приведет (в силу единственности решения прямой задачи теплового рассеяния) к появлению ненулевого рассеянного отклика  $T_e^s$ , а следовательно, объект невозможно обнаружить, используя измерения внешней температуры. В случае когда параметры  $k_r$  и  $k_\theta$  ищутся при выполнении только первого или только второго условия в (2.1), соответствующая задача рассматривается в качестве задачи частичной (внутренней или внешней) маскировки. Наконец, в случае, когда  $T_i^d = -T^e$  в  $\Omega_i$ , указанная обратная задача называется задачей обращения внешнего теплового потока [1].

Численное решение рассматриваемых обратных задач предполагает их дискретизацию. В настоящей работе предлагается численный алгоритм решения рассматриваемых обратных задач, основанный на их естественной дискретизации. Под естественной дискретизацией понимается физическая замена исходной “непрерывной” тепловой оболочки

$(\Omega, k_r, k_\theta)$  оболочкой, состоящей из конечного числа концентрических слоев  $(\Omega_j, k_{rj}, k_{\theta j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Каждый слой заполнен однородной анизотропной в общем случае средой с постоянными проводимостями  $k_{rj} > 0$ ,  $k_{\theta j} > 0$ . Заметим, что при использовании естественной дискретизации решение рассматриваемых обратных задач существенно упрощается, поскольку параметры  $k_r(\mathbf{x})$ ,  $k_\theta(\mathbf{x})$  слоистой оболочки можно искать в виде

$$k_r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M k_{rj} \chi_j(\mathbf{x}), \quad k_\theta(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M k_{\theta j} \chi_j(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

В (2.2)  $\chi_j(\mathbf{x})$  — характеристическая функция слоя  $\Omega_j$ , равная 1 в  $\Omega_j$  и 0 вне  $\Omega_j$ ;  $k_{rj}$ ,  $k_{\theta j}$  — неизвестные коэффициенты.

Таким образом, в рассматриваемых обратных задачах искомым является набор  $(2M$ -мерный вектор)  $\mathbf{k} \equiv (k_{r1}, k_{\theta 1}, \dots, k_{rM}, k_{\theta M})$ , составленный из проводимостей  $k_{rj}$  и  $k_{\theta j}$ . Будем называть  $\mathbf{k}$  вектором проводимостей тепловой оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$ . В частном случае  $M$ -слойной оболочки с изотропными слоями, когда  $k_{rj} = k_{\theta j} = k_j > 0$ , проводимости слоев  $k_j$  образуют  $M$ -мерный вектор  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ . С использованием оптимизационного метода обратные задачи сводятся к решению конечномерных экстремальных задач. Для того чтобы их сформулировать, обозначим через  $T(\mathbf{k})$  решение прямой задачи, соответствующее параметрам  $k_{rj}$ ,  $k_{\theta j}$  в  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) и коэффициенту  $k_b$  в  $\Omega_i \cup \Omega_e$ . Полагая, что вектор  $\mathbf{k}$  принадлежит ограниченному множеству

$$K = \{\mathbf{k} = (k_{r1}, k_{\theta 1}, \dots, k_{rM}, k_{\theta M}): m_r \leq k_{rj} \leq M_r, m_\theta \leq k_{\theta j} \leq M_\theta, j = 1, \dots, M\} \quad (2.3)$$

для заданных положительных констант  $m_r, M_r, m_\theta, M_\theta$ , рассмотрим две экстремальные задачи:

$$J_e(\mathbf{k}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{k} \in K; \quad (2.4)$$

$$J(\mathbf{k}) = J_e(\mathbf{k}) + J_i(\mathbf{k}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{k} \in K. \quad (2.5)$$

Здесь функционалы  $J_1(\mathbf{k})$ ,  $J_2(\mathbf{k})$  определяются формулами

$$J_e(\mathbf{k}) = I_e(k_r, k_\theta, T^e) \equiv \frac{\|T(\mathbf{k}) - T^e\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|T^e\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J_i(\mathbf{k}) = \frac{\|\nabla T(\mathbf{k})\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\nabla T^e\|_{L^2(\Omega_i)}}. \quad (2.6)$$

В соответствии с п. 1 задача (2.4) (либо (2.5)) является оптимальной задачей внешней (либо общей) маскировки. Аналогичным образом можно сформулировать экстремальные задачи, соответствующие другим обратным задачам.

Рассмотрим два частных случая задач (2.4), (2.5). В первом случае ( $\mathbf{k} = (k_r^0, k_\theta^0)$ ) исследуется однослойная анизотропная оболочка  $(\Omega, k_r^0, k_\theta^0)$  с постоянными параметрами  $k_r^0$  и  $k_\theta^0$ , удовлетворяющими условию “допустимости”  $2k_r^0 k_\theta^0 = k_b^2 + k_b k_r^0$ , во втором случае —  $M$ -слойная оболочка  $(\Omega, \mathbf{k})$  с изотропными слоями ( $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$ ). Как указывалось выше, в первом случае при выполнении условий  $T_1 = \text{const}$ ,  $T_2 = \text{const}$  существует точное решение задачи (1.1)–(1.3), описываемое формулами (1.5), причем для него выполняются соотношения (1.8). Используя (1.8), (2.6), нетрудно показать, что

$$J_e(k_r^0, k_\theta^0) = 0, \quad J(k_r^0, k_\theta^0) = J_i(k_r^0, k_\theta^0) = P(s), \quad s = k_\theta^0/k_r^0, \quad (2.7)$$

где  $P(s)$  — мера видимости оболочки  $(\Omega, k_r^0, k_\theta^0)$ , связанная с маскировочной эффективностью  $Q(s)$  соотношением  $P(s) = 1 - Q(s)$ . Равенство  $J_e(k_r^0, k_\theta^0) = 0$  означает, что любая “допустимая” пара  $(k_r^0, k_\theta^0)$  является точным решением обратной задачи внешней маскировки. Кроме того, из (2.7) следует, что значение  $J_i(k_r^0, k_\theta^0)$ , как и значение  $J(k_r^0, k_\theta^0)$  функционала  $J$ , характеризует маскировочную эффективность однослойной оболочки  $(\Omega, k_r^0, k_\theta^0)$ , увеличивающуюся при уменьшении значения  $J(k_r^0, k_\theta^0)$ .

Для решения экстремальной задачи (2.5) используем численный алгоритм на основе метода роя частиц [13]. Этот метод, предложенный в [14], не использует значения производных функционала, является универсальным и простым при численной реализации [11, 12, 15]. В методе роя частиц искомые параметры, определяющие значение функционала  $J$ , представляются в виде координат радиус-вектора  $\mathbf{k} = (k_{r1}, k_{\theta1}, \dots, k_{rM}, k_{\theta M})$  некоторой абстрактной частицы. Роем частиц называется конечный набор частиц  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N$ . В этом методе задаются начальные положения частиц  $\mathbf{k}_j^0$  и процедура перемещения частиц  $\mathbf{k}_j^{i+1} = \mathbf{k}_j^i + \mathbf{v}_j^{i+1}$  где  $\mathbf{v}_j^{i+1} = w\mathbf{v}_j^i + c_1r_1(\mathbf{p}_j^i - \mathbf{k}_j^i) + c_2r_2(\mathbf{p}_g - \mathbf{k}_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, N$  (нижний индекс  $j \in \{1, \dots, N\}$  обозначает номер частицы, верхний индекс  $i \in \{0, \dots, L\}$  — номер итерации). После каждого смещения для нового положения  $\mathbf{k}_j^{i+1}$  вычисляется значение  $J(\mathbf{k}_j^{i+1})$  функционала  $J$ , которое сравнивается с текущим минимальным значением функционала, и при необходимости обновляются персональное и глобальное наилучшие положения  $\mathbf{p}_j^{i+1}$  и  $\mathbf{p}_g$ . При правильно подобранных параметрах алгоритма в конце этого итерационного процесса все частицы сходятся в точку глобального минимума [13].

**3. Анализ результатов вычислительных экспериментов.** Проанализируем результаты численного решения рассматриваемых задач маскировки с использованием метода роя частиц. Заметим, что наиболее затратной частью описанного выше алгоритма является вычисление значений  $J(\mathbf{k}_j^i)$  функционала  $J(\mathbf{k})$  для положения  $\mathbf{k}_j^i$  частицы при различных значениях  $i$  и  $j$ . Эта процедура включает два этапа. На первом этапе вычисляется решение  $T(\mathbf{k}_j^i)$  прямой задачи (1.1)–(1.3). Для этого используется пакет FreeFEM++ ([www.freefem.org](http://www.freefem.org)), предназначенный для численного решения двумерных и трехмерных краевых задач с помощью метода конечных элементов. После нахождения  $T(\mathbf{k}_j^i)$  с помощью численного интегрирования по сечению области  $\Omega_e$  либо  $\Omega_i$  плоскостью  $y = 0$  вычисляются среднеквадратичные интегральные нормы, входящие в выражения для функционалов  $J_e$  либо  $J_i$  в (2.6).

При проведении вычислительных экспериментов полагалось, что область  $D$ , оболочка  $\Omega$  и граничные условия определяются с помощью следующих параметров:  $z_0 = 3$  м,  $a = 1$  м,  $b = 2$  м,  $c = 3$  м,  $T_1 = 0$  °С,  $T_2 = 100$  °С,  $k_0 = 1$  Вт/(м·К). В силу осесимметричности прямой краевой задачи ее решение в сферических координатах не зависит от величины угла  $\varphi$ . С учетом этого приближенные значения  $T(\mathbf{k}_j^i)$  решения прямой задачи определялись в сечении  $D_2$  трехмерной области  $D$  плоскостью  $y = 0$ . Метод роя частиц использовался при следующих параметрах:  $N = 25$ ,  $L = 50$ ,  $w = 0,5$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1,5$ . На первом этапе решения прямой задачи с помощью метода конечных элементов использовалась последовательность сгущающихся сеток. В последнем варианте сетки расчетная область разбивалась на 100 000 треугольников. Дальнейшее измельчение сетки не приводило к повышению точности.

Замаскировать тело, помещенное в подобласть  $\Omega_i$ , можно с помощью однослойной однородной универсальной оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$  ( $\mathbf{k} = (k_r, k_\theta)$ ), искомые параметры  $k_r$ ,  $k_\theta$  которой определяются путем решения задачи минимизации (2.5) при  $M = 1$ . При этом большое значение имеет выбор ограничений  $m_r$ ,  $M_r$ ,  $m_\theta$ ,  $M_\theta$  множества управлений  $K$  в (2.3). Из анализа свойств точного решения (1.5) следует, что использование материалов с малым значением параметра  $k_r$  и большим значением параметра  $k_\theta$  (т. е. с высокой анизотропией  $s$ ) обеспечивает малость значения  $J(k_r, k_\theta) = P(s)$  (см. (2.7)), поскольку  $P(s) = (a/b)^{q(s)-1} \rightarrow 0$  при  $s = k_\theta/k_r \rightarrow \infty$ . С учетом этого при проведении расчетов для однослойных оболочек выбирались малые значения  $m_r$  и  $M_r$  для границ параметра  $k_r$  и большие значения границ  $m_\theta$  и  $M_\theta$  для параметра  $k_\theta$ . В частности, численное решение задачи (2.5), (2.3) с использованием метода роя частиц при  $m_r = 0,02k_0$ ,  $M_r = 0,05k_0$ ,  $m_\theta = k_0$ ,  $M_\theta = 100k_0$  дает следующие результаты:  $k_r^{opt} = 0,05$ ,  $k_\theta^{opt} = 9,55$ ,  $J^{opt} = 9,63 \cdot 10^{-4}$ ,

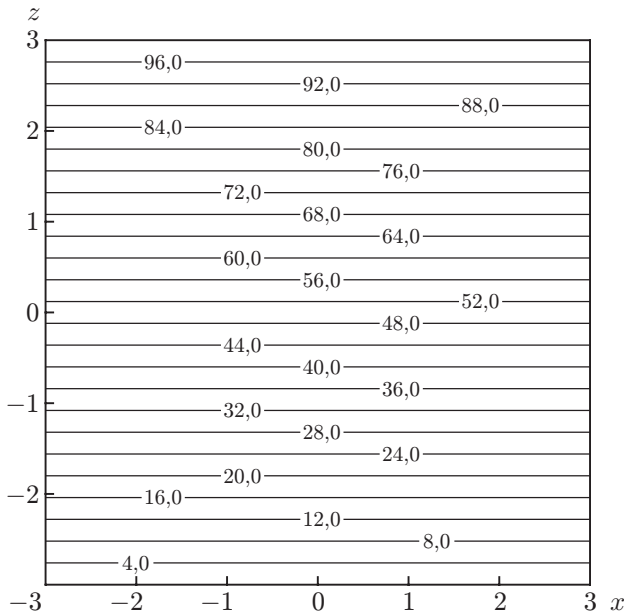


Рис. 2

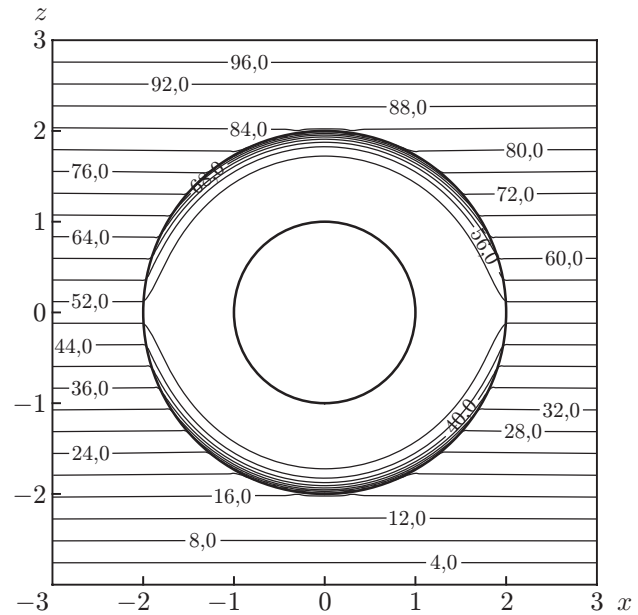


Рис. 3

Рис. 2. Изолинии поля температуры  $T^e(x, 0, z)$  в сечении плоскостью  $y = 0$ , в случае когда область заполнена однородной изотропной средой

Рис. 3. Изолинии поля температуры  $T(x, 0, z)$  для однослойной анизотропной оболочки

$J_i^{opt} = 5,11 \cdot 10^{-6}$ ,  $J_e^{opt} = 9,58 \cdot 10^{-4}$ . Для данной оболочки с параметром анизотропии  $s = k_\theta^{opt}/k_r^{opt} = 191$  вычисленное внешнее поле  $T_e[k_r^{opt}, k_\theta^{opt}]$  получилось близким к внешнему приложенному полю  $T^e$ , вследствие чего создается иллюзия отсутствия возмущающего объекта в области  $D$  (рис. 2, 3). Степень близости указанных полей определяется мерой внешнего возмущения поля  $J_e^{opt} = \|T^{opt} - T^e\|_{\Omega_e} / \|T^e\|_{\Omega_e} = 9,58 \cdot 10^{-4}$ .

Следует отметить, что техническая реализация маскировочных оболочек с высокой анизотропией связана с большими трудностями, поскольку необходимые для этого материалы не встречаются в природе. Для проектирования легко реализуемой маскировочной оболочки рассмотрим задачу управления (2.5) для многослойной оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$  ( $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$ ), состоящей из  $M$  однородных изотропных слоев  $(\Omega_j, k_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Полагая  $M$  четным, множество управлений  $K$  определим следующим образом:

$$K = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M): k_{\min} \leq k_j \leq k_{\max}, j = 1, \dots, M\}. \quad (3.1)$$

Здесь верхняя и нижняя границы  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  являются положительными константами, соответствующими проводимостям некоторых природных материалов.

Сначала проанализируем слоистые оболочки, построенные по принципу “чередующегося дизайна”, когда материалы распределены по слоям таким образом, что  $k_1 = k_3 = \dots = k_{M-1} = k_{\min}$ ,  $k_2 = k_4 = \dots = k_M = k_{\max}$  [4]. Полагая

$$k_{\min} = 0,05k_0, \quad k_{\max} = 20k_0, \quad k_b = k_0, \quad (3.2)$$

что соответствует выбору в качестве основных материалов дерева, нержавеющей стали и стекла, решим соответствующую задачу (1.1), (1.2) для различных значений числа  $M$  и определим значения функционалов  $J$ ,  $J_i$  и  $J_e$  на данных решениях. Результаты вычислений этих функционалов для  $M = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  приведены в табл. 1. Из табл. 1 следует,

Таблица 1

Значения функционалов для неоптимизированной многослойной оболочки при  $k_{\min} = 0,05k_0$ ,  $k_{\max} = 20k_0$

$M$	$k_M/k_0$	$J(\mathbf{k})$	$J_i(\mathbf{k})$	$J_e(\mathbf{k})$
2	20	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$
4	20	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$
6	20	$9,1 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$8,8 \cdot 10^{-2}$
8	20	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{-2}$
10	20	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$
12	20	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$

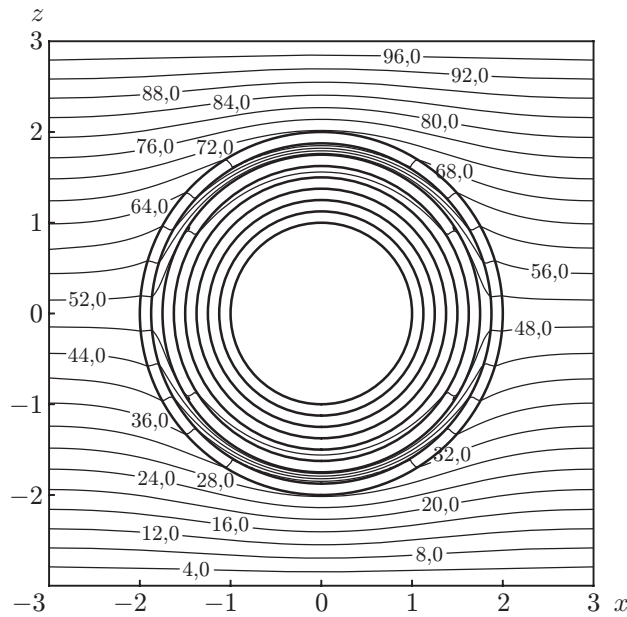


Рис. 4. Изолинии поля температуры  $T(x, 0, z)$  для неоптимизированной восьмислойной оболочки

что значения всех функционалов медленно уменьшаются с увеличением числа слоев  $M$ . На рис. 4 показаны изолинии поля температуры  $T(x, 0, z)$  для случая  $M = 8$ , которые искривлены вне оболочки, что свидетельствует о наличии в области  $D$  инородного объекта. Следовательно, слоистые оболочки, построенные по принципу “чередующегося дизайна”, имеют низкую маскировочную эффективность.

Далее для решения рассматриваемой задачи используем оптимизационный метод. Для этого решим задачу управления (2.5), (3.1) при том же выборе параметров (3.2). С использованием метода роя частиц показано, что оптимальные значения всех нечетных параметров совпадают с граничным значением  $k_{\min}$ , оптимальные значения всех четных параметров, кроме  $k_M$ , совпадают с граничным значением  $k_{\max}$ . Значения  $k_M^{opt}$  изменяются от  $k_M^{opt} = 20k_0$  при  $M = 2$  до  $k_M^{opt} = 3,39k_0$  при  $M = 12$ . Таким образом, выполняются условия

$$k_1^{opt} = k_3^{opt} = \dots = k_{M-1}^{opt} = k_{\min}, \quad k_2^{opt} = k_4^{opt} = \dots = k_{M-2}^{opt} = k_{\max}. \quad (3.3)$$

Значения  $k_M^{opt}$  и  $J^{opt}$ ,  $J_i^{opt}$ ,  $J_e^{opt}$  для различного числа слоев  $M$  приведены в табл. 2. Изолинии оптимального поля температуры  $T^{opt}(x, 0, z)$  для случая  $M = 8$  представлены на рис. 5. В данном случае изолинии во внешней подобласти  $\Omega_e$  являются прямыми, что создает иллюзию отсутствия объекта в области  $D$ .



Таблица 2

Значения функционалов для оптимизированной многослойной оболочки  
при  $k_{\min} = 0,05k_0$ ,  $k_{\max} = 20k_0$

$M$	$k_M/k_0$	$J(\mathbf{k})$	$J_i(\mathbf{k})$	$J_e(\mathbf{k})$
2	20,00	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$
4	3,05	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$
6	3,54	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
8	3,75	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$
10	3,67	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$
12	3,39	$9,2 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$

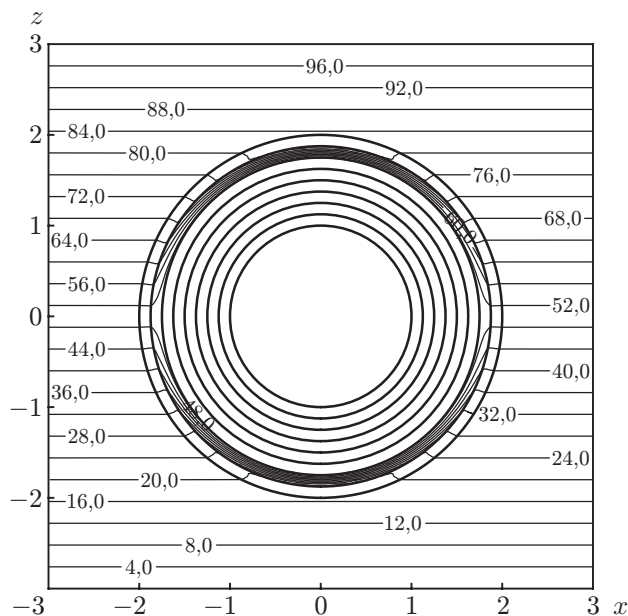


Рис. 5. Изолинии поля температуры  $T(x, 0, z)$  для оптимизированной восьмислойной оболочки

Сравнение данных, приведенных в табл. 1, 2, показывает, что во втором случае маскировочная эффективность существенно увеличивается за счет уменьшения значений  $J_e^{opt}$ . Указанное увеличение эффективности спроектированной оболочки можно объяснить оптимальным выбором коэффициента теплопроводности последнего слоя. При этом значения  $J_i^{opt}$  во втором случае больше, вследствие того что параметр  $k_M$  не равен значению  $k_{\max}$ , соответствующему верхней границе. Заметим, что качество оптимального решения  $\mathbf{k}^{opt}$ , характеризуемое оптимальным значением  $J^{opt}$  функционала качества  $J$ , существенно зависит от выбора граничных значений  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  множества  $K$  в (3.1), в пределах которого ищется минимум функционала  $J$ . В частности, если расширить множество  $K$  за счет увеличения  $k_{\max}$  или уменьшения  $k_{\min}$ , значение  $J^{opt}$  уменьшится (за счет уменьшения  $J_i^{opt}$ ), а маскировочная эффективность оболочки увеличится. Это нетрудно показать, решив задачу управления (2.5), (3.1) для значений  $k_{\min} = 0,05k_0$ ,  $k_{\max} = 401k_0$ ,  $k_b = k_0$ , соответствующих дереву, меди и стеклу.

С использованием метода роя частиц для выбора нового граничного значения  $k_{\max}$  вновь получаем соотношения (3.3) для всех значений  $k_i^{opt}$ , кроме  $k_M^{opt}$ . Оптимальные значения управления  $k_M$  и всех функционалов приведены в табл. 3. Следует отметить, что при увеличении  $M$  значение  $J^{opt}$  уменьшается и достигает минимального значения

Таблица 3

Значения функционалов для оптимизированной многослойной оболочки  
при  $k_{\min} = 0,05k_0$ ,  $k_{\max} = 401k_0$

$M$	$k_M^{opt}$	$J^{opt}$	$J_i^{opt}$	$J_e^{opt}$
2	401,00	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$
4	3,01	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$9,8 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$
6	3,23	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$
8	2,92	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$
10	1,85	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$
12	0,61	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$

$J^{opt} = 1,9 \cdot 10^{-5}$  при  $M = 12$ , при котором маскировочная эффективность соответствующей оболочки ( $\Omega, \mathbf{k}^{opt}$ ) высока и близка к эффективности идеальной маскировочной оболочки. Сравнение значений  $J^{opt}$  (см. табл. 2, 3) показывает, что маскировочная эффективность проектируемой оболочки увеличивается с увеличением числа слоев  $M$  и отношения  $k_{\max}/k_{\min}$ , характеризующего различие материалов, из которых выполнены соседние слои. При этом вследствие использования природных материалов спроектированные маскировочные оболочки просты в технической реализации.

Указанная выше закономерность, заключающаяся в том, что оптимальные значения параметров всех слоев, кроме последнего, чередуются, принимая минимальное и максимальное из возможных значений, наблюдалась и при расчетах параметров других маскировочных оболочек. Это позволяет сводить решение задачи минимизации (2.5) к нахождению теплопроводности  $k_M$  последнего слоя. Данная закономерность позволяет значительно сократить вычислительные затраты при решении задач проектирования маскировочных оболочек и при этом сохранить простоту технической реализации.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов подтверждают принципиальную возможность создания универсальных маскировочных оболочек, значительно снижающих видимость материального тела для систем обнаружения, действие которых основано на регистрации внешних возмущений поля температуры. Для этого можно использовать как однослойные анизотропные оболочки с большим коэффициентом анизотропии, так и многослойные изотропные оболочки, составленные из оптимально подобранных однородных природных материалов. Оболочки второго типа обладают высокой маскировочной эффективностью и просты в реализации.

Предложенный алгоритм может быть использован при численном решении других важных обратных задач для различных моделей теплопереноса в твердых и жидких средах (в том числе задачи определения физических свойств материальных тел по результатам измерений внешнего поля температуры, задачи создания средств отвода тепла либо устройств искажения теплового образа объекта, задачи управления конвективными потоками тепла и ряда других).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Narayana S., Sato Y.** Heat flux manipulation with engineered thermal materials // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. 214303.
2. **Guenneau S., Amra C., Veynante D.** Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux // Optics Express. 2012. V. 20. 8207.
3. **Schittny R., Kadic M., Guenneau S., Wegener M.** Experiments on transformation thermodynamics: molding the flow of heat // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. 195901.

4. **Han T., Wu Z.-M.** Three-dimensional thermal cloak with homogeneous and nonsingular conductive materials // *Progr. Electromagnetic Res.* 2013. V. 143. P. 131–141.
5. **Han T., Qiu C.-W.** Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields // *J. Optics.* 2016. V. 18. 044003.
6. **Алексеев Г. В.** Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016.
7. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.
8. **Алифанов О. М.** Экстремальные решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. М.: Наука, 1988.
9. **Алексеев Г. В., Соболева О. В., Терешко Д. А.** Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // *ПМТФ.* 2008. Т. 49, № 4. С. 24–35.
10. **Алексеев Г. В., Левин В. А.** Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел // *Докл. АН.* 2016. Т. 471, № 1. С. 32–36.
11. **Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А.** Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // *Докл. АН.* 2017. Т. 472, № 4. С. 398–402.
12. **Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А.** Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // *Докл. АН.* 2017. Т. 476, № 5. С. 512–517.
13. **Poli R., Kennedy J., Blackwell T.** Particle swarm optimization: an overview // *Swarm Intel.* 2007. V. 1. P. 33–57.
14. **Kennedy J., Eberhart R.** Particle swarm optimization // *Proc. of the IEEE Intern. conf. on neural networks, Perth (Australia), Nov. 27 — Dec. 1, 1995.* Perth: Univ. Western Australia, 1995. P. 1942–1948.
15. **Ardakani M. D., Khodadad M.** Identification of thermal conductivity and the shape of an inclusion using the boundary elements method and particle swarm optimization algorithm // *Inverse Probl. Sci. Engng.* 2009. V. 17, N 7. P. 855–870.

*Поступила в редакцию 23/X 2018 г.,  
после доработки — 23/X 2018 г.  
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*

---