

ГЕНЕРАЦИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН РЕЛЬЕФОМ ДНА В ДВУХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ

1. Введение.

Влияние неровностей дна на горизонтальные течения стратифицированной жидкости может проявляться в виде существенно нелинейных эффектов, связанных с распространением длинных волн вверх по потоку и перестройкой течения, включающей при определенных условиях частичное или полное блокирование препятствием целой области течения [1, 2]. Несмотря на сложную волновую картину в окрестности препятствия, в ряде случаев основные особенности течения могут быть описаны уравнениями многослойной мелкой воды. В [3, 4] соответственно для двух- и многослойной мелкой воды даны подробное теоретическое описание возможных режимов течения, сравнение с экспериментами автора по движению препятствия в двухслойной покоящейся жидкости, а также классификация волн, распространяющихся вверх по потоку, и течений над препятствием в зависимости от параметров набегающего потока и высоты барьера. Численно эта задача исследована в [5]. По сравнению с аналогичной задачей о движении препятствия в однослойной жидкости [1, 6] не только усложняется волновая картина, но и появляются принципиально новые режимы течения. В [1, 3] экспериментально найдены стационарные режимы обтекания, при которых критическое и сверхкритическое течения перед препятствием переводятся в сверхкритическое за ним, оставаясь сверхкритическим всюду над барьером. При этом над самим препятствием и непосредственно за ним могут наблюдаться гидравлические прыжки и ямы, переводящие сверхкритическое течение снова в сверхкритическое. Такая ситуация внешне противоречит концепции контрольного сечения, общепринятой в гидравлике, в рамках которой при стационарном обтекании различные состояния до и после препятствия можно реализовать только в случае, когда перед барьером течение докритическое, над гребнем критическое, а позади сверхкритическое.

Цель настоящей работы — теоретическое исследование в рамках теории мелкой воды возможных режимов течения двухслойной жидкости в окрестности движущегося с постоянной скоростью препятствия и, в частности, обоснование возможности форсированного режима обтекания барьера, при котором над гребнем реализуется сверхкритическое течение. Другая особенность — более полная по сравнению с упомянутыми выше работами классификация течения, учитывающая начальный сдвиг скорости в слоях. В частности, для течений с ненулевым начальным сдвигом скорости найден сверхкритический режим обтекания, содержащий пару гидравлический прыжок — яма и характеризующийся резким изменением амплитуд волн при малых изменениях параметров течения. Последнее обстоятельство — источник гистерезиса, наблюдаемого в численных расчетах при выходе течения на тот или иной стационарный режим в зависимости от способа разгона обтекаемого тела в потоке. Причина гистерезиса отлична от аналогичного явления, отмеченного в [3]. Там перекрытие областей параметров, в которых реализуются различные типы обтекания (сверхкритическое и с отошедшим гидравлическим прыжком), связано с применением различных законов сохранения для течения жидкости над ровным дном и над барьером. В данной работе аналогично [7] используется единая система для описания двухслойного потенциального течения над неровным дном, а выбор законов сохранения, который сам по себе проблематичен для этого класса течений, обоснован в п. 2. Гистерезис же при выходе течения в окрестности тела на различные стационарные режимы при одних и тех же скоростях буксировки

связан прежде всего с немонотонной зависимостью параметров набегающего потока над препятствием от высоты этого препятствия и проявляется при форсированных режимах обтекания.

2. Уравнения двухслойной мелкой воды. В длинноволновом приближении уравнения двухслойной мелкой воды выводятся из предположений о гидростатичности давления и однородности распределения плотности и горизонтальной составляющей скорости по глубине из уравнений движения идеальной неоднородной жидкости [8].

В приближении Буссинеска при $(\rho^- - \rho^+)/\rho_0 \ll 1$ уравнения плоскопараллельного двухслойного течения жидкости под горизонтальной крышкой имеют вид

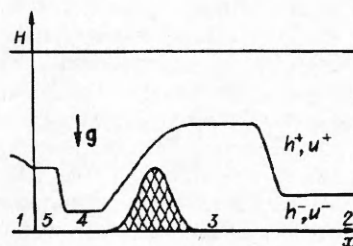
$$(2.1) \quad h_t^+ + (h^+ u^+)_x = 0, \quad h_t^- + (h^- u^-)_x = 0, \quad u_t^+ + u^+ u_x^+ + \frac{1}{\rho_0} p_x^+ = 0,$$

$$u_t^- + u^- u_x^- + b(h_x^- + z_x) + \frac{1}{\rho_0} p_x^+ = 0, \quad h^+ + h^- + z = H \equiv \text{const.}$$

Здесь h^+ , h^- — толщины, а u^+ , u^- — горизонтальные скорости верхнего и нижнего слоев; $p^+ = p$ — давление на верхней крышке; H — полная глубина канала; уравнение $z = z(t, x)$ задает положение дна канала (рис. 1); $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho_0$ отражает влияние плавучести на динамику слоев жидкости.

Система (2.1) существенно нелинейна. Поэтому даже из первоначально гладкого распределения толщин и скоростей слоев со временем вырабатываются решения с большими градиентами этих величин и гипотезы о гидростатичности распределения давления и плавном изменении параметров потока теряют смысл. Возникающие разрывные решения описывают такие наблюдаемые в реальной жидкости явления, как внутренние гидравлические прыжки и боры. Однако получить соотношения на разрывах, необходимые для определения положения и амплитуды скачка, в рамках двухслойной модели (2.1) не удастся, несмотря на то обстоятельство, что эта система обладает бесконечным числом законов сохранения, определяющих соотношения на разрыве однозначно. Наиболее применяем среди исследователей приближенный подход, предложенный в [9]. Он состоит в получении соотношений на скачке, основанных на предположении о гидростатическом распределении давления на границе раздела слоев внутри скачка. К недостаткам такого подхода относится невозможность нахождения обобщенного (разрывного) решения системы (2.1) без выделения линий разрыва, так как условиям на разрыве не соответствует никакой набор законов сохранения. Кроме того, при определенных условиях полученные соотношения приводят к нефизическому перераспределению энергии в движущихся слоях. Другой подход предложен в [10]. В качестве базисного набора законов сохранения используются законы сохранения массы, полного импульса и энергии в одном из слоев. Несимметричность в выборе законов сохранения основывается на том факте, что при определенных условиях (например, один слой много тоньше другого) область перемешивания, возникающая в скачке, может распространиться до дна и соответственно потери энергии в скачке будут относиться к такому слою. Обзор экспериментальных и теоретических работ по анализу структуры волн в двухслойном течении, возникающих при обтекании препятствия, можно найти в [6].

Основное противоречие в модели двухслойного течения, связанное с невозможностью одновременно удовлетворить законам сохранения массы, импульса и энергии, разрешается переходом к трехслойной модели [11]. В качестве третьего слоя фигурирует прослойка, образованная в результате переме-



Р и с. 1

шивания и интенсивного волнового движения на границе раздела однородных слоев. Анализ решений этой системы, состоящей из законов сохранения массы в каждом из слоев, энергии в верхнем и нижнем однородных слоях, полного импульса и полной энергии (включающей мелкомасштабную составляющую кинетической энергии в прослойке), дает реальную картину движения слоев с учетом перемешивания. В частности, эта модель описывает условия перехода слоя смешения в затопленную струю, и система уравнений редуцируется к системе законов сохранения, использованной в [10]. Трудность анализа полной системы уравнений трехслойного течения вызвана не только большим количеством нелинейных уравнений, но и неоднородностью уравнений, связанной с учетом процесса турбулентного вовлечения в прослойку жидкости из однородных слоев. Поэтому для полноты картины необходимо учесть сначала более простые предельные случаи.

Одним из таких пределов являются уравнения двухслойного течения, полученные при стремлении толщины прослойки к нулю. Система уравнений при этом состоит из законов сохранения массы и энергии в однородных слоях. И хотя ее следует рассматривать как приближенную, так же как и упомянутую выше, но она имеет дивергентную форму, существенно упрощает анализ волновой картины и, как будет показано ниже, описывает экспериментально наблюдаемые режимы течения в задаче об обтекании препятствия нестационарным потоком двухслойной жидкости. В п. 3 приведены основные свойства автомодельных решений такой системы, исследованной в [12] на примере задачи о распаде произвольного разрыва.

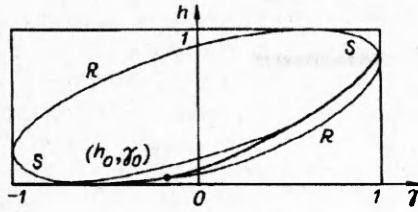
3. Задача о распаде произвольного разрыва. Удобно перейти к безразмерным переменным $h^{\pm} \rightarrow h^{\pm}/H$, $z \rightarrow z/H$, $u^{\pm} \rightarrow u^{\pm}/\sqrt{bH}$, $p \rightarrow p/\rho_0 bH$, т.е. положить в (2.1) $H = 1$, $b = 1$, $\rho_0 = 1$. В канале с ровным дном ($z(t, x) \equiv 0$) расход $Q = h^+ u^+ + h^- u^-$ не зависит от x . Без ограничения общности можно получить $Q \equiv 0$ переходом в соответствующую систему координат. Поэтому для переменных $h = h^-$ и $\gamma = u^- - u^+$ система (2.1) приобретает вид ($0 \leq h \leq 1$)

$$(3.1) \quad h_t + (h(1-h)\gamma)_x = 0, \quad \gamma_t + \left(\frac{1}{2}(1-2h)\gamma^2 + h \right)_x = 0.$$

Система (3.1) записана в дивергентной форме, что позволяет определить движение с разрывами. Соответствующие законы сохранения являются законами сохранения массы каждого из слоев и потенциальности течения при переходе через область с резкими изменениями величин в потоке. Как было отмечено выше, сохранение полного импульса обеспечивается перестройкой течения в окрестности прослойки, толщина которой считается малой и в данной модели не учитывается. Структуру разрывных решений для системы (3.1) можно рассмотреть на примере задачи Коши со ступенчатыми начальными данными (задачи о распаде произвольного разрыва)

$$(3.2) \quad (h(0, x), \gamma(0, x)) = \begin{cases} (h_1, \gamma_1), & x < 0, \\ (h_2, \gamma_2), & x > 0. \end{cases}$$

Разрешимость задачи (3.1), (3.2) изучена в [12], где, в частности, доказано, что для начальных данных из области гиперболичности $\Omega = \{(h, \gamma): 0 < h < 1, |\gamma| < 1\}$ системы (3.1) существует единственное решение задачи (3.1), (3.2) со значениями (h, γ) в Ω , содержащее конечное число центрированных простых волн и линий разрыва. Под центрированной простой волной понимается непрерывное решение, зависящее от комбинации переменных $\xi = x/t$. На линиях разрыва 1-го рода выполнены дополнительные условия устойчивости, обеспечивающие единственность и непрерывную зависимость решений от начальных данных. Так как аналогично уравнениям однослойной мелкой воды и газовой динамики задача о распаде произвольного разрыва позволяет судить об особенностях решений задачи Коши с произвольными начальными данными, есть смысл остановиться на ней подробнее.



Р и с. 2

Уравнения характеристик системы (3.1)

$$dx/dt = \lambda^{\pm} = (1 - 2h)\gamma \pm \sqrt{h(1-h)(1-\gamma^2)}$$

показывают, что эта система имеет гиперболический тип при $(h, \gamma) \in \Omega$. В инвариантах Римана

$$S = (1 - 2h) - 2\sqrt{h(1-h)(1-\gamma^2)},$$

$$R = (1 - 2h) + 2\sqrt{h(1-h)(1-\gamma^2)}$$

уравнения (3.1) приобретают вид

$$(3.3) \quad S_t + \lambda^- S_x = 0, \quad R_t + \lambda^+ R_x = 0.$$

На плоскости годографа (h, γ) отображением характеристик в силу (3.3) являются эллипсы Λ_r , задаваемые уравнением

$$(\gamma + r(2h - 1))^2 + (1 - r^2)(2h - 1)^2 = 1 - r^2 \quad (r^2 < 1)$$

и вписанные в прямоугольник гиперболичности Ω (рис. 2), причем участки с положительным наклоном соответствуют S -волне ($S \equiv \text{const}$), а с отрицательным — R -волне ($R \equiv \text{const}$). Из законов сохранения (3.1) следует, что на линиях разрыва с уравнением $D_s = dx/dt$ выполнены соотношения

$$(3.4) \quad D_s[h] = [h(1-h)\gamma], \quad D_s[\gamma] = \left[\frac{1}{2}(1-2h)\gamma^2 + h \right].$$

Здесь $[f] = f(t, x(t) - 0) - f(t, x(t) + 0)$. Разрыв распространяется влево (1-го типа), если $[h][\gamma] < 0$, и вправо (2-го типа), если $[h][\gamma] > 0$. Соотношения (3.4) могут быть представлены как

$$(3.5) \quad \frac{\gamma - \gamma_n}{\sqrt{1 - \gamma_n^2}} = \pm \frac{h - h_0}{\sqrt{\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h_0 - hh_0}}.$$

Из (3.4), (3.5) зависимости $\gamma = \gamma^{\pm}(h; h_0, \gamma_0)$, $D_s = \sigma(h, \gamma; h_0, \gamma_0)$ находятся в явном виде. Если (h_0, γ_0) — состояние перед волной, то для разрывов 1-го типа функция $\gamma = \gamma^-(h; h_0, \gamma_0)$ убывает с возрастанием h , а для разрывов 2-го типа функция $\gamma = \gamma^+(h; h_0, \gamma_0)$ возрастает по h . Скачок со значениями (h^+, γ^+) и (h^-, γ^-) справа и слева от разрыва является устойчивым, если выполнены неравенства

$$(3.6) \quad D_s = \sigma(h^+, \gamma^+; h^-, \gamma^-) \leq \sigma(h, \gamma^-(h; h^-, \gamma^-)),$$

$$D_s = \sigma(h^+, \gamma^+; h^-, \gamma^-) \geq \sigma(h, \gamma^+(h; h^+, \gamma^+))$$

при $(h^+ - h)(h^- - h) \leq 0$ для разрывов 1-го и 2-го типа соответственно. Следует отметить, что в отличие от работ (см., например, [3]), в которых устойчивость разрывов связывалась с убыванием полной энергии на скачке, условие (3.6) не требует привлечения дополнительного закона сохранения и выражает свойство монотонного возрастания скорости разрыва от его амплитуды.

Автомодельное решение задачи (3.1), (3.2) может быть найдено аналогично уравнениям газовой динамики [13] из пересечения волновых адиабат в Ω . Под волновой адиабатой 1-го или 2-го типа понимается гладкая кривая

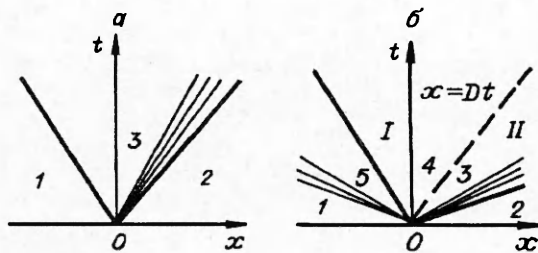


Рис. 3

но возрастающая адиабата 2-го типа. Причем волновая адиабата состоит из участка ударного перехода, начинающегося в точке (h_0, γ_0) , и двух участков простых волн, примыкающих к нему с двух сторон. Примыкание происходит в точках (h, γ) , где выполнено условие $d\sigma/dh = 0$. В этих точках скорость характеристик соответствующего семейства $\lambda^\pm(h, \gamma)$ совпадает со скоростью разрыва $\sigma(h, \gamma; h_0, \gamma_0)$, и к разрыву гладко примыкает простая волна (см. рис. 2). Если начальные состояния (h_i, γ_i) ($i = 1, 2$) в (3.2) принадлежат одному эллипсу $\Lambda_r (r^2 < 1)$, то волновая адиабата 1-го типа, проходящая через точку (h_1, γ_1) , и волновая адиабата 2-го типа, проходящая через точку (h_2, γ_2) , как показано в [12], имеют в Λ_r единственную точку пересечения. Поэтому соответствующее автомодельное решение задачи (3.1), (3.2) состоит из двух волн, обращенных влево и вправо и центрированных в точке $(0, 0)$ (рис. 3, а). Каждая из этих волн представляет собой либо комбинацию, состоящую из устойчивого разрыва, распространяющегося по невозмущенному состоянию 1 или 2, и следующей за ним центрированной простой волны, либо только устойчивый ударный переход или центрированную волну.

Если же не найдется такого значения $r (|r| \leq 1)$, что $(h_i, \gamma_i) \in \Lambda_r$ для $i = 1, 2$, но $(h_i, \gamma_i) \in \Omega$, то решение задачи (3.1), (3.2) существует, но выходит на границу квадрата Ω , что по аналогии с уравнениями газовой динамики означает появление в решении областей "вакуума", т.е. вырождения гиперболичности. Аналогия усиливается тем обстоятельством, что заменой переменных уравнения (3.1) могут быть сведены к уравнениям политропного газа с показателем адиабаты, равным 2 [8].

Наличие максимально возможной скорости распространения длинноволновых возмущений σ_{\max}^\pm приводит к качественно новым по сравнению с однослойной жидкостью особенностям генерации и распространения волн в двухслойной системе. Эти особенности будут проиллюстрированы ниже на примере задачи об обтекании препятствия потоком двухслойной жидкости.

4. Двухслойные течения над препятствием. Если дно канала не является плоским ($z(t, x) \neq 0$), то автомодельных решений системы (2.1) нет. Однако если внешние параметры, характеризующие задачу, фиксированы, а форма дна и скорость его деформации постоянны ($z = z_0(x - Dt)$, $D \equiv \text{const}$), то при больших временах решение системы (2.1) выходит на автомодельный режим. При этом над препятствием реализуется близкий к стационарному режим обтекания. Данное обстоятельство можно использовать для формулировки задачи об обтекании препятствия двухслойной жидкостью в классе автомодельных решений.

Пусть при $t = 0$ препятствие малой длины начинает двигаться в двухслойной жидкости по дну канала с постоянной скоростью D . Впереди и позади препятствия в результате движения возникают возмущения, которые можно считать центрированными в точке $(0, 0)$ плоскости (x, t) , если пренебречь длиной препятствия по сравнению с масштабом волн. В такой постановке можно воспользоваться структурой автомодельных решений, изученной в п. 3, для построения течения в целом. При этом по сравнению с задачей (3.1), (3.2) увеличивается число возможных конфигураций. Движение препятствия генерирует волны только в случае, когда состояния потока впереди и позади

на плоскости (h, γ) с уравнением $\gamma = w^\pm(h; h_0, \gamma_0)$, проходящая через точку (h_0, γ_0) и состоящая из участков простых R - или S -волн и устойчивых ударных переходов соответствующего типа. В [12] показано, что через каждую точку (h_0, γ_0) проходят единственная монотонно убывающая адиабата 1-го типа и монотонно

него различны. Поэтому на плоскости (x, t) появляется новая по сравнению с решением (3.1), (3.2) линия разрыва $x = Dt$, соответствующая траектории движения тела (рис. 3,б). Соотношения на этом разрыве, полученные из анализа возможных стационарных режимов течения над препятствием, связывают область $I(x < Dt)$ за телом и область $II(x > Dt)$ перед ним. Термины за и перед пока условные, так как состояния 1 и 2 равноправны. Однако области I и II не являются равноправными. Как будет показано ниже, из анализа условий на разрыве $x = Dt$ при некоторых параметрах задачи течение в одной из областей, например в области II , может быть определено независимо от состояния 1. При этом полученное решение однозначно определяет состояние за разрывом $x = Dt$, и далее решение находится в области I . Это возможно в том случае, когда на линию $x = Dt$ характеристики 1-го типа приходят из области II , а характеристики 2-го типа с этой линии выходят в область II , т.е. в II решается смешанная задача, в которой состояние перед препятствием докритическое по отношению к нему. В области I состояние за препятствием сверхкритическое, т.е. характеристики двух типов выходят с линии $x = Dt$ в эту область, и, следовательно, в I решается задача Коши, полностью аналогичная задаче (3.1), (3.2).

Для решения вопроса, в какой из областей (I или II) реализуется докритический режим обтекания препятствия, надо определить направление движения тела в двухслойной жидкости. Будем говорить, что область расположена вверх по потоку, если скорость движения жидкости в слое, в который погружено тело (в данном случае нижний слой), меньше скорости самого тела. Далее, движение тела в двухслойной жидкости контролирует течение вверх по потоку, если перед препятствием реализуется докритический режим обтекания, а за ним — сверхкритический. Условием, обеспечивающим контроль вверх по потоку, является возможность существования стационарного относительно препятствия течения двухслойной жидкости, переводящего докритическое течение в сверхкритическое. Для отыскания дополнительных соотношений, обеспечивающих такой переход, рассмотрим стационарное обтекание препятствия в системе координат, движущейся вместе с телом.

5. Стационарное течение над препятствием. Пусть для определенности тело движется вправо, т.е. $u_c^- < D$, где индекс c означает состояние потока над гребнем препятствия ($z'(x_c) = 0$, рис. 1). Уравнения (2.1) дают следующие интегралы для стационарного обтекания:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} h(u^- - D) &= h_3(u_3^- - D) = Q^-, \\ (1 - h - z)(u^+ - D) &= (1 - h_3)(u_3^+ - D) = Q^+, \\ \frac{1}{2}(u^- - D)^2 + h + z + p^+ &= \frac{1}{2}(u_3^- - D)^2 + h_3 + p_3^+ = J^-, \\ \frac{1}{2}(u^+ - D)^2 + p^- &= \frac{1}{2}(u_3^+ - D)^2 + p_3^+ = J^+. \end{aligned}$$

Непрерывное решение (5.1), связывающее докритическое и сверхкритическое состояния 3 и 4, возможно только в случае, когда выполнено условие критичности течения над вершиной препятствия:

$$(5.2) \quad \Delta_c = \frac{(u_c^- - D)^2}{h_c} + \frac{(u_c^+ - D)^2}{1 - h_c - z_c} - 1 = 0.$$

При этом перед препятствием $\Delta_3 < 0$, а за ним $\Delta_4 > 0$. Условия (5.1) и (5.2) дают для заданного значения $\delta = z_{\max}$ дополнительное соотношение между h_3 и u_3 , необходимое для однозначного построения решения смешанной задачи в области перед препятствием. Сверхкритичность состояния 4 за препятствием означает, что $u_4^\pm < D$, и малые возмущения из области I не достигают препятствия. Однако в области I соответствующее автомодельное решение может содержать разрывы, распространяющиеся со скоростью,

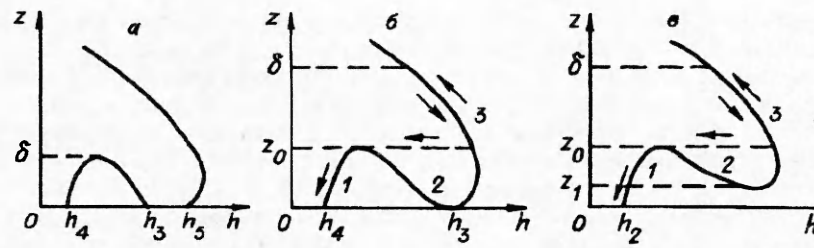


Рис. 4

превышающей D , и течение становится несовместным. В этом случае препятствие затоплено и не может контролировать течение вверх по потоку, так что реализуется другой (полностью докритический) режим обтекания, а решение задачи (3.1), (3.2) совпадает с автомодельным решением этой же задачи над ровным дном, рассмотренной в п. 4. Так как определить условия затопления препятствия можно только после построения решения в области II перед препятствием, то дальнейший анализ будет посвящен исследованию множества допустимых значений параметров задачи, при которых данное препятствие контролирует течение вверх по потоку.

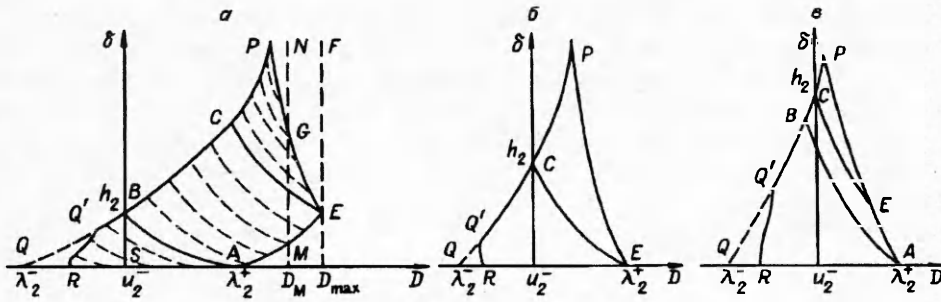
Плоскость (D, δ) . Безразмерными параметрами, характеризующими препятствие, являются D и $\delta = z_{\max}$. Поэтому удобно представить возможные конфигурации волн, возникающие в области II , на плоскости параметров (D, δ) . При этом полученная картина будет зависеть от начального состояния (h_2, γ_2) . Для $\gamma_2 = 0$ (оба слоя в невозмущенном состоянии покоятся) конфигурации волн перед препятствием подробно исследованы в [3]. Однако полученная в [3] диаграмма режимов течения существенно сложнее представленной ниже (ср. рис. 8 в [3] с рис. 5). Это обстоятельство связано с применением в [3] различных законов сохранения для течения двухслойной жидкости над препятствием и над ровным дном. В качестве соотношений на разрывах над ровным дном использованы приближенные законы сохранения горизонтального импульса в каждом из слоев, а над препятствием в стационарных движениях сохраняется полный напор в каждом из слоев. Поэтому область параметров на плоскости (D, δ) (плоскость (F_{10}, H) в [3]), для которой реализуется полностью сверхкритический режим обтекания препятствия, и область, в которой препятствие контролирует течение вверх по потоку, пересекаются, и появляется возможность гистерезиса, т.е. зависимость картины обтекания для значений (D, δ) из области пересечения от способа разгона тела при выходе его на стационарный режим. Для уравнений (3.1) границы указанных выше областей совпадают, и гистерезис, связанный с несовместимостью полных законов сохранения импульса и энергии, отсутствует. Однако сохраняется зависимость от предыстории движения тела при форсированном режиме обтекания, который рассмотрен ниже.

Для построения на плоскости (D, δ) области, в которой для данных начальных значений (h_2, γ_2) препятствие контролирует течение вверх по потоку, достаточно рассмотреть волну произвольной амплитуды, распространяющуюся вправо, и найти для нее все значения параметров (D, δ) , при которых препятствие ее поддерживает. Варьируя все допустимые значения для амплитуд волн, распространяющихся вправо, получаем искомую область. Пусть $\gamma = \gamma^+(h; h_2, \gamma_2)$ — уравнение волновой адиабаты 2-го типа. Если задано значение h_3 из области определения этой адиабаты, то фиксировано состояние (h_3, γ_3) , $\gamma_3 = \gamma^+(h_3; h_2, \gamma_2)$ за фронтом этой волны (рис. 3, б).

Состояние (h_3, γ_3) является докритическим относительно препятствия, движущегося со скоростью D , при выполнении неравенств

$$\lambda^-(h_3, \gamma_3) < D < \lambda^+(h_3, \gamma_3).$$

Зависимость $z = z(h)$, вытекающая из соотношений (5.1) над препятствием, изображена на рис. 4, а. Так как значение h_3 соответствует докритическому



Р и с. 5

состоянию, можно показать, что в этой точке $dz/dh < 0$, и поэтому существуют еще два корня h_4, h_5 уравнения $z(h) = 0$ такие, что $h_4 < h_3 < h_5$, $\frac{dz}{dh}|_{h=h_4} > 0$, и, следовательно, состояние 4 является сверхкритическим.

Непрерывное решение уравнений (5.1) может соединять только состояния 3 и 4, причем при условии, что параметр δ выбран так, что $\delta = \max_{h \in [h_4, h_3]} z(h)$

(рис. 4, а). Для того чтобы обосновать это утверждение, достаточно заметить, что в силу (5.1) зависимость $z = z(h)$ определяется уравнением

$$P(h, z) = \frac{1}{2} \frac{(Q^-)^2}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(Q^+)^2}{(1-h-z)^2} + h + z - J_- + J_+ = 0$$

и производная dz/dh находится из соотношения

$$\left(1 - \frac{(Q^+)^2}{(1-h-z)^3}\right) \frac{dz}{dh} = \frac{(Q^-)^2}{h^3} + \frac{(Q^+)^2}{(1-h-z)^3} - 1 = \Delta.$$

Так как $\Delta|_{h=h_3} < 0$, то для корня h_4 такого, что $h_4 < h_3$, знаки выражений Δ и dz/dh при $h = h_4$ совпадают и состояние 4 сверхкритическое.

В случае, когда вправо распространяется только устойчивый разрыв ($\lambda^+(h_3, \gamma_3) > \sigma(h_3, \gamma_3; h_2, \gamma_2)$), дополнительное ограничение состоит в условии $D < \sigma(h_3, \gamma_3; h_2, \gamma_2)$, обеспечивающем возможность существования конфигурации, изображенной на рис. 3, б.

Область $ARQ'PE$ параметров на плоскости (D, δ) , для которых течение справа от препятствия контролируется этим препятствием, изображена на рис. 5, а для начального состояния $h_3 = 0,26$, $\gamma_3 = -0,8$. Конфигурация качественно совпадает с соответствующей диаграммой, полученной в [3, рис. 8]. Кривая PQ отвечает тем значениям параметров (D, δ) , при которых происходит полное блокирование нижнего слоя ($D = u_3^-, \delta = h_3$), и выше этой кривой вершина барьера находится в верхнем слое. Таким образом, волна, распространяющаяся вверх по потоку, уже не зависит от высоты препятствия. Уравнение кривой PQ задается при помощи волновой адиабаты $\gamma = \gamma^+(h; h_2, \gamma_2)$ следующим образом (в системе координат такой, что полный расход $hu^- + (1-h)u^+ = 0$):

$$D = u_3^- = (1-\delta)\gamma^+(\delta; h_2, \gamma_2).$$

Область $ABCE$ соответствует значениям параметров, при которых перед препятствием распространяется устойчивый разрыв (внутренний бор), движущийся со скоростью $\sigma > D$. Штриховой линией обозначено множество пар (D, δ) , отвечающих фиксированному состоянию (h_3, γ_3) за разрывом. Из условий устойчивости (3.6) при $D < D_{\max}$ выполнено неравенство $\sigma < \lambda^+(h_3, \gamma_3)$, так что на предельной кривой AE скорость движения препятствия совпадает со скоростью разрыва $\sigma = D$. При этом зависимость $z = z(h)$ над препятствием такая же, как и внутри области (рис. 4, а). Для

точек плоскости (D, δ) , расположенных выше линии EC , соответствующей значениям (h_3, γ_3) для бора с максимальной амплитудой и скоростью $\sigma = D_{\text{max}}$, распространяющаяся вправо волна состоит из бора максимальной амплитуды и примыкающей к нему простой волны. Поэтому вступает в силу ограничение $D < \lambda^+(h_3, \gamma_3)$. Равенство достигается на линии PE . В этом случае перед препятствием поток критический, зависимость $z = z(h)$ над препятствием изображена на рис. 4,б. Область ABQ отвечает волнам с $h_3 < h_2$. Эта область в [3] отсутствует, так как там решается задача, аналогичная задаче (3.1), (3.2), но со специальными начальными данными $h_1 = h_2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, и решение системы (3.1) в области I не допускает существования течения с отошедшей волной разрежения. Препятствие затоплено, и в области ABS реализуется отмеченный в [3] полностью докритический режим обтекания.

Таким образом, в области $AQPE$ возможны те же основные режимы течения, при которых осуществляется контроль препятствием течения вверх по потоку, что и отмеченные в работе [3], — режимы 3С, 4С. Так, области $ABCE$ соответствует режим 3С с устойчивым разрывом, а области CPE — режим 4С, в котором за разрывом следует центрированная S -волна.

При увеличении начальной глубины h_2 нижнего слоя сокращается область $ABCE$ из-за уменьшения максимальной амплитуды устойчивых ударных волн, распространяющихся перед препятствием. При $h_2 = 0,5, \gamma_0 = 0$ эта область отсутствует (рис. 5,б). При дальнейшем увеличении h_2 устойчивые разрывы возможны только при $h_3 < h_2$ (волны понижения) и область $ABCE$ занимает положение, показанное на рис. 5,в для $h_0 = 0,8, \gamma_0 = 0$.

Условие докритичности потока $\lambda^-(h_3, \gamma_3) < D < \lambda^+(h_3, \gamma_3)$ при достаточных малых значениях h_3 вступает в противоречие с условием полного блокирования нижнего слоя $h_3 = \delta, u_3^- = D$ на кривой PQ . Поэтому возникает линия RQ' с $D = \lambda^-(h_3, \gamma_3)$, ограничивающая область состояний $ARQ'PE$, для которых препятствие контролирует течение вверх по потоку (рис. 5,а).

Начальный сдвиг скорости $\gamma_2 \neq 0$ не меняет принципиально расположение соответствующих областей на плоскости (D, δ) , хотя некоторые особенности течения в окрестности препятствия становятся более выраженными. Так, немонотонная зависимость $z = z(h)$ над препятствием при $D > D_{\text{max}}$ приводит к резкой перестройке картины обтекания при малых изменениях параметров течения и явлению гистерезиса. Эти вопросы обсуждаются ниже при изучении критического и сверхкритического режимов обтекания (режимы E и F [3]).

6. Критический режим обтекания. Как было отмечено выше, для значений параметров (D, δ) вне области $AEPQ$ (рис. 5,а) автомодельных решений таких, что препятствие контролирует течение вверх по потоку, не существует, и, вообще говоря, в этом случае должен реализовываться режим сверхкритического обтекания. Однако эксперименты показывают ([3], режимы 4Е, 5Е), что в области PEF критическое течение перед препятствием переводится в сверхкритическое за ним. При этом над препятствием течение сверхкритическое, а позади возникает гидравлический прыжок, уменьшающий глубину нижнего слоя. Для того чтобы объяснить возникновение такой конфигурации, рассмотрим движение препятствия со скоростью $D_M < D_{\text{max}}$ (рис. 5,а). Для данной высоты δ соответствующее состояние на плоскости (D, δ) изображается точкой на прямой MN . Если эта точка расположена под кривой AE , то режим обтекания сверхкритический. В области $ABPE$ отошедшая волна контролируется препятствием (режимы 3С и 4С [3]). В точке G пересечения кривой PE с прямой MN достигается максимально возможная амплитуда волны, и течение перед препятствием становится критическим, т.е. $D = \lambda^+(h_3, \gamma_3)$. На плоскости (h, z) кривая $z = z(h)$ касается в точке h_3 оси абсцисс (рис. 4,б) и величина δ равна значению локального максимума z_0 этой кривой. Дальнейшее возрастание высоты δ не приводит к изменению

состояния (h_3, γ_3) . Поэтому параметры потока над передним склоном препятствия соответствуют движению точки (h, z) вдоль сверхкритической кривой 3 до уровня $z = \delta$.

В принципе вдоль обратного склона решение может вернуться вдоль этой же кривой в исходную точку, т.е. может реализоваться полностью сверхкритический режим обтекания. Однако из-за наличия локального максимума на кривой $z = z(h)$ в стационарном решении возможен переход со сверхкритической ветви 3 на сверхкритическую же ветвь 1 в гидравлическом прыжке. Причем единственным скачком, удовлетворяющим условиям устойчивости (3.6), является переход с ветви 3 в критическое состояние, соответствующее точке максимума кривой $z = z(h)$.

Эксперименты и численный расчет нестационарного движения показывают, что реализуется именно этот режим обтекания. Строго говоря, его нельзя считать стационарным, так как $\Delta(z_0) = 0$, и в окрестности критической точки $x = x_c$ над обратным склоном ($z'(x_c) > 0$) производные решения в силу (5.1) не ограничены. Это обстоятельство может приводить к колебаниям положения скачка относительно препятствия, причем амплитуда колебаний должна уменьшаться для более протяженных препятствий, и скачок можно считать квазистационарным. Конечно, в рамках стационарной картины течения нельзя отдать предпочтение одному из указанных выше решений, и адекватный выбор можно сделать с учетом начального нестационарного этапа при выходе течения на автомодельный режим. С этим же обстоятельством связано явление гистерезиса, которое можно реализовать при движении препятствия высотой $\delta = z_0$ в зависимости от того, вырабатывается ли в силу начальных условий докритический режим обтекания препятствия по ветви 2 или сверхкритический по ветви 3. Аналогичные вопросы, связанные с неединственностью режимов обтекания, обсуждаются в следующих пунктах более подробно для движения тела со скоростью $D > D_{\max}$.

7. Сверхкритическое обтекание. В рассматриваемой двухслойной системе существует максимальная скорость распространения возмущений D_{\max} . Поэтому при $D > D_{\max}$ течение перед препятствием невозмущенное и, так как $D_{\max} > \lambda^+(h_2, \gamma_2)$, сверхкритическое относительно движущегося тела, следовательно, возможен только сверхкритический режим обтекания, при котором состояния перед и за препятствием совпадают. Однако над телом картина течения может быть весьма интересной, и стоит остановиться на этом случае подробнее. При скоростях D , незначительно превышающих D_{\max} , гидравлический прыжок максимальной амплитуды "наезжает" на тело и останавливается на определенной высоте на переднем склоне. Соответствующая зависимость $z = z(h)$ показана на рис. 4, в. Ветви 1 и 3 сверхкритические, 2 докритическая. Для препятствия высотой $\delta < z_0$ течение симметрично относительно тела и является сверхкритическим. При $\delta > z_0$ непрерывного решения не существует, так как ветвь 2 соответствует докритическому течению и непрерывный переход с ветви 1 на ветвь 3 ни на переднем, ни на обратном склонах препятствия невозможен. Но аналогично рассмотренному в п. 6 случаю существует разрывное решение, содержащее пару скачков, переводящих сверхкритическое течение в критическое. Картина обтекания на плоскости (h, z) показана на рис. 4, в. Стрелки справа от кривых отвечают течению на переднем склоне, а слева — на обратном склоне препятствия. На переднем склоне сверхкритический поток поднимается на высоту z_1 , затем следует гидравлический прыжок, переводящий поток в критическое состояние на ветвь 3, далее — сверхкритическое течение вдоль ветви 3 до значения $z = \delta$. На обратном склоне на уровне z_0 скачок переводит поток на ветвь 1, по которой он возвращается в начальное состояние 2. К построенному решению также применимы замечания из п. 6 о неограниченности производных на уровнях $z = z_0$ и $z = z_1$ и квазистационарности скачков. С точки зрения управления потоком при движении тела такой режим течения должен быть отнесен к сверхкритическому, поскольку состояния

3

потока до и после препятствия совпадают. Но течение несимметрично и содержит пару гидравлический прыжок — яма, так что этот режим течения стоит выделить в особый класс. Так как такое течение локализовано в окрестности препятствия и не возмущено во внешней области, то оно является хорошим тестом для проведения нестационарных численных расчетов, а также может быть получено экспериментально. Следует также отметить, что аналогично рассмотренному выше критическому режиму обтекания при увеличении высоты препятствия происходит резкая смена режимов течения при переходе через значение $z_{\max} = z_0$ и при уменьшении высоты при переходе через значение $z_{\max} = z_1$. Полученный гистерезис более выражен, чем для случая критического обтекания, и может приводить к неединственности картины обтекания, а также резким нестационарным изменениям течения при плавном изменении параметров задачи. Заметим, что с дальнейшим возрастанием скорости препятствия D зависимость $z = z(h)$ становится монотонной, а течение — симметричным. Возможность выхода на различные асимптотики решения при больших временах может быть изучена на основании численной реализации нестационарной задачи. В п. 8 приведены результаты численных расчетов, касающихся в основном вопросов неединственности режима стационарного обтекания препятствия.

8. Нестационарные течения двухслойной жидкости. При анализе автомодельных решений задачи об обтекании движущегося со скоростью D тела потоком двухслойной жидкости был использован целый ряд допущений. Основные из них: предположения о достаточно быстром выходе течения на автомодельный режим, стационарность течения над препятствием, реализация условия набегания на тело потока в том слое, в котором движется тело ($u^- < D$), а также контроль телом течения вверх по потоку в нормальном и форсированном режимах обтекания. Выполнимость каждого из этих допущений может быть установлена из асимптотики решений нестационарной задачи. Из-за нелинейности уравнений прямой анализ затруднителен, однако численный расчет позволяет подтвердить или опровергнуть те или иные гипотезы.

На основе консервативной разностной схемы для уравнений (2.1) с законами сохранения (3.1) была решена задача о движении в двухслойной жидкости препятствия вдоль горизонтального дна. Для различных способов разгона тела на начальном участке при выходе на стационарный режим буксировки были получены все основные режимы течения, обнаруженные экспериментально и теоретически из анализа автомодельных решений, в частности выход на критический и сверхкритический режимы обтекания в соответствующей области параметров задачи. Следует отметить, что в расчетах использовалась схема сквозного счета без выделения разрывов, аналогичная схеме С.К. Годунова, приведенной в [13]. Поэтому условия устойчивости (3.6) не могли использоваться при построении численного алгоритма, однако принцип устойчивости разрывов по отношению к их разбиению на серию волн меньшей амплитуды, эквивалентный (3.6) и присущий таким разностным схемам, приводил к естественному отбору только устойчивых разрывов в численном решении.

Особый интерес представляет численный расчет форсированных режимов течения, отвечающих критическому и сверхкритическому обтеканию препятствия, так как течение над препятствием имеет весьма тонкую структуру и, строго говоря, не является стационарным. Расчеты показывают, что и в этом случае волновая картина течения быстро выходит на асимптотику, устойчива по отношению к возмущениям набегающего потока. На рис. 6,а приведена картина обтекания препятствия для значений параметров (D, δ) из области PEF , отвечающей критическому режиму $E4$ из [3]. Прерывная волна понижения расположена на обратном склоне препятствия, состояние потока перед препятствием критическое, а над препятствием сверхкритическое, что соответствует стационарному решению, рассмотренному выше и переводящему состояние 3 в 4 (рис. 4,б). На рис. 6,б представлен расчет сверхкритического обтекания препятствия, содержащего пару прыжок —

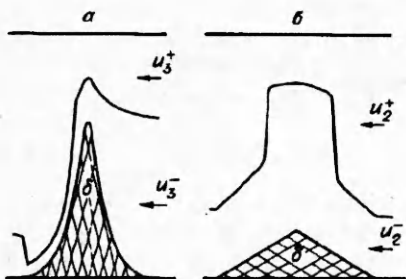


Рис. 6

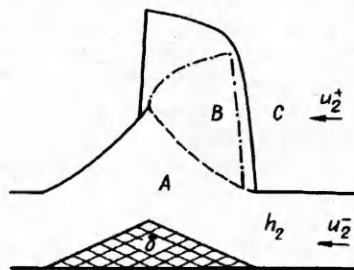


Рис. 7

яма. Заметим, что наиболее выражен этот режим течения при значениях $h_0 \sim 0,26$, $\gamma_0 \sim -0,8$, $D = 0,36$, $\delta = 0,2$, т.е. экспериментально его проще обнаружить при буксировке препятствия в двухслойной системе с начальным сдвигом скорости в слоях. Последнее решение является прекрасным тестом для проверки численного алгоритма, так как представляет собой сверхкритическое несимметричное течение с большими градиентами, для которого постановка граничных условий не вызывает затруднений.

Как было отмечено выше, при значениях высоты препятствия δ из интервала (z_1, z_0) стационарное решение определено неоднозначно. Так, при $\delta = z_0$ решение на переднем склоне волны может соответствовать докритической ветви 2 или сверхкритическим ветвям 1, 3 кривой $z = z(h)$ (рис. 4, б, в). На рис. 7 приведена картина обтекания треугольного препятствия, движущегося со скоростью $D = 0,35$ в потоке с начальным сдвигом скорости $\gamma_0 = -0,8$ и глубиной нижнего слоя $h_0 = 0,26$, для случая $\delta = z_0 = 0,15$. Прямолинейные образующие тела более удобны для определения местоположения скачков над препятствием. Значения определяющих параметров выбраны так, чтобы режим буксировки соответствовал точке E на плоскости (D, δ) (рис. 5, а). Так как для этой точки $D = D_{\text{max}}$, а $\delta = z_0$, то из решения автомодельной задачи можно найти три различных асимптотических предела в задаче о нестационарном разгоне тела и выходе его на стационарный режим буксировки. Все три режима течения могут быть реализованы в численном расчете. Так, при быстром разгоне барьера (безразмерное время $t \sim 5$) до скорости $D = D_{\text{max}}$ устанавливается сверхкритическое симметричное течение (штриховая линия на рис. 7), отвечающее кривой 1 на рис. 4, б. При плавном разгоне барьера ($t \sim 300$) впереди тела успевает сформироваться отошедший гидравлический прыжок, который при достижении телом скорости $D = D_{\text{max}}$ "садится" на препятствие (штрихпунктирная линия на рис. 7), и на переднем склоне докритическое течение соответствует кривой 2, а на обратном склоне сверхкритическое течение — кривой 1 (рис. 4, б).

Численно реализовать несимметричное сверхкритическое течение над барьером, содержащее пару прыжок — яма, несколько сложнее. Для этого сначала препятствие высотой $\delta \sim 0,4$ плавно ускоряется ($t \sim 100$) так, чтобы сформировался режим форсированного обтекания, отвечающий области PEF на рис. 5 (режим 4E [3]). Далее высота препятствия плавно уменьшается ($t \sim 100$) до $\delta = 0,15$. Полученный устойчивый режим обтекания показан сплошной линией на рис. 7.

Таким образом, по крайней мере теоретически, удалось для общего набора параметров движения $(h_2, \gamma_2; D, \delta)$ построить три различных асимптотических предела при больших временах в задаче о сверхкритическом обтекании тела потоком двухслойной жидкости. Интересным моментом здесь является возможность смены типа течения при малых изменениях определяющих параметров движения, приводящая к существенной перестройке течения в целом. В частности, при переходе от форсированного к сверхкритиче-

скому режиму обтекания накопленная над телом энергия может излучаться вниз по потоку в виде волн большой амплитуды.

9. Замечания. Одна из основных проблем при изучении двухслойных течений в приближении Буссинеска — выбор законов сохранения, позволяющий отразить эволюцию внутренних гидравлических прыжков. Трудность при моделировании таких течений состоит в том, что условие потенциальности течения в каждом из слоев при переходе к длинноволновому приближению противоречит закону сохранения импульса. Это противоречие может быть устранено в рамках более полной модели, учитывающей возможность перекачки части энергии длинных волн в коротковолновые возмущения на границе раздела и связанный с этим рост прослойки между слоями [11]. Однако в случае, когда толщина прослойки относительно мала, указанная система сводится к уравнениям двухслойной мелкой воды (2.1) с законами сохранения (3.1), основанными на уравнениях неразрывности и потенциальности течения в каждом из слоев. И хотя эта система является приближенной, она, как было показано выше, дает не только качественное, но и количественное совпадение с результатами экспериментов по структуре волн в задаче о нестационарном обтекании тела потоком двухслойной жидкости.

При больших временах решение этой задачи стремится к автомодельному решению задачи о распаде произвольного разрыва с дополнительными граничными условиями на линии $x = Dt$ на плоскости (x, t) , соответствующей траектории движения буксируемого со скоростью D препятствия.

Условия над препятствием, связывающие состояния потока впереди и позади тела, позволяют определить течение всюду решением смешанной задачи в области перед препятствием и задачи Коши в области за ним. Эти условия определяются возможностью существования стационарного относительно препятствия течения, переводящего докритический поток в сверхкритический. Однако в отличие от однослойной мелкой воды они не обязательно совпадают с общепринятыми условиями “управляющего сечения”, при которых над препятствием реализуется непрерывное стационарное течение, докритическое на переднем склоне барьера и сверхкритическое на его обратном склоне. Возникновение форсированных режимов обтекания, при которых над гребнем препятствия поток сверхкритический, связано с особенностями распространения длинноволновых возмущений в двухслойной жидкости. Наличие максимальной скорости нелинейных волн D_{\max} приводит к появлению на плоскости параметров (D, δ) целой области (область PEF на рис. 5,а), в которой изменение высоты δ буксируемого тела не может оказывать влияния вверх по потоку, но в то же время течение над препятствием несимметрично, так как более устойчивым является режим обтекания, содержащий гидравлический прыжок (точнее, яму), переводящий течение с ветви 3 на ветвь 1 (рис. 4,б). Последнее обстоятельство служит причиной гистерезиса, т.е. зависимости картины обтекания тела от предыстории выхода его на стационарный режим. Численные расчеты нестационарного движения в двухслойной жидкости, а также эксперименты [3] подтверждают неединственность асимптотического течения в окрестности препятствия для определяющих параметров буксировки из области PEF (рис. 5,а). При движении тела со скоростью, превышающей D_{\max} , также возможен несимметричный режим обтекания, содержащий пару гидравлических прыжков (скачок на переднем склоне и яму на обратном, рис. 6,б). Наиболее интересна здесь (особенно с точки зрения приложений в океанологии и метеорологии) возможность “срыва” режима обтекания на симметричный, приводящего к большим нестационарным изменениям потока в окрестности обтекаемого тела при малых изменениях параметров набегающего потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93—013—17621.

ЛИТЕРАТУРА

1. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. II. Experiments with two-fluid system // Tellus. — 1954. — V. 6. — P. 97—115.

2. Long R.R. Blocking effects in flow over obstacles // *Tellus*. — 1970. — V. 22. — P. 471—480.
3. Baines P.G. A unified description of two-layer flow over topography // *J. Fluid Mech.* — 1984. — V. 146. — P. 127—167.
4. Baines P.G. A general method for determining upstream effects in stratified flow of finite depth over long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* — 1988. — V. 188. — P. 1—22.
5. Houghton D.D., Jsaacson E. Mountain winds // *Stud. Numer. Anal.* — 1970. — V. 2. — P. 21—52.
6. Baines P.G. Upstream blocking and airflow over mountains // *Annual Rev. Fluid Mech.* — 1987. — V. 19. — P. 75—97.
7. Armi L. The hydraulics of two flowing layers with different densities // *J. Fluid Mech.* — 1986. — V. 163. — P. 27—58.
8. Овсянников Л.В. Модели двухслойной “мелкой воды” // *ПМТФ*. — 1979. — № 2. — С. 3—14.
9. Yih C.S., Guha C.R. Hydraulic jump in a fluid system of two layers // *Tellus*. — 1955. — V. 7. — P. 358—366.
10. Chu V.H., Baddour R.E. Turbulent gravity-stratified shear flows // *J. Fluid Mech.* — 1984. — V. 138. — P. 353—378.
11. Ляпидевский В.Ю. Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // *Лабораторное моделирование динамических процессов в океане*. — Новосибирск: ИТ СО РАН, 1991. — С. 87—97.
12. Ляпидевский В.Ю. Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной мелкой воды // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики*. — 1981. — Вып. 50. — С. 85—97.
13. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.

г. Новосибирск

Поступила 17/VI 1993 г.

УДК 532.59

И.В. Стурова

ВЛИЯНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА РАССЕЯНИЕ И ГЕНЕРАЦИЮ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Устойчивая стратификация жидкости, соответствующая увеличению плотности по направлению силы тяжести, обуславливает существование внутренних волн. Волны малой амплитуды описываются линейной теорией внутренних волн, основы которой подробно изложены, например, в [1]. В покоящейся горизонтально-однородной жидкости существует счетное число свободных гармонических волновых мод в том случае, когда непрерывное изменение плотности имеет место только на конечном интервале глубин. Каждой волновой моде отвечает своя дисперсионная зависимость частоты волны от волнового числа, которая позволяет определить фазовую и групповую скорости данной волны. Распределениями плотности с нормальными дисперсионными характеристиками будем считать такие, для которых каждая волновая мода имеет групповую скорость, монотонно убывающую с ростом волнового числа. В противном случае, когда наряду с максимальным значением групповой скорости для длинных внутренних волн появляются локальные максимумы при ненулевых значениях волновых чисел, дисперсионные зависимости назовем аномальными.

Исследование характера распределений плотности, при которых возможны аномальные дисперсионные зависимости, представлено в [2]. Показано, в частности, что аномальные дисперсионные зависимости могут возникать для таких распределений плотности, в которых существует, по крайней мере, один участок волновода с частотой плавучести, отличной от максимальной и

© И.В. Стурова, 1994