

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин С. Д., Козлов Н. П., Лесков Л. В. Электрические ракетные двигатели. М.: Машиностроение, 1975.
2. Морозов А. И. Термоядерные системы с плотной плазмой.— Вестн. АН СССР, 1969, вып. 6.
3. Mather J. W. Formation of a high-density deuterium plasma focus.— Phys. Fluids, 1965, v. 8, N 2.
4. Камруков А. С., Козлов Н. П., Протасов Ю. С. Динамика и излучение открытых (вакуумных) плазмодинамических разрядов типа «плазменный фокус»: Обзор.— ТВТ, 1982, т. 20, № 2.
5. Козлов Н. П., Протасов Ю. С. и др. Экспериментальное исследование плазменного фокуса в ускорителях эрозионной плазмы. I.— ЖТФ, 1973, т. 43, вып. 4; II — 1974, т. 44, вып. 12; III — 1977, т. 47, вып. 8; IV — 1981, т. 51, вып. 4; V — 1982, т. 52, вып. 8.
6. Минько Л. Я. Получение и исследование импульсных плазменных потоков. Минск: Наука и техника, 1970.
7. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974, вып. 8.
8. Вальков Ю. А., Молчанов В. С., Скворцов Ю. В. Динамика токовой оболочки в импульсном коаксиальном инжекторе.— В кн.: Плазменные ускорители. М.: Машиностроение, 1973.
9. Комельков В. С., Кузнецов А. П. и др. Разлет плазменной токовой оболочки.— ПМТФ, 1978, № 5.
10. Камруков А. С., Козлов Н. П. и др. О возможности создания высокояркостных источников излучения на основе ударного торможения гиперзвуковых плазменных потоков в плотных газах.— ЖТФ, 1982, т. 52, № 11.
11. Семенов А. М. Динамика и излучение сильноточных плазмодинамических разрядов МПК в газах.— В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. конф. по плазменным ускорителям и ионным инжекторам. М., 1982.
12. Камруков А. С., Козлов Н. П. и др. Расчет параметров плазменного потока импульсного эрозионного плазменного ускорителя.— ПМТФ, 1984, № 2.
13. Попов Е. Г., Цикулин М. А. Излучательные свойства ударных волн в газах. М.: Наука, 1977.

Поступила 2/VI 1984 г.

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ю. Н. Гордеев, Н. А. Кудряшов, В. В. Мурзенко

(Москва)

1. При описании движения газа по трубам и магистральным трещинам, а также при фильтрации газа через пористые среды в качестве уравнения движения, как правило, используют эмпирические законы (закон Дарси, соотношение Форхгеймера и т. д. [1, 2]).

Система уравнений газовой динамики с учетом сил сопротивления приведена в [3, 4], в [5] проведено исследование систем квазилинейных уравнений общего типа.

В данной работе рассматривается движение газа, которое описывается уравнением Эйлера с силами сопротивления.

Система уравнений, которая описывает движение изотермического газа, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\nu} \rho u) = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} j + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\nu} j u) = - \frac{\partial p}{\partial r} - F;$$

$$(1.3) \quad p = c^2 \rho,$$

где p — давление; ρ — плотность; u — скорость движения; $j = \rho u$ — плотность потока газа; c — изотермическая скорость звука; F — сила сопротивления при движении газа; ν — показатель симметрии ($\nu = 0$ — плоская задача, $\nu = 1$ — цилиндрическая задача, $\nu = 2$ — сферически-симметричная задача); r — координата; t — время.

При малых числах Рейнольдса ($Re = \lambda \rho u m \mu^{-1} \ll 1$)

$$(1.4) \quad F = F_1 = \mu m k^{-1} u,$$

где k — коэффициент проницаемости; m — пористость среды; μ — вязкость газа; λ — характерный размер пор. В случае $1 \leq Re \leq 10$

$$(1.5) \quad F = F_2 = \mu m k^{-1} u + \lambda m^2 k^{-1} \rho u^2.$$

Для системы уравнений (1.1) — (1.3) граничные и начальные условия зададим в виде

$$(1.6) \quad p(r, 0) = p_0, \quad u(r, 0) = 0;$$

$$(1.7) \quad p(0, t) = \chi(t), \quad u(0, t) = u_0.$$

При сверхзвуковых течениях газа из границы выходят два семейства характеристик ($dr_1/dt = u + c$, $dr_2/dt = u - c$), поэтому для системы квазилинейных гиперболических уравнений (1.1) — (1.3) требуется два граничных условия (1.7) [5, 6]. Если течения газа дозвуковые, то используется одно из условий (1.7).

2. Для линейной зависимости силы сопротивления от скорости движения газа задача (1.1) — (1.3), (1.6), (1.7) при $\chi(t) = At$ и $p_0 = 0$ является автомодельной [7, 8].

Безразмерные аналоги давления $f(\theta)$ и скорости $\varphi(\theta)$ определяются по формулам

$$(2.1) \quad p = A c^2 t f(\theta), \quad u = c \varphi(\theta), \quad \theta = r(ct)^{-1}.$$

Система уравнений (1.1) — (1.3) и условия (1.6), (1.7) в автомодельных переменных запишутся в виде

$$(2.2) \quad f'(\varphi - \theta) + \varphi' f = -f - v \theta^{-1} f \varphi;$$

$$(2.3) \quad f' + \varphi' f(\varphi - \theta) = -\sigma \varphi - v \theta^{-1} f \varphi^2, \\ f(\theta \rightarrow \infty) = 0, \quad \varphi(\theta \rightarrow \infty) = 0;$$

$$(2.4) \quad f(\theta = 0) = 1, \quad \varphi(\theta = 0) = \varphi_0,$$

где $\sigma = \mu m (kA)^{-1}$; $\varphi_0 = u_0 c^{-1}$.

Для фильтрационного движения, подчиняющегося линейному закону Дарси, из формулы (2.3) получаем

$$(2.5) \quad f' + \sigma \varphi = 0.$$

Решение системы уравнений (2.2), (2.5) при заданном давлении на границе $f(\theta = 0) = 1$ для плоского течения ($v = 0$) является простой волной [9]:

$$(2.6) \quad f(\theta) = \begin{cases} 1 - \sigma^{1/2} \theta, & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0, \end{cases} \quad \theta_0 = \sigma^{1/2}, \\ \varphi(\theta) = \begin{cases} \sigma^{-1/2}, & \theta \leq \theta_0, \\ 0, & \theta > \theta_0. \end{cases}$$

Из (2.6) следует, что скорость движения газа определяется безразмерным параметром задачи — коэффициентом сопротивления σ — и является постоянной величиной.

При силе сопротивления, равной нулю ($\sigma = 0$), существует также аналитическое решение газодинамической системы уравнений (2.2), (2.3) с условиями (2.4) для плоского случая ($v = 0$): при $\varphi_0 > \sqrt{2}$

$$(2\sqrt{2})^{-1} \ln \left[\frac{\varphi + \theta - \sqrt{2}}{\varphi_0 - \sqrt{2}} \frac{\varphi_0 + \sqrt{2}}{\varphi + \theta + \sqrt{2}} \right] + \varphi - \varphi_0 = -2\theta, \\ f = \left[\frac{(\varphi - \theta)^2 - 2}{\varphi_0^2 - 2} \right]^{1/2};$$

при $\varphi_0 = \sqrt{2}$

$$\varphi = \sqrt{2} + \theta, \quad f = \exp \{-\sqrt{2}\theta\};$$

при $1 \leq \varphi_0 < 2$

$$(2.7) \quad (2\sqrt{2})^{-1} \ln \left[\frac{\sqrt{2} - \varphi - \theta}{\sqrt{2} - \varphi_0} \frac{\sqrt{2} + \varphi_0}{\sqrt{2} + \varphi + \theta} \right] + \varphi - \varphi_0 = -2\theta,$$

$$f = \left[\frac{2 - (\varphi + \theta)^2}{2 - \varphi_0^2} \right]^{1/2}.$$

Из решений (2.7) следует, что при $\varphi_0 > \sqrt{2}$ $\varphi'' > 0$, а при $1 < \varphi_0 < \sqrt{2}$ $\varphi'' < 0$. Качественное отличие в поведении решений связано с зависимостью от времени давления газа на границе $\chi(t) = At$. При $\chi(t) = At^\alpha$ $\varphi_0 \neq \sqrt{2}$ и зависит от α .

Приведенные решения (2.7) для $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ справедливы лишь при сверхзвуковом втекании газа ($\varphi_0 > 1$). В случае $0 < \varphi_0 < 1$ интегральные кривые (2.7) не соответствуют физическому смыслу, поскольку $f(\theta \rightarrow \infty) \neq 0$.

Для $\sigma = 0$ и $\varphi_0 > 1$ при $\theta \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \infty$, т. е. скорость распространения фронта газа бесконечна, что соответствует мгновенному заполнению полупространства $r > 0$.

3. Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$(3.1) \quad r' = rR^{-1}, \quad t' = tR^{-1}, \quad u' = uc^{-1}, \quad p' = pp_1^{-1}, \quad j' = jp_1^{-1},$$

где R — характерная длина, на которой рассматривается движение газа.

Далее штрихи опускаем, полагая $r = r'$, $t = t'$, $p = p'$ и т. д.

В безразмерных переменных (3.1) система уравнений (1.1)–(1.3) и условия (1.6), (1.7) запишутся в виде

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} p + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^\nu pu) = 0;$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} j + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^\nu ju) + \frac{\partial p}{\partial r} + F = 0, \quad j = pu;$$

$$(3.4) \quad F = \sigma_1 u + \sigma_2 u^2;$$

$$(3.5) \quad p(r, 0) = p_0 p_1^{-1} = p_f, \quad u(r, 0) = 0;$$

$$(3.6) \quad p(0, t) = \chi(t) p_1^{-1}, \quad u(0, t) = u_0 c^{-1} = v_0,$$

где $\sigma_1 = \mu m R (k p_1)^{-1}$; $\sigma_2 = \lambda m^2 c R k^{-1}$.

Решение системы уравнений (3.2)–(3.4) с начальными и граничными условиями (3.5), (3.6) проводилось численно с использованием расщепления на два дробных шага по времени [10]. Расщепленная на дифференциальном уровне система уравнений имеет вид

при $t_n \leq t < t_n + \tau/2$

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} j + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^\nu p) = \frac{\nu}{r} p - F, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} p = 0;$$

$$t_n + \tau/2 \leq t < t_{n+1};$$

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} p + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^\nu pu) = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} j + r^{-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (r^\nu ju) = 0,$$

где τ — шаг по времени; $t_{n+1} = t_n + \tau$; $n = 1, 2, \dots$

Дифференциальные операторы в (3.7), (3.8) заменялись разностными операторами. При этом система уравнений на первом дробном шаге аппроксимировалась по неявной разностной схеме на четырехточечном шаблоне. Расчет потока на этом шаге проводился с учетом влияния градиента давления и сил трения. Полученные результаты использовались для вычисления p и j на втором дробном шаге. Уравнения переноса для давления и потока (3.8) решались численно методом коррекции потоков [11, 12].

Такое решение осуществляется в два этапа. На первом этапе в разностную схему включается диффузия по аналогии с искусственной вязкостью в обычных разностных схемах. Величина коэффициентов диффузии выбирается из условий консервативности разностной схемы и положительности численного решения. При этом разностная схема становится монотонной. На втором этапе осуществляется коррекция полученного решения путем введения антидиффузии. Здесь ошибки, внесенные на первом этапе, за счет диффузии значительно уменьшаются.

Существует несколько модификаций метода коррекции потоков [11, 12]. С целью оптимального соответствия метода системе уравнений переноса для описания течений газа с ударными волнами на первом этапе расчет переноса проводился по явной разностной схеме, на втором — по неявной схеме.

При таком алгоритме удалось добиться устойчивости и высокой точности решений даже при сильных разрывах. Как показали численные эксперименты, разрывы в решениях, описываемых системой уравнений (3.2)—(3.4), размазываются всего на 2—3 точки. По сравнению с традиционными разностными схемами при решении уравнений переноса методом коррекции потоков существенно (в 3—4 раза) уменьшаются дисперсионные ошибки, ошибки в амплитуде и осцилляции вблизи разрывов решений.

Число шагов по координате при численном интегрировании системы уравнений (3.7), (3.8) равнялось 500. Шаг по времени выбирался из условия Куранта $\tau \leq 0,5h / \max_{1 \leq i \leq N} u_i$.

Оценка точности численного решения по методу Ричардсона путем сравнения решений для двух различных шагов по координате и времени показала, что максимальная ошибка в решениях не превышает 1,5%.

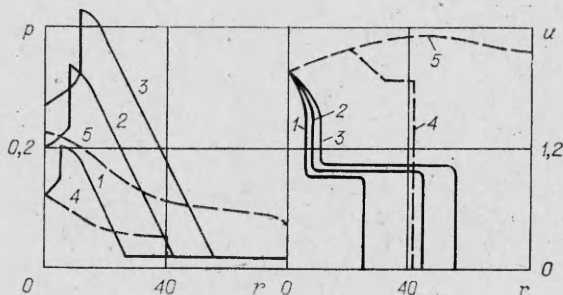
Используемая разностная схема сквозного счета позволяет получить все не выделенные заранее поверхности разрыва.

4. В результате численного решения системы уравнений (3.2)—(3.4) с условиями (3.5), (3.6) получены зависимости характеристик давления и скорости газа от пространственных и временных аргументов.

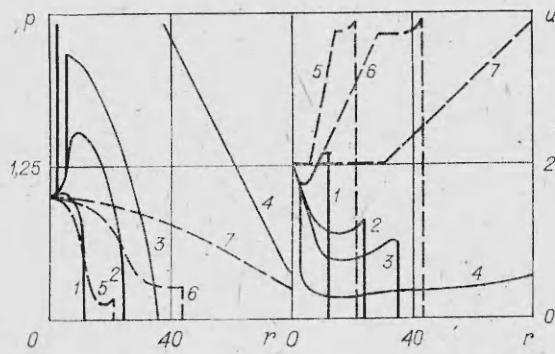
На фиг. 1 представлены зависимости давления и скорости движения от координаты в фиксированные моменты времени при $\chi(t)p_1^{-1} = p_1 + At$ ($p_1 = 0,01$, $A = 0,1$). Граничное значение скорости втекания газа принималось равным $v_0 = 2$. Кривые 1—3 соответствуют характеристикам газа для линейной зависимости силы сопротивления от скорости ($\sigma_1 = 0,2$) в моменты времени $t = 1,1$; 1,8; 2,4; кривые 4, 5 показывают давление газа и скорость движения без учета сил сопротивления ($\sigma_1 = 0$) в моменты времени $t = 1,0$; 2,1.

Результаты расчетов близки к полученным в п. 2 аналитическим зависимостям для давления и скорости движения газа. Некоторые расхождения связаны с тем, что в данном варианте расчетов учитывалось влияние фонового давления. При заданных условиях уже в начальный момент времени образуется ударная волна, направление которой противоположно движению газа.

Этот факт имеет место и при решении автоматической задачи (2.2)—(2.4). На фронте образовавшейся ударной волны давление газа возрастает скачком, а скорость движения газа уменьшается от сверхзвуковой до дозвуковой величины. Интенсивность ударной волны с течением времени возрастает, а сам скачок постепенно перемещается в направлении дви-



Ф и г. 1



Фиг. 2

жения газа. Образование ударной волны происходит не при всех сверхзвуковых скоростях втекания газа, а лишь при больших некоторой критической величины $v_0 > v^* > 1$. При $v_0 = v^*$ скачок в давлении газа находится на границе. Интенсивность ударной волны связана с величиной безразмерного коэффициента силы сопротивления σ_1 . С увеличением σ_1 критическое значение скорости v^* становится также больше.

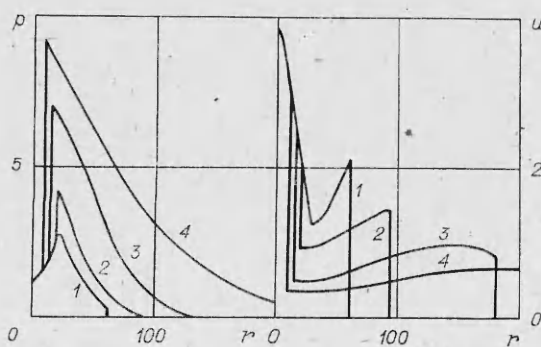
Фиг. 2 иллюстрирует зависимости давления газа (слева) и скорости движения (справа) от координаты для различных моментов времени. Граничное условие в данной серии расчетов принималось равным $\chi(t)p_1^{-1} = i$, начальное давление $p_f = 0,01$, скорость втекания газа $v_0 = 2$. Кривые 1—4 соответствуют движению газа с учетом сил сопротивления при $t = 0,4; 1,2; 2,5; 8,5$ для $\sigma_1 = 1$; кривыми 5—7 показаны зависимости давления газа и скорости движения в моменты времени $t = 1,3; 3,5; 7,0$ при $\sigma_1 = 0$. При данном граничном условии ударная волна образуется не в начальный момент времени, а спустя $t = t^* \sim 2$ после начала движения. Кроме того, образовавшаяся ударная волна далее с течением времени движется к границе, т. е. в направлении, противоположном движению газа. Интенсивность ударной волны со временем возрастает. Из фиг. 2 также видно, что при движении газа с силой сопротивления, кроме отраженной ударной волны, существует и прямая, которая распространяется по невозмущенному газу. Интенсивность прямой волны с течением времени уменьшается.

Обсуждаемые выше результаты соответствуют плоскому движению газа при линейной зависимости силы сопротивления от скорости. С целью проверки возможности образования ударной волны при иной зависимости $F(u)$ проводились также расчеты для квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости (формула (3.4)).

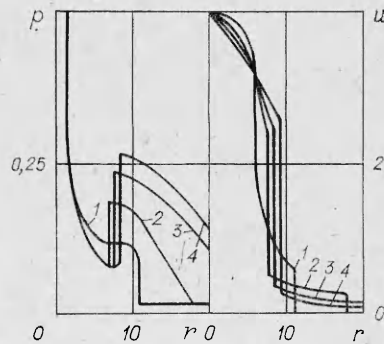
Условия на границе принимались следующими: $\chi(t)p_1^{-1} = i$, $v_0 = 4$ при начальном давлении $p_f = 0,01$. Параметры $\sigma_1 = 10^{-3}$, $\sigma_2 = 1$.

На фиг. 3 представлены зависимости давления и скорости движения газа от координаты для моментов времени $t = 0,9; 1,8; 5,0; 10,4$ (кривые 1—4). При такой зависимости $F(u)$ также образуется ударная волна.

Для сферически-симметричного движения ($v = 2$) при $r = r_0 = 0,1$ граничные условия задавались в виде $p(r_0, t) = 1$, $u(r_0, t) = 4$. Начальное давление $p_f = 0,01$.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 показаны зависимости давления газа и скорости движения от координаты при $t = 0,25; 1,0; 5,0; 9,5$ (кривые 1—4) для линейной зависимости силы сопротивления от скорости ($\sigma_1 = 1$).

В отличие от плоского движения при сферически-симметричном течении газа давление уменьшается с расстоянием от $r = r_0$ до $r = r^* \sim 8$. Начиная с $r > r^*$, давление газа возрастает, и в некоторый момент времени $t = t^* \sim 0,5$ также образуется ударная волна.

Кратко остановимся на результатах работы. Решения системы уравнений (1.1)—(1.3) при некоторых условиях асимптотически совпадают с решениями уравнений фильтрации газа. Однако при скоростях втекания газа, больших скорости звука, возможен режим движения, при котором в среде образуется отраженная ударная волна. Образование ударных волн может происходить как в начальный момент времени, так и спустя некоторое время после начала движения. Возникновение отраженных ударных волн при изотермическом движении газа с силами сопротивления является устойчивым фактом, не зависящим от геометрической задачи.

Авторы благодарят Е. Е. Ловецкого и Б. Л. Рождественского за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1981.
2. Полубаринова-Кочина Н. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. Николаевский В. П., Басинев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
4. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
7. Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4.
8. Бондаренко А. Г., Колабашкин В. М., Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3.
9. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
10. Ковени В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
11. Борис Дж. П., Бук Д. Л. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков. — В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы/Под ред. Дж. Киллина. М.: Мир, 1980.
12. Boris J. P., Book D. L. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. — J. Comput. Phys., 1979, v. 11, N 38.

Поступила 23/IV 1984 г.

УДК 533.6.013.12

ВЛИЯНИЕ УДАРНОГО СЛОЯ НА ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНЯМИ

Г. И. Щепановская, В. А. Щепановский

(Красноярск)

Вопрос соотношения волнового сопротивления, определяемого интенсивностью соответствующего ударного слоя, и вязкого сопротивления, обусловленного трением поверхности, для пространственных тел с выпуклым поперечным сечением практически ясен, но для звездообразных конфигураций требует еще детальной разработки. Расчеты по линейной теории [1], где получено, что волновое сопротивление звездообразных форм меньше волнового сопротивления эквивалентного по длине и объему тела вращения, только подчеркивают целесообразность такого исследования.

При фиксированной длине конфигурации с плоскими боковыми гранями волновое сопротивление определяется величиной относительной толщины и слабо зависит от числа лепестков [2, 3]. С уменьшением толщины волновое сопротивление убывает, тогда как вязкое сопротивление растет — при неизменных длине тела и числе лепест-