

УДК 622.272: 516.02

## Анализ качки понтона с периодически изменяющимися параметрами остойчивости на взволнованной поверхности воды конечной глубины

С.В. Черданцев<sup>1</sup>, Н.В. Черданцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева”, ул. Весенняя, 28, Кемерово, 650000

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр угля и углехимии Сибирского отделения Российской академии наук”, Ленинградский проспект, 10, Кемерово, 650065

E-mails: svch01@yandex.ru (Черданцев С.В.), nvch2014@yandex.ru (Черданцев Н.В.)

**Черданцев С.В., Черданцев Н.В.** Анализ качки понтона с периодически изменяющимися параметрами устойчивости на взволнованной поверхности мелкой воды // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 441–456.

Показано, что за счет периодического изменения метацентрических высот понтона на взволнованной поверхности жидкости в зумпфе угольного разреза понтон способен совершать параметрическую качку как в продольном направлении, так и в поперечном. Уравнение, описывающее параметрическую качку, преобразовано к уравнению Матье, коэффициенты которого зависят как от собственных частот и характеристик плавучести понтона на “тихой воде”, так и от частоты колебания жидкости, которая, в свою очередь, определяется размерами зумпфа. Установлены закономерности между параметрами, характеризующими параметрическую качку в продольном и поперечном направлениях, и выявлены области ее неустойчивости.

DOI: 10.15372/SJNM20160408

**Ключевые слова:** зумпф угольного разреза, понтон, потенциал скоростей, частота волн, ватерлиния, метацентрические высоты, присоединенные массы жидкости, параметрическая качка понтона, уравнение Матье, диаграмма Айнса–Стретта.

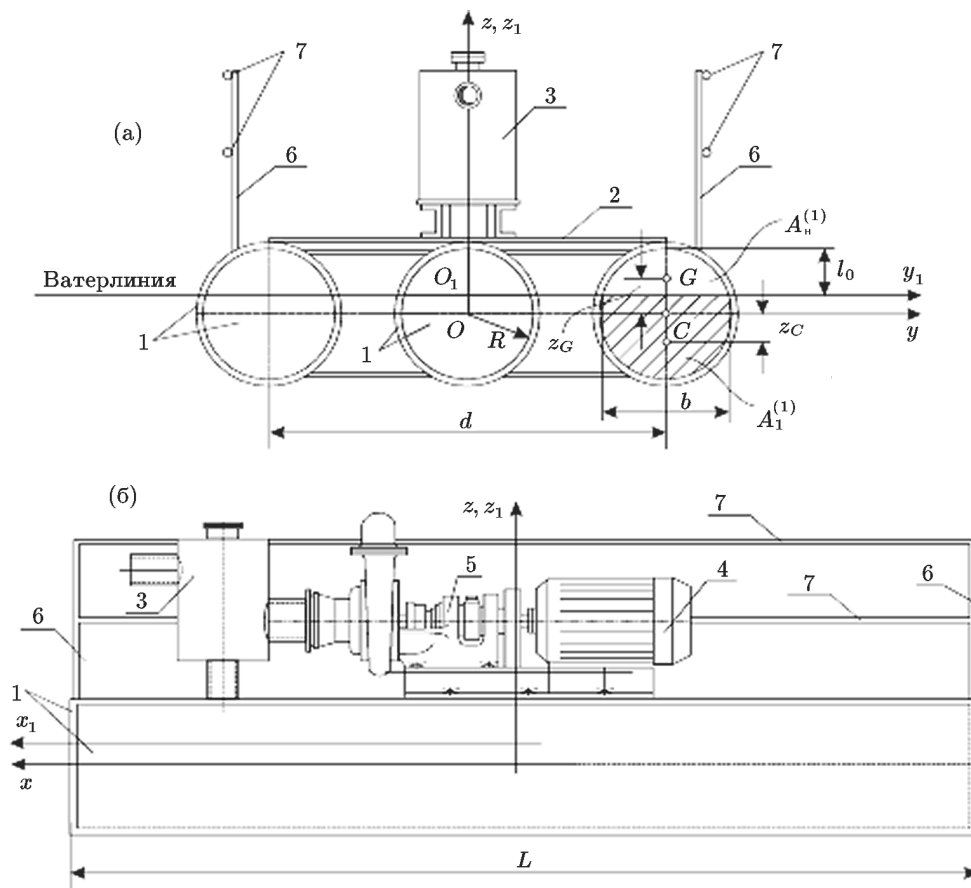
**Cherdantsev S.V., Cherdantsev N.V.** Analysis of the pontoon fluctuations with a seasonally changing parameter of stability on the astir surface of finite water depth // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 441–456.

It is shown that due to the periodic changes in metacentric heights of a pontoon on the astir surface of liquids in the sump of an open coal mine, the pontoon is capable to produce parametric pitching, both in the longitudinal and in the transverse directions. The equation, describing parametric pitching, is transformed to the Mathieu equation, whose factors depend both on the own frequencies and the pontoon floatability features on “calm water”, and on the frequency of fluctuation of a liquid, which, in turn, is defined by the sump size. The installed regularities between parameters, characterizing parametric pitching in the longitudinal and transverse directions, and areas of its instability are revealed.

**Keywords:** sump of an open coal mine, pontoon, potential of the velocities, frequency of the waves, waterline, metacentric heights, added masses of liquid, parametric pitching pontoon, Mathieu equation, Inc-Strutt stability diagram.

## Введение

Чтобы не допустить затопления забоев угольных разрезов грунтовыми и подземными водами предусматривают зумпфы, представляющие собой сооружения, как правило, в форме параллелепипеда в почве угольных забоев для сбора вод. По мере заполнения зумпфов воду откачивают с помощью водоотливного оборудования, находящегося на понтонах, которые помещают непосредственно на водную поверхность в зумпфы. В зависимости от производительности водоотливного оборудования понтоны состоят из трех-пяти металлических труб-поплавков, герметически заваренных с торцов и расположенных параллельно друг другу, на которые настилают палубу из металлических пластин, обшитых досками, и боковые ограждения с поручнями. Затем на палубу устанавливают водоотливное оборудование с электроприводом (рис. 1).



**Рис. 1.** Понтон с водоотливным оборудованием: а) вид с торца, б) вид сбоку; 1 — металлические трубы-поплавки; 2 — палубный настил; 3 — бак-запасник воды; 4 — электродвигатель; 5 — насос; 6 — стойки ограждения; 7 — поручни

Понтоны производятся на каждом угольном разрезе индивидуально, а единственным требованием при их проектировании является обеспечение их плавучести. Однако в процессе эксплуатации понтонов неизбежно возникают внешние возмущения, которые могут привести либо к немедленному опрокидыванию понтонов, не обладающих достаточной остойчивостью, либо к их качке с нарастающей амплитудой и последующему опрокидыванию.

Детальные исследования плавучести и устойчивости понтона были выполнены в Кузбасском государственном техническом университете им. Т.Ф. Горбачева и Институте угля СО РАН. В частности, в работах [1–4] исследована плавучесть и статическая устойчивость понтонов как на малых, так и на произвольных кренах и дифферентах, для чего использовались основные теоремы и фундаментальные положения статики корабля [5]. Исследования движения понтонов в зумпфах “на тихой воде” [6–8] выявили три вида их качки: вертикальную, боковую и килевую, анализ которых подробно обсуждался в работах [9–12], где определены также динамические свойства понтонов различных типов-размеров. Это позволило приступить к изучению качки понтонов на регулярном волнении [13, 14]. В этих статьях выявлен интервал длины волны, при котором боковая качка понтона является наиболее опасной и может привести к его опрокидыванию. Совместная вертикально-боковая качка и устойчивость понтона “на тихой воде” обсуждались в работе [15], в которой не обнаружено опасных режимов его качки.

В этой работе мы рассмотрим задачу о параметрической качке понтона на взволнованной поверхности жидкости, которая еще не обсуждалась. На наш взгляд, данная задача наиболее полно отражает условия эксплуатации понтона, а ее решение позволит дать рекомендации по проектированию и конструированию понтонов на угольных разрезах.

Задача о параметрической качке, в свою очередь, состоит из двух задач, первая из которых рассматривает волновое движение жидкости в зумпфе, а вторая — собственно качку понтона на взволнованной поверхности жидкости.

## 1. Задача о регулярных волнах на мелкой воде в конечной области

Эту задачу будем рассматривать в рамках следующих допущений [16]:

- 1) жидкость в зумпфе идеальная и баротропная;
- 2) атмосферное давление пренебрежимо мало по сравнению с давлением жидкости в зумпфе;
- 3) скорости движения жидкости и отклонения  $\delta = \delta(x, y)$  поверхности жидкости от ее невозмущенной поверхности ( $z = 0$ ) являются малыми величинами, равно как и все первые производные функции  $\delta$  по координатам;
- 4) зумпф угольного разреза представляет собой конечную область в виде прямоугольного параллелепипеда, стороны которого ориентированы вдоль осей  $x, y, z$ , а их размеры  $d_1, d_2, d_3$  соответственно в процессе качки понтона не меняются;
- 5) возникающие в зумпфе волны жидкости будем полагать регулярными, т. е. форма и элементы всех волн одинаковые. Здесь добавим, что длина понтона  $L$ , ориентированная вдоль  $d_1$ , превышает его ширину, поэтому и размер зумпфа  $d_1$  превышает размер  $d_2$ .

В силу сказанного, движение жидкости в зумпфе будет потенциальным, которое мы можем описать в рамках краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1}$$

и граничных условий

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=-d_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{|x|=0.5d_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{|y|=0.5d_2} = 0 \tag{2}$$

относительно искомого потенциала  $\Phi$  векторного поля скоростей  $\vec{v}$ . Отметим, что первое из условий (2) обеспечивает обтекание дна зумпфа, а два других — обтекание его вертикальных стенок.

В силу первого и второго допущений, интеграл Лагранжа приводится к виду [16]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta g = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

а после его дифференцирования по времени  $t$  с учетом того, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = v_z = \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

мы получаем условие на поверхности жидкости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{при } z = 0, \quad (4)$$

в котором  $g$  — ускорение свободного падения.

Процедура отыскания потенциала  $\Phi$  подробно изложена в фундаментальных монографиях [16, 17], следуя которой находим

$$\Phi = A(\cos mx + \sin mx)(\cos ny + \sin ny) \operatorname{ch}[k(d_3 + z)] \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (5)$$

где  $A$  — постоянная величина,  $\varepsilon$  — начальная фаза колебаний,  $\sigma$  — частота колебаний жидкости в зумпфе, определяемая по формуле

$$\sigma = \sqrt{kg \operatorname{th}(kd_3)}, \quad (6)$$

а волновые числа  $m$ ,  $n$  и  $k$  связаны соотношением

$$m^2 + n^2 = k^2, \quad (7)$$

$$m = \frac{\pi}{2d_1}(2s + 1), \quad n = \frac{\pi}{2d_2}(2r + 1), \quad s, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Теперь из формулы (3) мы получаем уравнение взволнованной поверхности жидкости

$$\delta = \delta_0(\cos mx + \sin mx)(\cos ny + \sin ny) \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (9)$$

где величина  $\delta_0 = A\sigma \operatorname{ch}(kd_3)/g$  — амплитуда взволнованной поверхности воды.

Затем находим уравнение плоскости, касательной к взволнованной поверхности в произвольной точке  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \delta}{\partial y}(y - y_0) = z - z_0, \quad (10)$$

которое можно привести к уравнению

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg} \beta, \quad (11)$$

где  $\nu$  — угол, определяющий направление волны, а  $\beta$  — угол ее склона в продольном направлении:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{z - z_0}{x - x_0}, \quad \operatorname{ctg} \nu \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{z - z_0}{y - y_0},$$

$\alpha$  — угол склона волны в поперечном направлении.

Если волна направлена вдоль оси  $x$ , то  $\nu = 0$ , если же волна направлена вдоль оси  $y$ , то  $\nu = 90^\circ$  и, следовательно, уравнение (11) распадается на два независимых друг от друга уравнения:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (12)$$

каждое из которых описывает плоскую волну.

Опыт эксплуатации понтонов на угольных разрезах показывает, что в зумпфах возникают, как правило, плоские волны. Учитывая это обстоятельство и подставляя формулу (9) при  $n = 0$  в первое, а при  $m = 0$  во второе уравнение (12), получаем два не связанных между собой уравнения:

$$m\delta_0(-\sin mx + \cos mx) \sin(\sigma t + \varepsilon) = \operatorname{tg} \beta, \quad (13)$$

$$n\delta_0(-\sin ny + \cos ny) \sin(\sigma t + \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (14)$$

На основании третьего допущения будем полагать, что  $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$ ,  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , и примем амплитудные значения  $\beta_0 = 0.02\pi = 3.6^\circ$ ,  $\alpha_0 = 0.03\pi = 5.4^\circ$ ,  $\delta_0 = 0.02d_2$ . Тогда из уравнений (13), (14) при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $t = \pi/(2\sigma)$  найдем величины

$$m = \frac{\pi}{d_2}, \quad n = \frac{3\pi}{2d_2}, \quad (15)$$

зная которые, из второй формулы (8) находим  $r = 1$ . Полагая, что и  $s = 1$ , из первой формулы (8) мы получаем еще одну формулу для определения  $m$ :

$$m = \frac{3\pi}{2d_1}. \quad (16)$$

Сопоставляя формулу (16) с первой формулой (15), находим значение  $d_1/d_2 = 1.5$ , при котором площадь поперечного сечения зумпфа минимальна и, следовательно, стоимость его сооружения также будет минимальной.

Если в зумпфе возникает только поперечная волна, то значение  $m = 0$ , а из формулы (7) следует, что  $k = n$ . Если же в зумпфе имеет место только продольная волна, то  $n = 0$ , а  $k = m$ . В силу этого, а также учитывая вторую формулу (15) и формулу (16), мы перепишем формулу (6), определяющую частоту волны для случаев, если она поперечная или продольная соответственно

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{g}{d_2} \operatorname{th}\left(\frac{3\pi}{2} \frac{d_3}{d_2}\right)}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{g}{d_1} \operatorname{th}\left(\frac{3\pi}{2} \frac{d_3}{d_1}\right)}. \quad (17)$$

Определив параметры волны, приступаем к следующей задаче.

## 2. Задача о качке понтона на регулярных волнах в зумпфе угольного разреза

Поскольку в зумпфах угольных разрезов возникают либо поперечные, либо продольные волны, то соответственно этому и качка понтона будет либо боковой, либо килевой, которые происходят независимо друг от друга (рис. 2).

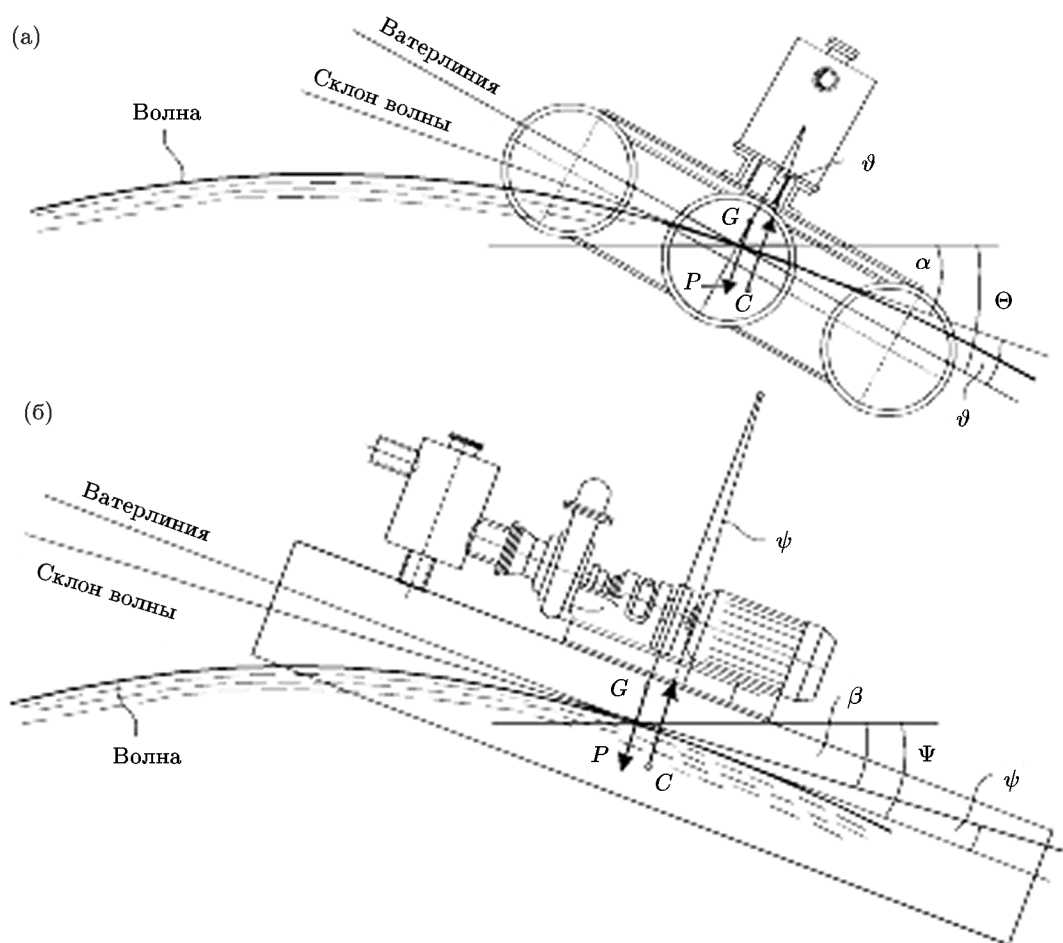


Рис. 2. Положение понтона на регулярной волне при боковой (а) и килевой качке (б)

Как при боковой так и при килевой качке поверхность волны является поверхностью равных давлений [16], поэтому вес понтона с водоотливным оборудованием и сила плавучести направлены по нормали к поверхности волны, в силу чего, момент, действующий на понтон, вычисляется как восстанавливающий момент при наклонении его на угол  $\vartheta = \Theta - \alpha$  — при боковой качке или  $\psi = \Psi - \beta$  — при килевой, где  $\Theta, \Psi$  — углы соответственно крена и дифферента понтона.

Приняв в качестве параметров  $\vartheta$  и  $\psi$ , характеризующих соответственно боковую и килевую качки понтона на волнении, запишем их уравнения в виде [11]:

$$(J_{x_1} + M_{44})\ddot{\vartheta} + Mgh_0\vartheta = 0, \quad (J_{y_1} + M_{55})\ddot{\psi} + MgH_0\psi = 0. \quad (18)$$

В уравнениях (18) приняты следующие обозначения:  $M$  — масса понтона и находящегося на нем оборудования, равная водоизмещению понтона;  $J_{x_1}, J_{y_1}$  — его моменты инерции относительно осей  $Ox_1, Oy_1$ , расположенных в плоскости ватерлинии;  $M_{44}, M_{55}$  — присоединенные массы жидкости; точками в уравнениях (18) обозначены производные по времени. Поперечная  $h_0$  и продольная  $H_0$  метацентрические высоты понтона и его метацентрические радиусы  $r_\theta, r_\psi$ , характеризующие статическую остойчивость понтона, найдены в работе [2]:

$$h_0 = r_\theta - z_C - z_G, \quad H_0 = r_\psi - z_C - z_G, \quad (19)$$

$$r_\theta = R \frac{2 \left[ \sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right]^3 \left\{ 1 + \frac{3\bar{d}^2}{2j\zeta(2-\zeta)} \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[ \left( 1 - 2 \frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right] \right\}}{3 \left\{ \pi - \left[ \arccos(1-\zeta) - (1-\zeta) \sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}}, \quad (20)$$

$$r_\psi = R \frac{\sqrt{\zeta(2-\zeta)}}{6 \left\{ \pi - \left[ \arccos(1-\zeta) - (1-\zeta) \sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}} \bar{L}^2, \quad (21)$$

где  $\zeta = l_0/R$  — относительная максимальная высота надводной части труб-поплавков (см. рис. 1);  $\bar{d}$  — относительное расстояние между центрами тяжести крайних труб-поплавков;  $R$  — их внутренний радиус;  $j$  — количество труб-поплавков.

Координата центра величины  $z_C$  определяется по формуле [2]:

$$z_C = -\frac{2}{3} R \frac{[\zeta(2-\zeta)]^{3/2}}{\pi - \left[ \arccos(1-\zeta) - (1-\zeta) \sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right]}, \quad (22)$$

а координата центра тяжести ПВУ  $z_G$  вычисляется по формуле [5]:

$$z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i,$$

где  $z_i$  — координаты масс  $m_i$ , составляющих ПВУ.

Величина  $\zeta$  находится из решения трансцендентного уравнения [2]:

$$\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta) \sqrt{\zeta(2-\zeta)} = \frac{\pi k_p}{k_p + 1}, \quad (23)$$

в котором вначале следует задать значение коэффициента запаса плавучести  $k_p$ , а затем найти величину  $\zeta$ . Например, если  $k_p = 0.3$ , то из уравнения (22) величина  $\zeta = 0.5627$ , а если  $k_p = 0.5$ , то  $\zeta = 0.7351$  и т. д.

Присоединенные массы жидкости  $M_{44}$ ,  $M_{55}$ , характеризующие увеличение моментов инерции  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  понтона в процессе его боковой качки, определяются по формулам [11]:

$$M_{44} = \bar{M}_{44} \rho L R^4, \quad M_{55} = \bar{M}_{55} \rho L R^4, \quad (24)$$

где  $L$  — длина каждой трубы-поплавка;  $\bar{M}_{44}$ ,  $\bar{M}_{55}$  — присоединенные массы жидкости в безразмерной форме найдены в работе [11]:

$$\bar{M}_{44} = j \bar{M}_{44}^{(c)} + \frac{1}{2} \bar{A}_1^{(1)} \bar{d}^2 \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[ \left( 1 - 2 \frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right], \quad \bar{M}_{55} = \frac{1}{12} j \bar{A}_1^{(1)} \bar{L}^2. \quad (25)$$

Здесь  $\bar{A}_1^{(1)}$ ,  $\bar{M}_{44}^{(c)}$  — безразмерные площадь подводной части и присоединенная масса жидкости каждой трубы-поплавка, определяемые по формулам [2, 11]:

$$\begin{aligned} \overline{A}_1^{(1)} &= \pi - \left[ \arccos(1 - \zeta) - (1 - \zeta)\sqrt{\zeta(2 - \zeta)} \right], \\ \overline{M}_{44}^{(c)} &= \left[ 1 + 2(1 - \zeta)^2 \right] \left[ 2 \arcsin(1 - \zeta) + \pi \right] + \frac{1}{3} \left[ 1 + 3(1 - \zeta)^2 \right] \times \\ & (1 - \zeta)\sqrt{1 - (\zeta - 1)^2} - \frac{1}{6}(1 - \zeta)\sqrt{1 - (\zeta - 1)^2} \left[ 1 - 2(\zeta - 1)^2 \right] + \\ & \frac{4}{3}(1 - \zeta)\sqrt{1 - (\zeta - 1)^2} \left[ 1 - (\zeta - 1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Метацентрические высоты  $h_0$ ,  $H_0$  полагались величинами постоянными. Однако в процессе качки эти параметры могут изменяться, и поэтому нам представляется уместным рассмотреть следующую задачу.

Пусть понтон совершает боковую качку на регулярном волнении в зумпфе угольного разреза. В процессе качки он периодически погружается и всплывает. Требуется исследовать режимы движения понтона.

Сформулированная задача принципиально отличается как от задачи о качке понтона на “тихой воде” [9–11, 15], так и от задачи о качке на регулярном волнении [13, 14].

Дело в том, что за счет периодического погружения и всплытия понтона в результате вертикальной качки на волнах его метацентрические высоты будут изменяться при боковой качке на величину  $\Delta h = \lambda$ , а при килевой качке — на  $\Delta H = \Lambda$ , которые являются функциями времени и частоты волнения жидкости в зумпфе. Поэтому далее метацентрические высоты  $h_0$ ,  $H_0$  будем обозначать  $h$ ,  $H$ , не снабжая индексом, которые при  $\lambda = 0$  и  $\Lambda = 0$  принимают значения соответственно  $h_0$ ,  $H_0$ , определяемые по формулам (19). С учетом сказанного, уравнения (18) перепишем следующим образом:

$$(J_{x_1} + M_{44})\ddot{\vartheta} + \rho g V h \vartheta = 0, \quad (J_{y_1} + M_{55})\ddot{\psi} + \rho g V H \psi = 0, \quad (27)$$

где  $V$  — объемное водоизмещение качающегося понтона в произвольный момент времени.

Отыскание решения уравнений (27) начнем с определения переменных произведений  $Vh$  и  $VH$ . Вначале найдем первую из них, для чего разложим ее в ряд Маклорена по степеням  $\lambda$  и ограничимся только линейными членами разложения

$$Vh = V_0 h_0 + \lambda \left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (28)$$

Дифференцируя (28) и учитывая, что при  $\lambda = 0$ :  $V = V_0$  и  $h = h_0$ , мы получаем

$$\left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left( \frac{dV}{d\lambda} h + V \frac{dh}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{dV}{d\lambda} h_0 + V_0 \frac{dh}{d\lambda}, \quad (29)$$

где  $V_0$  — объемное водоизмещение понтона в положении равновесия на “тихой воде”.

Если понтон переместился вверх на малую величину  $\lambda$ , то его водоизмещение  $V$  уменьшится на величину  $S_0 \lambda$  и будет равно:

$$V = V_0 - S_0 \lambda, \quad (30)$$

где  $S_0$  — площадь ватерлинии в положении равновесия на “тихой воде”, определяемая по формуле

$$S_0 = j b L,$$

где  $b$  — размер поперечного сечения (см. рис. 1), разделяющий надводную и подводную части трубы-поплавка на “тихой воде” найден в работе [2]:



$$b = 2R\sqrt{\zeta(2 - \zeta)}$$

и, следовательно,

$$\frac{dV}{d\lambda} = -S_0. \quad (31)$$

Для определения метацентрической высоты  $h$  воспользуемся формулой (19):

$$h = r_\theta - z_C - z_G, \quad (32)$$

но при этом мы будем учитывать, что в ее правой части метацентрический радиус  $r_\theta$  и положение центра величины  $z_C$  зависят от  $\lambda$ , а положение центра тяжести  $z_G$  — нет. Поэтому  $r_\theta$  и  $z_C$  удобнее найти не по формулам (20), (21), а по формулам, взятым из [5, 18]:

$$r_\theta = \frac{I_{x_1}}{V}, \quad z_C = \frac{M_V}{V}, \quad (33)$$

где  $I_{x_1}$  — момент инерции площади ватерлинии, а  $M_V$  — статический момент погруженного объема понтона относительно мгновенной ватерлинии. Тогда дифференцируя (32), имеем

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{dr_\theta}{d\lambda} - \frac{dz_C}{d\lambda}. \quad (34)$$

При отыскании производной  $dr_\theta/d\lambda$  будем считать, что ввиду малости  $\lambda$ , площадь ватерлинии изменяется несущественно, в силу чего, мы полагаем, что момент инерции площади ватерлинии  $I_{x_1}$  не зависит от осадки  $\lambda$ . Поэтому выполняя процедуру дифференцирования в правой части равенства (34) с учетом формул (33), получаем

$$\frac{dr_\theta}{d\lambda} = \frac{dr_\theta}{dV} \frac{dV}{d\lambda} = \frac{d}{dV} \left( \frac{I_{x_1}}{V} \right) \frac{dV}{d\lambda} = I_{x_1} \frac{d}{dV} \left( \frac{1}{V} \right) (-S_0) = -\frac{I_{x_1}}{V^2} (-S_0) = \frac{I_{x_1} S_0}{V} = \frac{r_\theta S_0}{V}, \quad (35)$$

$$\frac{dz_C}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{M_V}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \left( \frac{dM_V}{d\lambda} V - M_V \frac{dV}{d\lambda} \right) = \frac{1}{V} \frac{dM_V}{d\lambda} - \frac{M_V}{V^2} \frac{dV}{d\lambda}. \quad (36)$$

Поскольку  $M_V$  мы можем определить по формуле [5, 18]:

$$M_V = \int_{-(h+R)}^{\lambda} (-z + \lambda) dV = \int_{-(h+R)}^{\lambda} (-z + \lambda) S_z dz,$$

где  $S_z$  — площадь ватерлинии с аппликацией  $z$ , то, дифференцируя полученную формулу по  $\lambda$  и учитывая теорему о производной интеграла по его верхнему пределу, мы получаем равенство

$$\frac{dM_V}{d\lambda} = S_z(-z + \lambda),$$

правая часть которого представляет собой водоизмещение  $V$ , взятое с противоположным знаком и поэтому

$$\frac{dM_V}{d\lambda} = -V. \quad (37)$$

В силу формул (31), (37) и второй формулы (33), формула (36) приобретает вид

$$\frac{dz_C}{d\lambda} = \frac{1}{V} \frac{dM_V}{d\lambda} - \frac{1}{V^2} M_V \frac{dV}{d\lambda} = -1 - \frac{1}{V} \frac{M_V}{V} \frac{dV}{d\lambda} = -1 + \frac{z_C S_0}{V}. \quad (38)$$

Далее формулы (35) и (38) подставляем в равенство (34) и, учитывая формулу (19), получим

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{r_\theta S_0}{V} - \left( -1 + \frac{z_C S_0}{V} \right) = \frac{(h_0 + z_C + z_G) S_0}{V} + 1 - \frac{z_C S_0}{V} = 1 + \frac{(h_0 + z_G) S_0}{V}. \quad (39)$$

С помощью формул (31) и (39) преобразуем вначале равенство (29):

$$\left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -S_0 h_0 + V_0 \left[ 1 + \frac{S_0}{V_0} (h_0 + z_G) \right] = V_0 + S_0 z_G,$$

а потом и формулу (28):

$$Vh = V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_G) \lambda. \quad (40)$$

Совершенно аналогично находим

$$VH = V_0 H_0 + (V_0 + S_0 z_G) \Lambda. \quad (41)$$

Учитывая формулы (40) и (41), мы вначале перепишем уравнения (27):

$$(J_{x_1} + M_{44}) \ddot{\vartheta} + \rho g [V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_G) \lambda] \vartheta = 0,$$

$$(J_{y_1} + M_{55}) \ddot{\psi} + \rho g [V_0 H_0 + (V_0 + S_0 z_G) \Lambda] \psi = 0,$$

а затем, разделив полученные уравнения на коэффициенты при второй производной, представим их в виде

$$\ddot{\vartheta} + \omega_2^2 (1 + p_1 \lambda) \vartheta = 0, \quad \ddot{\psi} + \omega_3^2 (1 + p_2 \Lambda) \psi = 0, \quad (42)$$

где собственные частоты  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  соответственно боковой и килевой качек понтона на “тихой воде” и параметры  $p_1$ ,  $p_2$  определяются по формулам:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\rho g V_0 h_0}{J_{x_1} + M_{44}}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{\rho g V_0 H_0}{J_{y_1} + M_{55}}}, \quad p_1 = \frac{V_0 + S_0 z_G}{V_0 h_0}, \quad p_2 = \frac{V_0 + S_0 z_G}{V_0 H_0}. \quad (43)$$

Будем полагать, что изменение  $\Delta h$  метацентрической высоты  $h$  происходит с частотой поперечной волны, а изменение  $\Delta H$  метацентрической высоты  $H$  — с частотой продольной волны

$$\lambda = \lambda_0 \cos(\sigma_1 t), \quad \Lambda = \Lambda_0 \cos(\sigma_2 t), \quad (44)$$

в силу чего уравнения (42), будут выглядеть следующим образом:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_2^2 [1 + p_1 \lambda_0 \cos(\sigma_1 t)] \vartheta = 0, \quad \ddot{\psi} + \omega_3^2 [1 + p_2 \Lambda_0 \cos(\sigma_2 t)] \psi = 0, \quad (45)$$

где  $\lambda_0$ ,  $\Lambda_0$  — амплитудные значения изменений метацентрических высот.

Далее приведем уравнения (45) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерную переменную  $\tau$ , связанную с  $t$  зависимостью  $t = 2\tau/\sigma$ , найдем производные  $d\vartheta/d\tau$ ,  $d^2\vartheta/d\tau^2$ ,  $d\psi/d\tau$ ,  $d^2\psi/d\tau^2$  и, подставив их в уравнения (45), получим два уравнения Матье [19] для  $\vartheta$  и  $\psi$ :

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + [a_1 - 2q_1 \cos(2\tau)] \vartheta = 0, \quad \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + [a_2 - 2q_2 \cos(2\tau)] \psi = 0, \quad (46)$$

в которых параметры  $a_1$ ,  $a_2$  и  $q_1$ ,  $q_2$  определяются по формулам:

$$a_1 = \frac{4\omega_2^2}{\sigma_1^2}, \quad q_1 = -\frac{2\omega_2^2}{\sigma_1^2} p_1 \lambda_0 = -\frac{1}{2} a_1 p_1 \lambda_0, \quad a_2 = \frac{4\omega_3^2}{\sigma_2^2}, \quad q_2 = -\frac{2\omega_3^2}{\sigma_2^2} p_2 \Lambda_0 = -\frac{1}{2} a_2 p_2 \Lambda_0. \quad (47)$$

Решениями уравнений (46) являются функции Матье, которые могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастающими [19]. В первом случае рост амплитуды боковой или килевой качки не происходит и, следовательно, понтон не потеряет устойчивость. Во втором случае амплитуда качки будет неограниченно возрастать, что приведет к опрокидыванию понтона.

Из уравнений (46) вытекает, что существуют целые области значений на плоскости параметров  $a - q$  для каждого вида качки, которым соответствует устойчивое состояние понтона или, наоборот, неустойчивое. Поэтому для анализа устойчивости или неустойчивости понтона, мы воспользуемся диаграммой Айнса–Стретта, построенной на основании решения уравнения (46) и заимствованной из [19].

Таким образом, для исследования устойчивости понтона достаточно найти значения параметров  $a_i$  и  $q_i$ , соответствующих рассматриваемому понтону и выяснить в какую область попадает точка, координатами которой являются найденные параметры  $a_i$ ,  $q_i$ .

### 3. Анализ полученных результатов

Вычисление параметров  $a_i$ ,  $q_i$ , на наш взгляд, является процедурой непростой, поскольку они содержат не только собственные частоты боковой и килевой качки понтона, но и частоты колебаний жидкости внутри зумпфа. Формулы (43), определяющие собственные частоты качки понтона, содержат параметры его плавучести, остойчивости и качки, зависящие от конструктивных параметров понтона: длины  $L$ , радиуса  $R$  и расстояния между крайними трубами-поплавками  $d$ . В свою очередь, частоты колебания жидкости в зумпфе, определяемые по формулам (17), не зависят от параметров понтона, но зависят от размеров зумпфа.

Таким образом, параметры  $a_i$ ,  $q_i$  характеризующие параметрическую качку понтона определяются как параметрами понтона, так и размерами зумпфа, значения которых выбраны из интервалов

$$d_2 \in [4 \text{ м}; 10 \text{ м}], \quad d_3 \in [1.5 \text{ м}; 4 \text{ м}], \quad R \in [0.3 \text{ м}; 0.6 \text{ м}], \quad d \in [1.8 \text{ м}; 3.0 \text{ м}], \quad L \in [4.0 \text{ м}; 7.5 \text{ м}]. \quad (48)$$

Для выявления закономерностей влияния параметров понтона и размеров зумпфа на значение параметров  $a_i$  выполнены вычисления, на основании которых построены графики зависимостей  $a_1(d_2)$ ,  $a_2(d_2)$ ,  $a_1(d_3)$ ,  $a_2(d_3)$  при различных значениях параметров понтона, принадлежащих указанным интервалам. Здесь приведены лишь некоторые из графиков.

Так, графики зависимостей  $a_1(d_2)$ ,  $a_2(d_3)$ , построенные для понтона  $R = 0.35 \text{ м}$ ,  $L = 5.1 \text{ м}$ ,  $d = 2.4 \text{ м}$ , находящегося в зумпфе глубиной  $d_3 = 2 \text{ м}$ , монотонно возрастают, представляя собой слабо вогнутые кривые (рис. 3а). Напротив, графики функций  $a_1(d_3)$ ,  $a_2(d_3)$ , построенные для этого же понтона в зумпфе  $d_2 = 8 \text{ м}$ , монотонно убывают (рис. 3б), являясь слабо искривленными линиями положительной кривизны. Причем с увеличением глубины зумпфа кривые выполаживаются, а при  $d_3 \geq 3.14 \text{ м}$  параметр  $a_1$  уже практически не зависит от глубины зумпфа.

Анализ приведенных графиков показывает, что большие значения параметра  $a_i$  соответствуют килевой качке понтона, причем с увеличением размеров поперечного сечения зумпфа разница между значениями  $a_2$  и  $a_1$  становится более существенной. Наоборот, с увеличением глубины зумпфа эта разница уменьшается.

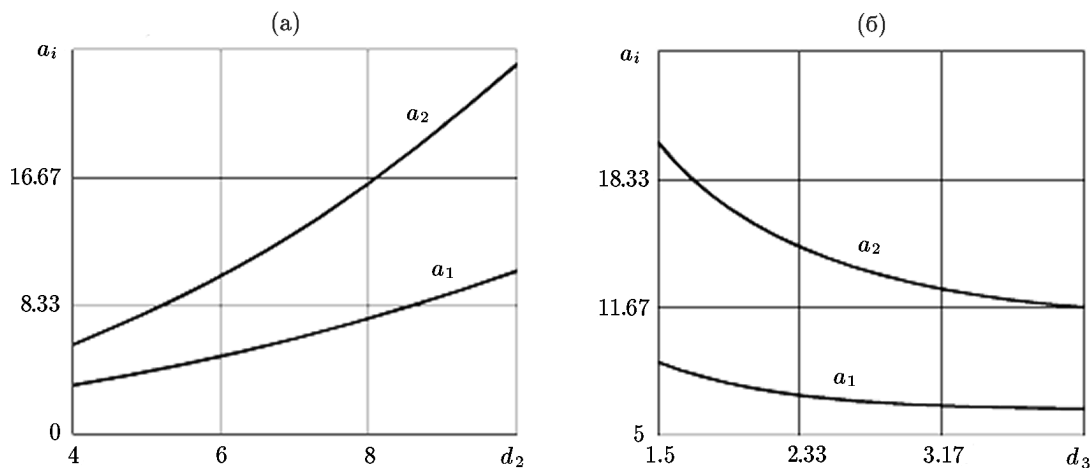


Рис. 3. Графики зависимости параметров  $a_1$ ,  $a_2$  от ширины  $d_2$  и глубины  $d_3$  зумпфа

Графики  $a_1(L)$  и  $a_2(L)$  (рис. 4а), построенные при  $R = 0.35$  м,  $d = 2.4$  м,  $d_2 = 8$  м,  $d_3 = 2$  м, показывают, что с увеличением длины труб-поплавков увеличиваются и параметры  $a_1$ ,  $a_2$ , причем рост параметра  $a_2$  происходит более интенсивно, чем параметра  $a_1$ .

Увеличение расстояния  $d$  между крайними трубами-поплавками понтона  $R = 0.35$  м,  $L = 5.1$  м, качающегося в зумпфе  $d_2 = 8$  м,  $d_3 = 2$  м, приводит к росту только параметра  $a_1$ , в то время как параметр  $a_2$  уменьшается, хотя и незначительно. При этом график функции  $a_1(d)$  представляет собой слабовыпуклую кривую, а график  $a_2(d)$  — прямую линию (рис. 4б).

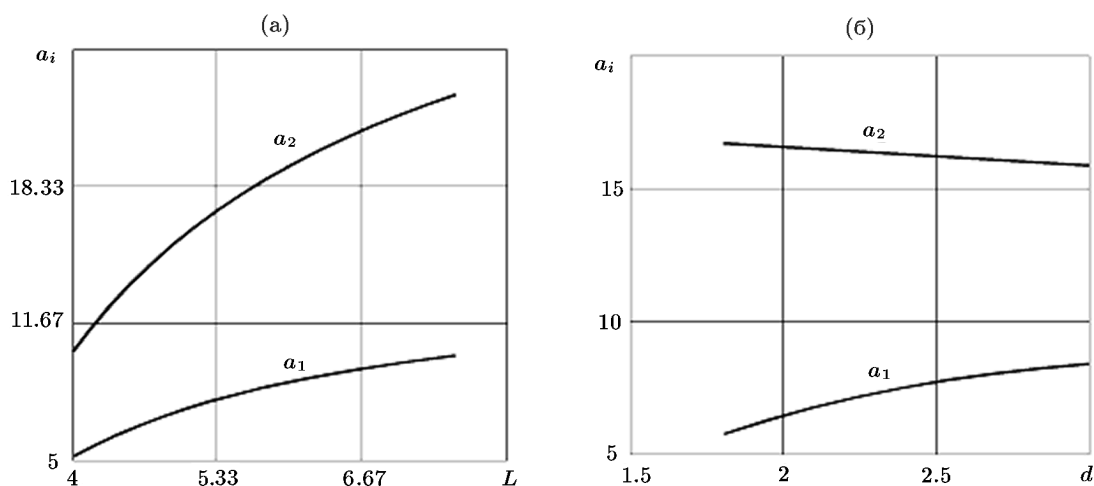


Рис. 4. Графики зависимости параметров  $a_1$ ,  $a_2$  от длины труб-поплавков  $L$  и от расстояния между крайними трубами-поплавками  $d$

Как видно из формул (47), параметры  $q_i$  линейно зависят от параметров  $a_i$ , амплитуд  $\lambda_0$ ,  $\Lambda_0$  и параметров  $p_i$ , которые, в свою очередь, зависят от водоизмещения понтона,

площади его ватерлинии в состоянии равновесия на “тихой воде”, величин метацентрических высот и положения центра тяжести понтона. Здесь же добавим, что знак минус в формулах (47) не имеет никакого значения, поскольку за амплитудное значение мы можем принять как максимальную величину всплытия, так и максимальную величину погружения. Поэтому далее в формулах для  $q_i$  мы не будем учитывать знак минус. Графики зависимостей  $q_i(a_i)$  совмещены с диаграммой Айнса–Стретта в процессе выполнения следующего примера.

Определим параметры  $a_i$ ,  $q_i$  понтона с параметрами  $R = 0.35$  м,  $d = 2.4$  м,  $L = 5.1$  м, качающегося в зумпфе  $d_1 = 12$  м,  $d_2 = 8$  м,  $d_3 = 2$  м, и выясним, есть ли среди них такие, которые имеют критические значения  $a_i^*$ ,  $q_i^*$ . Для этой цели построенные при  $\lambda_0 = \Lambda_0 = 0.2$  м графики  $q_i(a_i)$  перенесены на диаграмму Айнса–Стретта, процедура переноса которых показана на рис. 5, где диаграмма Айнса–Стретта для наглядности урезана, а ее вертикальный масштаб увеличен в два раза. Заштрихованные области на диаграмме принадлежат областям неустойчивости, любые точки которых являются критическими, а их координаты представляют собой критические параметры  $a_i^*$ ,  $q_i^*$ . График 1 соответствует боковой параметрической качке понтона, а график 2 — килевой.

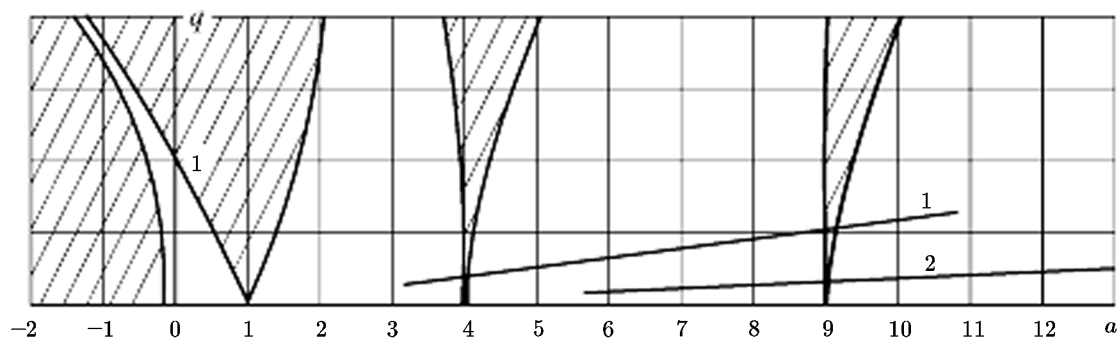


Рис. 5. Диаграмма Айнса–Стретта

Анализируя рис. 5, мы видим, что график 1 пересекает зоны неустойчивости на диаграмме Айнса–Стретта дважды, а график 2 — только раз. Причем первый раз прямая 1 пересекает зону неустойчивости диаграммы Айнса–Стретта на столь узком интервале, что его можно считать точкой, координатами которой являются  $a_{1(1)}^* = 4$ ,  $q_{1(1)}^* = 0.227$ . Второй раз график 1 пересекает зону неустойчивости в точках, координаты которых принадлежат интервалу  $a_{1(2)}^* \in [9; 9.155]$ ,  $q_{1(2)}^* \in [0.54; 0.553]$ .

Из рис. 5 видно, что интервал пересечения графиком 2 зоны неустойчивости вырождается в точку, координаты которой  $a_2^* = 9$ ,  $q_2^* = 0.232$ .

Далее из формул (47) с учетом формул (17) получаем два независимых друг от друга трансцендентных уравнения:

$$\frac{3\pi}{2} \frac{g}{d_2^*} \operatorname{th} \left( \frac{3\pi}{2} \frac{d_3}{d_2^*} \right) - \frac{4\omega_2^2}{a_1^*} = 0, \quad \frac{3\pi}{2} \frac{g}{d_1^*} \operatorname{th} \left( \frac{3\pi}{2} \frac{d_3}{d_1^*} \right) - \frac{4\omega_3^2}{a_2^*} = 0 \quad (49)$$

относительно неизвестных критических размеров зумпфа  $d_2^*$ ,  $d_1^*$  при боковой и килевой качках соответственно.

Если же по условиям проектирования задана ширина  $d_2$  или длина  $d_1$  зумпфа, то соответственно из первого или второго уравнения (49) мы находим критическую глубину зумпфа  $d_3^*$  и не назначаем ее, проектируя зумпф.

## 4. Выводы

1. Показано, что в условиях изменяющихся метацентрических высот понтона на регулярном волнении его боковую и килевую качки можно описать с помощью уравнения Матье с переменными коэффициентами.

2. На основе построенных графиков установлено:

а) параметр  $a_2$ , соответствующий килевой качке, всегда больше параметра  $a_1$ , соответствующего боковой качке;

б) с увеличением размеров поперечного сечения зумпфа параметры  $a_1$  и  $a_2$  увеличиваются, а с ростом глубины зумпфа — уменьшаются;

в) увеличение длины труб-поплавков приводит к росту параметров  $a_1$ ,  $a_2$ , причем рост  $a_2$  происходит более интенсивно, чем  $a_1$ ;

г) увеличение расстояния между крайними трубами-поплавками сопровождается ростом параметра  $a_1$  и уменьшением параметра  $a_2$ .

3. В процессе боковой параметрической качки обнаружены две зоны неустойчивости понтона, а при килевой качке — только одна.

## Литература

1. Кучер Н.А., Черданцев С.В., Протасов С.И. и др. Условия безопасного применения плавучих водоотливных установок // Безопасность труда в промышленности. — 2003. — № 1. — С. 12–14.
2. Черданцев С.В. Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах // ФТПРПИ. — 2013. — № 1. — С. 61–69.
3. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Проблема остойчивости понтонов, применяемых на угольных разрезах // Безопасность труда в промышленности. — 2013. — № 7. — С. 45–49.
4. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Остойчивость понтонов в зумпфах угольных разрезов на больших углах крена // Вестник КузГТУ. — 2013. — № 4. — С. 32–37.
5. Борисов Р.В., Луговский В.В., Мирохин Б.М. и др. Статика корабля. — СПб.: Судостроение, 2005.
6. Черданцев С.В. Уравнения движения понтонов в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. — 2013. — № 1. — С. 7–10.
7. Черданцев С.В., Черданцев Н.В. Формы движения понтона в зумпфе угольного разреза // Вест. Научн. центра по безопасности работ в угольной промышленности. — 2013. — № 1. — С. 45–54.
8. Черданцев С.В., Черданцев Н.В. Построение решения задачи о движении понтонов в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. — 2014. — № 5. — С. 3–8.
9. Черданцев С.В., Черданцев Н.В. Боковая качка понтонов в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. — 2013. — № 6. — С. 30–36.
10. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Анализ боковой качки понтонов, применяемых на угольных разрезах // Безопасность труда в промышленности. — 2013. — № 11. — С. 42–45.
11. Черданцев С.В., Черданцев Н.В. Математическое моделирование качки понтона в зумпфе угольного разреза // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 1. — С. 74–86.
12. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Остойчивость и вынужденная качка понтона в зумпфе угольного разреза // Вестн. Научн. центра по безопасности работ в угольной промышленности. — 2013. — № 2. — С. 91–97.
13. Черданцев С.В. Постановка задачи о гравитационных волнах жидкости в зумпфах угольных разрезов // Вестник КузГТУ. — 2012. — № 6. — С. 10–12.

14. **Черданцев С.В., Черданцев Н.В.** Качка понтона на регулярном волнении в зумпфе угольного разреза // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2014. — Т. 17, № 4. — С. 136–146.
15. **Черданцев С.В., Черданцев Н.В.** Анализ математической модели устойчивости понтона в процессе его вертикально-боковой качки в зумпфе угольного разреза // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 79–90.
16. **Сретенский Л.Н.** Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977.
17. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
18. **Ремез Ю.В.** Качка корабля. — Л.: Судостроение, 1983.
19. **McLachlan N.W.** Theory and application of Mathieu functions — Oxford, 1947. — Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. — М.: Изд-во ИЛ, 1953.

*Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.,  
в окончательном варианте 18 апреля 2016 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Kucher N.A., Cherdancev S.V., Protasov S.I. i dr.** Usloviya bezopasnogo primeneniya plavuchikh vodootlivnykh ustanovok // Bezopasnost' truda v promyshlennosti. — 2003. — № 1. — S. 12–14.
2. **Cherdancev S.V.** Teoreticheskie osnovy rascheta pontonov, ispol'zuemykh na ugol'nykh razrezakh // FTPRPI. — 2013. — № 1. — S. 61–69.
3. **Cherdancev N.V., Cherdancev S.V.** Problema ostojchivosti pontonov, primenyaemykh na ugol'nykh razrezakh // Bezopasnost' truda v promyshlennosti. — 2013. — № 7. — S. 45–49.
4. **Cherdancev N.V., Cherdancev S.V.** Ostojchivost' pontonov v zumpfakh ugol'nykh razrezov na bol'shikh uglakh krena // Vestnik KuzGTU. — 2013. — № 4. — S. 32–37.
5. **Borisov R.V., Lugovskii V.V., Mirokhin B.M. i dr.** Statika korablya. — SPb.: Sudostroenie, 2005.
6. **Cherdancev S.V.** Uravneniya dvizheniya pontonov v zumpfakh ugol'nykh razrezov // Vestnik KuzGTU. — 2013. — № 1. — S. 7–10.
7. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Formy dvizheniya pontona v zumpfe ugol'nogo razreza // Vest. Nauchn. centra po bezopasnosti rabot v ugol'noi promyshlennosti. — 2013. — № 1. — S. 45–54.
8. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Postroenie resheniya zadachi o dvizhenii pontonov v zumpfakh ugol'nykh razrezov // Vestnik KuzGTU. — 2014. — № 5. — S. 3–8.
9. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Bokovaya kachka pontonov v zumpfakh ugol'nykh razrezov // Vestnik KuzGTU. — 2013. — № 6. — S. 30–36.
10. **Cherdancev N.V., Cherdancev S.V.** Analiz bokovoi kachki pontonov, primenyaemykh na ugol'nykh razrezakh // Bezopasnost' truda v promyshlennosti. — 2013. — № 11. — S. 42–45.
11. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Matematicheskoe modelirovanie kachki pontona v zumpfe ugol'nogo razreza // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2014. — Т. 19, № 1. — S. 74–86.
12. **Cherdancev N.V., Cherdancev S.V.** Ostojchivost' i vynuzhdennaya kachka pontona v zumpfe ugol'nogo razreza // Vestn. Nauchn. centra po bezopasnosti rabot v ugol'noi promyshlennosti. — 2013. — № 2. — S. 91–97.
13. **Cherdancev S.V.** Postanovka zadachi o gravitacionnykh volnakh zhidkosti v zumpfakh ugol'nykh razrezov // Vestnik KuzGTU. — 2012. — № 6. — S. 10–12.

14. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Kachka pontona na regulyarnom volnenii v zumpfe ugol'nogo razreza // Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki. — 2014. — Т. 17, № 4. — S. 136–146.
15. **Cherdancev S.V., Cherdancev N.V.** Analiz matematicheskoi modeli ustoychivosti pontona v processe ego vertikal'no-bokovoi kachki v zumpfe ugol'nogo razreza // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2015. — Т. 20, № 2. — S. 79–90.
16. **Sretenskii L.N.** Teoriya volnovykh dvizhenii zhidkosti. — M.: Nauka, 1977.
17. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki. — M.: Vysshaya shkola, 1970.
18. **Remez Yu.V.** Kachka korablya. — L.: Sudostroenie, 1983.
19. **McLachlan N.W.** Theory and application of Mathieu functions — Oxford, 1947. — Mak-Lakhlan N.V. Teoriya i prilozheniya funktsii Mat'e. — M.: Izd-vo IL, 1953.