

УДК 539.375

## ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТРИНГЕРНОЙ ПАНЕЛИ С ОТВЕРСТИЕМ

М. В. Мир-Салим-заде

Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан

E-mail: mir-salim-zade@mail.ru

Рассматривается задача оптимизации несущей способности стрингерной панели с отверстием и распространяющейся от его контура прямолинейной трещиной. Определяется контур отверстия, при котором коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины равен нулю (т. е. трещина неподвижна), а максимальное окружное напряжение является наименьшим. При решении задачи минимизации использовались метод последовательных приближений, минимаксный критерий и симплексный алгоритм.

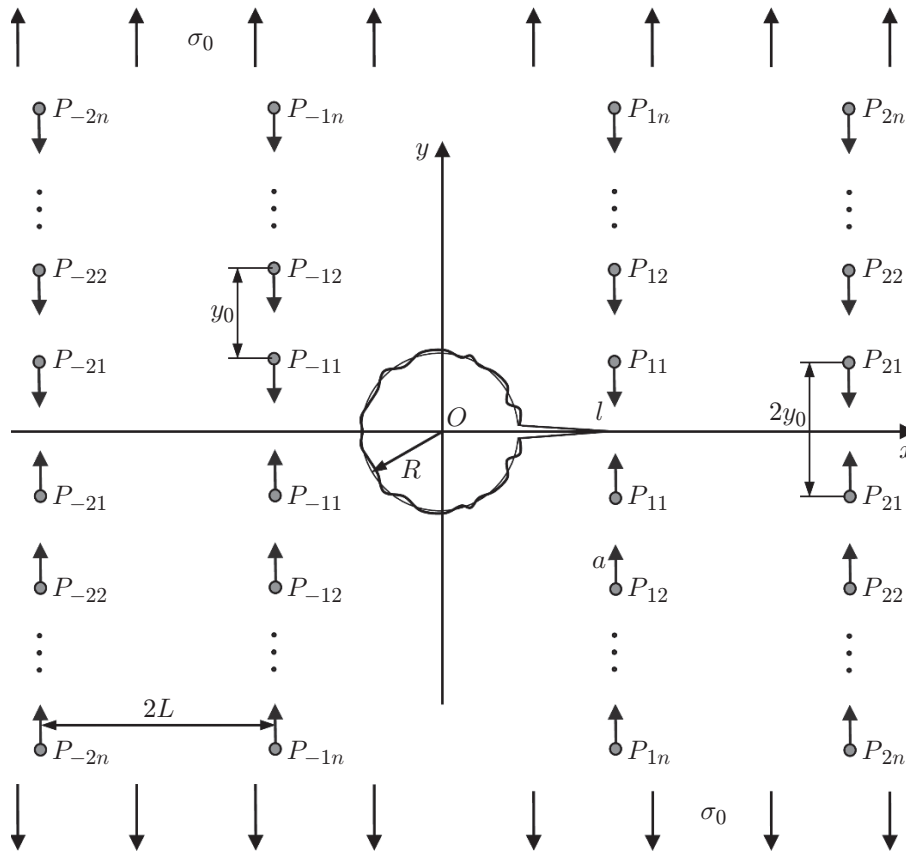
**Ключевые слова:** стрингерная панель, минимизация напряженного состояния, прямолинейная трещина, оптимальная форма отверстия, минимаксный критерий.

DOI: 10.15372/PMTF20220316

**Введение.** Задачи минимизации напряженного состояния пластин с отверстиями представляют интерес с точки зрения увеличения прочности и надежности конструкций, а также их долговечности. Для решения таких задач применяются различные подходы [1–19]. Полученные решения позволяют найти оптимальные формы отверстий. В реальном материале возможно присутствие трещин, что необходимо учитывать при решении задачи минимизации. В работах [9, 14, 15, 18] определены контуры отверстий, при которых отсутствует рост трещин.

В данной работе находится решение задачи минимизации напряженного состояния на контуре отверстия в панели, подкрепленной ребрами жесткости, при этом полагается, что от контура отверстия распространяется трещина. Полученное оптимальное решение позволяет повысить несущую способность панели. Как известно, несущая способность элемента конструкции, т. е. максимальная допустимая нагрузка, которую он способен выдержать, зависит от его прочности. В процессе эксплуатации конструкция подвергается воздействию различных факторов, уменьшающих прочностные параметры конструкции и ее элементов, а следовательно, и несущую способность. Прочность зависит от формы тела. Целью данной работы является повышение прочности стрингерной пластины и ее несущей способности за счет выбора оптимальной формы отверстия. Критериальной величиной при этом является максимальное окружное нормальное напряжение на контуре отверстия.

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную тонкую панель (пластину), усиленную регулярной системой ребер жесткости (стрингеров). Предполагается, что панель и



Расчетная схема задачи

стрингеры являются изотропными и выполнены из различных упругих материалов. Подкрепленная панель подвергается равномерному растяжению вдоль стрингеров с заданным на бесконечности напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Панель имеет отверстие  $r = \rho(\theta)$ , от контура которого распространяется прямолинейная трещина (см. рисунок).

Считается, что стрингеры прикрепаны к панели симметрично относительно ее поверхности в отдельных точках с постоянным шагом  $y_0$  по длине стрингера. Приняты следующие допущения: напряженное состояние в стрингерах одноосное, в пластине реализуется плоское напряженное состояние. Все площадки сцепления (точки крепления) одинаковы, с радиусом  $a_0$ , малым по сравнению с их шагом  $2L$  и другими характерными размерами. Стрингеры работают только на растяжение (не подвергаются изгибу); система стрингеров является системой ферменного типа, ослабления стрингеров за счет крепления к пластине не происходит. Панель и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления.

Действие стрингеров заменяется эквивалентными сосредоточенными силами  $P_{mn}$ , приложенными в точках  $z = \pm(2m + 1)L \pm ik y_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$ ) соединения стрингеров с панелью ( $z$  — комплексная переменная;  $i = \sqrt{-1}$ ). Эти силы заранее неизвестны.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

— на контуре отверстия

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0; \tag{1}$$

— на берегах трещины

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \rho(0) \leq x \leq l. \tag{2}$$

Здесь  $n, t$  — касательная и нормаль к контуру отверстия.

Целью работы является определение формы отверстия в стрингерной панели, при которой выполняются два условия: действующее на контуре тангенциальное напряжение  $\sigma_t$  является минимальным; распространяющаяся от контура отверстия трещина неподвижна. Следовательно, граничные условия задачи (1), (2) необходимо дополнить условием минимизации максимального окружного напряжения  $\sigma_t$  на контуре отверстия:

$$\min_{\zeta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \sigma_t(\theta, \zeta) \quad (3)$$

и условием равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины:

$$K_I^l = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\zeta$  — проектные параметры;  $C$  — набор ограничений, подлежащих определению;  $K_I^l$  — коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

**Решение краевой задачи.** Будем определять форму контура  $L_0$  отверстия в классе контуров, близких к круговым. Представим уравнение неизвестного контура  $L_0$  в виде

$$r = \rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta).$$

Здесь  $\varepsilon = R_{\max}/R$  — малый параметр;  $R_{\max}$  — наибольшая величина отклонения формы профиля контура  $L_0$  отверстия от окружности  $r = R$ ;  $H(\theta)$  — искомая функция, определяемая при решении обратной задачи.

Не ограничивая общности рассматриваемой задачи, полагаем, что искомая функция  $H(\theta)$  симметрична относительно оси  $Ox$  и может быть представлена в виде ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos(2k\theta).$$

Напряжения, перемещения, сосредоточенные силы  $P_{mn}$  и коэффициент интенсивности напряжений  $K_I^l$  будем искать в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \varepsilon \sigma_n^{(1)} + \dots, & \sigma_t &= \sigma_t^{(0)} + \varepsilon \sigma_t^{(1)} + \dots, & \tau_{nt} &= \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon \tau_{nt}^{(1)} + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \varepsilon u_n^{(1)} + \dots, & v_n &= v_n^{(0)} + \varepsilon v_n^{(1)} + \dots, \\ P_{mn} &= P_{mn}^{(0)} + \varepsilon P_{mn}^{(1)} + \dots, & K_I &= K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Эти приближения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости. Членами, содержащими  $\varepsilon$  в степени выше первой, будем пренебрегать.

Значения компонент тензора напряжений при  $r = \rho(\theta)$  получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности точки  $r = R$ . Используя известные формулы [20] для компонент напряжений  $\sigma_n, \tau_{nt}$ , краевые условия задачи представим в следующем виде:

— в нулевом приближении на контуре  $r = R$

$$\sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad (5)$$

на берегах трещин  $R \leq x \leq l$

$$\sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0; \quad (6)$$

— в первом приближении на контуре  $r = R$

$$\sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T,$$

на берегах трещин  $R \leq x \leq l$

$$\sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0,$$

где

$$N = -H(\theta) \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^{(0)}}{R} \frac{dH(\theta)}{d\theta}, \quad T = 0.$$

На основе формул Колосова — Мусхелишвили [20] и граничных условий (5), (6) задача в нулевом приближении сводится к определению аналитических функций  $\Phi^{(0)}(z)$ ,  $\Psi^{(0)}(z)$  из краевого условия:

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)] = 0, \quad \tau = Re^{i\theta}; \quad (7)$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi^{(0)'(x)}} + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0, \quad R \leq x \leq l. \quad (8)$$

Решение краевой задачи (7), (8) будем искать в виде

$$\Phi^{(k)}(z) = \Phi_0^{(k)}(z) + \Phi_1^{(k)}(z) + \Phi_2^{(k)}(z), \quad \Psi^{(k)}(z) = \Psi_0^{(k)}(z) + \Psi_1^{(k)}(z) + \Psi_2^{(k)}(z). \quad (9)$$

Здесь  $k = 0$ ; функции  $\Phi_0^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_0^{(0)}(z)$  описывают поля напряжений и деформаций в сплошной панели под действием сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$  и растягивающего напряжения  $\sigma_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\varkappa)} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right), \\ \Psi_0^{(0)}(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{i\varkappa}{2\pi h(1+\varkappa)} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right) + \\ &\quad + \frac{i}{2\pi h(1+\varkappa)} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{mL - iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  — толщина пластины.

Функции  $\Phi_1^{(0)}(z)$  и  $\Psi_1^{(0)}(z)$  будем искать в виде

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \frac{g^{(0)}(t)}{t - z} dt, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left( \frac{1}{t - z} - \frac{1}{(t - z)^2} \right) g^{(0)}(t) dt, \quad (11)$$

где  $g^{(0)}(x) = (2\mu/(1 + \varkappa)) d[v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]/dx$  — искомая функция;  $\mu$  — модуль сдвига материала панели;  $v^+$ ,  $v^-$  — значения перемещений на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно.

Функция  $g^{(0)}(x)$  и потенциалы  $\Phi_2^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_2^{(0)}(z)$  определяются из краевых условий (7), (8). Представим граничное условие (7) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_2^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_2^{(0)'}(\tau) + \Psi_2^{(0)}(\tau)] &= \\ &= -\Phi_*^{(0)}(\tau) - \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} + e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*^{(0)'}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau)], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \Phi_1^{(0)}(\tau), \quad \Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_0^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau).$$

Для решения краевой задачи (12) используем решение Мусхелишвили [20]. В результате определяем потенциалы  $\Phi_2^{(0)}(z)$  и  $\Psi_2^{(0)}(z)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(0)}(z) = & \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left( \frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right) g^{(0)}(t) dt - \\ & - \frac{i}{2\pi h(1+\varkappa)} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right) + \\ & + \frac{i\varkappa}{2\pi h(1+\varkappa)} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(z) = & \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2^{(0)}(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2^{(0)'}(z)}{z^2} + \\ & + \frac{1}{2\pi z} \int_R^l \left( \frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right) g^{(0)}(t) dt + \\ & + \frac{i}{2\pi h(1+\varkappa)z} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right). \end{aligned}$$

В формулах (13) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия  $R$ .

Налагая условие, чтобы функции (9) при  $k = 0$  удовлетворяли краевому условию (8) на берегах трещины, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g^{(0)}(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_R^l \frac{g^{(0)}(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_R^l K(t,x)g^{(0)}(t) dt = F^{(0)}(x). \tag{14}$$

Здесь

$$K(t,x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2t} + \frac{1}{2} \left( \frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right),$$

$$F^{(0)}(x) = f_0^{(0)}(x) + f_1^{(0)}(x),$$

$$\begin{aligned} f_0^{(0)}(x) = & -\sigma_0 + \frac{\varkappa+2}{\pi h(1+\varkappa)} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} ny_0 \frac{1}{(x-mL)^2 + n^2y_0^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} ny_0 \frac{1}{(x+mL)^2 + n^2y_0^2} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi h(1 + \varkappa)} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x - mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x - mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n y_0 \frac{(x + mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x + mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right), \\
f_1^{(0)}(x) = & - \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa)h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-mn}^{(0)} n \times \\
& \times \left[ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2\varkappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right) + \right. \\
& + \left( \varkappa - \frac{1}{\varkappa} \right) \left( -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
& - 4\varkappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right) - 2 \left( \frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right) \left. \right] - \\
& - \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa)h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(0)} \times \\
& \times \left[ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2\varkappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right) + \right. \\
& + \left( \varkappa - \frac{1}{\varkappa} \right) \left( -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\
& \quad \left. + 4\varkappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right) - \\
& \quad \left. - 2 \left( \frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right) \right] - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4}.
\end{aligned}$$

Для решения сингулярного интегрального уравнения (14) используем метод прямого решения сингулярных уравнений [21, 22]. Сингулярное интегральное уравнение (14) помимо особенности в ядре Коши имеет неподвижную особенность в точке выхода трещины на контур отверстия. В этой точке  $x = R$  функция  $g^{(0)}(x)$  имеет особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности может быть определен при анализе интегрального уравнения (14) [23]. В случае краевой трещины, в отличие от случая внутренней трещины, интеграл  $\int_R^l g^{(0)}(t) dt \neq 0$  равен отличной от нуля постоянной, которая выражается через величину раскрытия трещины на контуре отверстия и определяется в результате решения сингулярного интегрального уравнения.

В рассматриваемом случае обычно применяется метод решения интегрального уравнения, построенного на основе квадратурной формулы Гаусса — Якоби. Поскольку выражения для функций  $K(t, x)$  и  $F^{(0)}(x)$  являются громоздкими, определение истинной особенности функции  $g^{(0)}(t)$  на конце трещины затруднено. Кроме того, некоторое улучшение сходимости при использовании уточненного метода не приводит к уменьшению времени расчета вследствие громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. Будем использовать другой метод численного решения интегральных уравнений типа (14), эффективность которого проверена при решении многочисленных конкретных задач [22, 24–26].

Переходя к безразмерным переменным, представим решение в виде

$$g^{(0)}(\eta) = \frac{g_0^{(0)}(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

Здесь  $g_0^{(0)}(\eta)$  — ограниченная функция, непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$ . Эта функция заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

В рассматриваемой задаче напряжения на конце трещины, выходящем на контур отверстия, ограничены.

С помощью процедуры алгебраизации [21, 22] сингулярное интегральное уравнение (14) с дополнительным условием  $K_1^{(0)} = 0$  при  $x = R$  сводится к системе  $M$  линейных алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g^{(0)}(\tau_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(0)} = f_0^{(0)}(\eta_m) + f_1^{(0)}(\eta_m), \quad \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^{(0)} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$A_{mk} = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + K_0(\eta_m, \tau_k) \right),$$

$$g_k^{(0)} = g^{(0)}(\tau_k), \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad \eta_m = \cos \theta_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad \tau_k = \eta_k.$$

Для определения сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$  используем закон Гука, согласно которому величина сосредоточенной силы  $P_{mn}^{(0)}$ , действующей со стороны стрингера на каждую точку крепления, равна

$$P_{mn}^{(0)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(0)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где  $E_s$  — модуль Юнга материала стрингера;  $A_s$  — площадь поперечного сечения стрингера;  $2y_0 n$  — расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  — разность смещений рассматриваемых точек крепления, равная удлинению соответствующего участка стрингера.

Согласно [27] примем допущение, что выполняется условие совместности перемещений, т. е. разность упругих смещений точек  $mL + i(ny_0 - a_0)$  и  $mL - i(ny_0 - a_0)$  в рассматриваемой задаче равна разности смещений точек крепления  $\Delta v_{mn}^{(0)}$ . С использованием формул Колосова — Мухелишвили [20] и соотношений (9)–(11), (13) находим разность смещений  $\Delta v_{mn}^{(0)}$  указанных точек

$$\Delta v_{kr}^{(0)} = \Delta v_{kr}^0 + \Delta v_{kr}^1 + \Delta v_{kr}^2,$$

$$\Delta v_{kr}^0 = \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \varkappa) d_1 + \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa)\mu h} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \left( \varkappa \ln \frac{d_3 + a^2}{d_3 + b^2} + \frac{2d_0 d_1 [2k(k-m)L^2 + ab]}{(d_3 + b^2)(d_3 + a^2)} \right),$$

$$\Delta v_{kr}^1 = \frac{1 + \varkappa}{2\pi\mu} \int_R^l \omega(t) g^{(0)}(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_R^l \frac{d_2 g^{(0)}(t)}{A} dt,$$

$$A = d_2^2 + d_1^2, \quad \omega(t) = \operatorname{arctg}(d_1/d_2),$$

$$\Delta v_{kr}^2 = \frac{\sigma_0}{2\mu} \left[ \frac{(1 + \varkappa)d_1}{B_2} + \frac{2d_1 kL}{B_2^2} \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) + \frac{k^2 L^2 - d_1^2}{B_2^2} \left( \frac{d_1}{B_2} - d_1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\mu} \int_R^l \left[ \varkappa \left( \varphi_1 - \frac{td_1}{A_1^*} + \frac{d_1}{tA_1^*} \right) + \right.$$

$$+ \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) \left( \frac{(1 - t^2)d_1}{A_1^*} - \frac{2td_4 d_1 d_2 + d_1(d_4 - t^2 d_1)}{A_1^{*2}} \right) +$$

$$+ d_1 \left( \frac{1}{B_2} - 1 \right) \left( \frac{(1 - t^2)d_4}{tA_1^*} - \frac{(d_4 - t^2 d_1^2)(d_2 + 2td_4 d_1^2)}{A_1^{*2}} \right) -$$

$$- \left( \frac{2}{t} \omega - \frac{2 - t^2 + t^3 - t}{t} \operatorname{arctg} \frac{d_1}{kL} + \frac{2td_1}{B_2} + \right.$$

$$\left. + (4t^2 - 1)\varphi_1 + \frac{2t^3 d_1 (d_4^2 - t^2 d_1^2) - 2(t^2 + 1 - 2t^3)d_4 t d_1}{A_1^{*2}} \right] g^{(0)}(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa)\mu h} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ n \neq 0}} P_{mn}^{(0)} \Pi.$$

Здесь  $b = (r - n)y_0 - a$ ,  $d_0 = b + a$ ,  $d_1 = ry_0 - a$ ,  $d_2 = t - kL$ ,  $d_3 = (k - m)^2 L^2$ ,  $d_4 = 1 - tkL$ ,

$$\Pi = \varkappa \left( \frac{C_4(DkL - D_1 d_1) - C_2^*(D_1 kL - d_1 D)}{(D_1^2 + D^2)B_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_4(D_3 kL - D_2 d_1) - C_2^*(D_2 kL - d_1 D_3)}{(D_3^2 + D_2^2)B_2} \right) -$$

$$- \varkappa(d_5 - 1) \left( \frac{D_3 d_6 - 2ny_0 m L D_2}{(D_3^2 + D_2^2)D_4} - \frac{D d_6 - 2ny_0 m L D_1}{(D^2 + D_1^2)D_4} \right) +$$

$$+ \frac{1 + \varkappa}{2} \ln \frac{D^2 + D_1^2}{D_3^2 + D_2^2} + \frac{2ny_0(ny_0 - a)}{d_5 B_2} -$$

$$- (d_5 - 1) \left( \frac{C_4[mL(D^2 - D_1^2) + 2ny_0 D D_1] - C_2^*[2mL D_1 D - ny_0(D^2 - D_1^2)]}{(D^2 + D_1^2)^2 d_5} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_4[mL(D_3^2 - D_2^2) - 2ny_0 D_2 D_3] - C_2^*[ny_0(D_3^2 - D_2^2) + 2mL D_2 D_3]}{(D_3^2 + D_2^2)d_5} \right),$$

$$d_5 = m^2 L^2 + n^2 y_0^2, \quad d_6 = m^2 L^2 - n^2 y_0^2, \quad B_2 = k^2 L^2 + d_1^2,$$

$$C_4 = kL + kL/B_2, \quad C_2^* = d_1(1 + d_1/B_2), \quad D = kmL^2 + ny_0 d_1 - 1,$$

$$D_1 = d_1 mL - ny_0 kL, \quad D_2 = d_1 mL + ny_0 kL, \quad D_3 = kmL^2 - ny_0 d_1 - 1,$$

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg}(td_1/d_4), \quad D_4 = d_6^2 + 4y_0^2 L^2 m^2, \quad A_1^* = d_4^2 + d_1^2 t^2.$$



Решая системы (15), (16), определяем величины сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(0)}$ , приближенные значения  $g^{(0)}(\tau_m)$  в узловых точках и соответственно комплексные потенциалы в нулевом приближении  $\Phi^{(0)}(z)$ ,  $\Psi^{(0)}(z)$ .

Для коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при  $x = l$  в нулевом приближении имеем [22]

$$K_I^{(0)} = \sqrt{\pi(l - R)} \sum_{m=1}^M (-1)^m g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \left( \frac{2m - 1}{4M} \pi \right).$$

С использованием формул Колосова — Мусхелишвили и соотношений (9) находим компоненты напряжений в нулевом приближении, а затем функцию  $N$ .

Далее решается задача в первом приближении. Граничные условия задачи записываются в виде

$$\Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau)] = N; \tag{17}$$

$$\Phi^{(1)}(x) + \overline{\Phi^{(1)}(x)} + x \overline{\Phi^{(1)'}}(x) + \overline{\Psi^{(1)}}(x) = 0, \quad R \leq x \leq l. \tag{18}$$

Так же как в нулевом приближении, решение краевой задачи (17) будем искать в виде (9) при  $k = 1$ . Потенциалы  $\Phi_0^{(1)}(z)$  и  $\Psi_0^{(1)}(z)$  описывают поле напряжений и деформаций под действием системы сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  и определяются формулами, аналогичными (10), в которых  $P_{mn}^{(0)}$  следует заменить на  $P_{mn}^{(1)}$ , а напряжения  $\sigma_0$  положить равными нулю.

Потенциалы  $\Phi_1^{(1)}(z)$  и  $\Psi_1^{(1)}(z)$  будем искать в виде (11), при этом  $g^{(0)}(x)$  заменяется на функцию  $g^{(1)}(x)$ . Функции  $\Phi_2^{(1)}(z)$  и  $\Psi_2^{(1)}(z)$  определяются из граничного условия (17) с использованием метода Мусхелишвили:

$$\Phi_2^{(1)}(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{-2k}, \quad \Psi_2^{(1)}(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{-2k}.$$

Здесь функции  $\Phi_*^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_*^{(1)}(z)$  определяются формулами (17), в которых следует  $P_{mn}^{(0)}$  заменить на  $P_{mn}^{(1)}$ ,  $g^{(0)}(x)$  — на  $g^{(1)}(x)$ , напряжения  $\sigma_0$  положить равными нулю. Коэффициенты  $a_{2k}$ ,  $b_{2k}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -C'_{2n} R^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_0 = 0, \\ b_{2n} &= (2n - 1) R^2 a_{2n-2} - R^{2n} a_{-2n+2}, \quad n \geq 2, \\ b_0 &= 0, \quad b_2 = -C'_0 R^2, \quad N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_{2k} e^{-2ik\theta}. \end{aligned}$$

Для сосредоточенных сил  $P_{mn}^{(1)}$  имеем

$$P_{mn}^{(1)} = \frac{E_s A_s}{2y_0 n} \Delta v_{mn}^{(1)},$$

где разность смещений  $\Delta v_{mn}^{(1)}$  определяется так же, как в нулевом приближении.

Налагая условие, чтобы функции (9) при  $k = 1$  удовлетворяли краевому условию (18) на берегах трещины в первом приближении, после ряда преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g^{(1)}(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_R^l \frac{g^{(1)}(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi} \int_R^l K(t, x) g^{(1)}(t) dt = F^{(1)}(x). \tag{19}$$

Используя процедуру алгебраизации [21, 22], так же как в нулевом приближении, сингулярное интегральное уравнение (19) при дополнительном условии  $K_I^{(1)} = 0$  на контуре отверстия сводим в первом приближении к системе  $M$  линейных алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g^{(1)}(\tau_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\sum_{k=1}^M A_{mk} g_k^{(1)} = f_0^{(1)}(\eta_m) + f_1^{(1)}(\eta_m), \quad \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0,$$

где  $m = 1, 2, \dots, M - 1$ ;  $g_k^{(1)} = g^{(1)}(\tau_k)$ .

В первом приближении для коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при  $x = l$  находим [22]

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi(l-R)} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} g^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Аналогично могут быть построены решения задачи в последующих приближениях.

Полученные системы уравнений в первом приближении не являются замкнутыми, поскольку в их правые части входят коэффициенты  $d_{2k}$  (управляющие параметры  $\zeta$ ) разложения функции  $H(\theta)$  в ряд Фурье. Для построения дополнительных уравнений используем условие (3) с набором ограничений  $C$ , включающих системы уравнений в первом приближении, а также (4).

С помощью полученного решения находим напряжения  $\sigma_t$  на контуре  $L_0$  ( $r = \rho(\theta)$ ) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)}(\theta)|_{r=R} + \varepsilon \left( H(\theta) \frac{\partial \sigma_t^{(0)}(\theta)}{\partial r} + \sigma_t^{(1)}(\theta) \right) \Big|_{r=R}.$$

Из этого выражения находим максимальное значение функции  $\sigma_t(\theta, d_{2k})$  на контуре  $L_0$   $\max \sigma_t(\theta_*, d_{2k})$ . Здесь  $\theta_*$  — решение уравнения

$$\frac{d\sigma_t(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Для построения дополнительных уравнений, позволяющих определить проектные параметры (коэффициенты  $d_{2k}$ ), налагаем условие минимизации максимального окружного напряжения  $\sigma_t$  на контуре отверстия (3) при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m [g^{(0)}(t_m) + \varepsilon g^{(1)}(t_m)] \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right) = 0, \quad \max \sigma_t \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  — допустимое окружное напряжение для материала панели, определяемое в эксперименте.

Требуется выбрать функцию  $H(\theta)$ , так чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения  $\sigma_t$  (минимаксный критерий), т. е. необходимо найти значения коэффициентов  $d_{2k}$ , которые удовлетворяют полученной системе уравнений и при которых достигается минимум линейной функции  $\max \sigma_t$  (целевой функции). Так как напряжения  $\sigma_t(\theta, d_{2k})$  и величина  $\max \sigma_t$  линейно зависят от искомых коэффициентов  $d_{2k}$ , получаем задачу линейного программирования. При решении поставленной задачи наиболее эффективным является метод симплексного алгоритма.

Расчеты проводились при следующих значениях свободных параметров:  $a_0/L = 0,01$ ,  $y_0/L = 0,25$ . Считалось, что стрингеры выполнены из композита Al — сталь ( $E_s = 11,5 \times 10^4$  МПа), пластина — из сплава В95 ( $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа). Число стрингеров и точек

крепления принималось равным 14,  $M = 30$ . Для упрощения полагалось  $A_s/(y_0h) = 1$ . В результате расчетов получены следующие значения коэффициентов разложения искомой функции  $H(\theta)$ :  $d_2 = 0,1093$ ,  $d_4 = 0,0876$ ,  $d_6 = 0,0565$ ,  $d_8 = 0,0377$ ,  $d_{10} = 0,0242$ ,  $d_{12} = 0,0022$ ,  $d_{14} = 0,0017$ .

Сравнение оптимальной формы отверстия, определенного на основе условий (3), (4), с другими формами отверстий [28–31] в стрингерной пластине показывает, что напряжение  $\max \sigma_t$  (целевая функция) на оптимальном контуре отверстия минимально по сравнению с величиной  $\max \sigma_t$  на контуре отверстий другой формы. При использовании оптимальной формы отверстия вместо круговой максимальное напряжение  $\sigma_t$  уменьшается в  $1,47 \div 1,62$  раза. Поэтому пластина с отверстиями найденной формы имеет большую прочность по сравнению со стрингерными пластинами с другими отверстиями. В пластине с отверстием оптимальной формы обеспечивается уменьшение концентрации напряжений на контуре отверстия и коэффициента интенсивности напряжений, что позволяет увеличить несущую способность.

**Заключение.** Задача оптимизации несущей способности стрингерной панели с отверстием решается путем минимизации напряженного состояния на контуре отверстия при выполнении условия неподвижности трещины, распространяющейся от контура отверстия. Вычислены значения коэффициентов Фурье для ослабленной прямолинейной трещиной стрингерной панели с отверстием. Установлена связь между формой отверстия и коэффициентом интенсивности напряжений. В пластине с отверстием оптимальной формы обеспечивается уменьшение концентрации напряжений на контуре отверстия и коэффициента интенсивности напряжений, а также увеличение несущей способности стрингерной панели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Wu Z.** An efficient approach for shape optimization of components // Intern. J. Mech. Sci. 2005. V. 47, iss. 10. P. 1595–1610.
2. **Waldman W., Heller M.** Shape optimisation of holes for multi-peak stress minimization // Austral. J. Mech. Engng. 2006. V. 3, iss. 1. P. 61–71.
3. **Vigdergauz S.** The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // J. Mech. Materials Structures. 2006. V. 1, N 2. P. 387–406.
4. **Мир-Салим-заде М. В.** Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Материалы, технологии, инструменты. 2007. Т. 12, № 4. С. 10–14.
5. **Мир-Салим-заде М. В.** Обратная упругопластическая задача для клепаной перфорированной пластины // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Тверь: Твер. гос. техн. ун-т, 2007. С. 238–246.
6. **Wu Z.** Optimal hole shape for minimum stress concentration using parameterized geometry models // Structural Multidisciplinary Optimizat. 2009. V. 37. P. 625–634.
7. **Vigdergauz S.** Stress-smoothing holes in an elastic plate: The triangular checkerboard lattice of low symmetry // Math. Mech. Solids. 2012. V. 17, iss. 6. P. 652–665.
8. **Cherepanov G. P.** Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Phys. Mesomech. 2015. V. 18, iss. 4. P. 391–401.
9. **Калантарлы Н. М.** Равнопрочная форма отверстия для торможения роста трещины продольного сдвига // Пробл. машиностроения. 2017. Т. 20, № 4. С. 31–37.
10. **Samadi N., Abolbashari M. H., Ghaffarianjam H. R.** An effective approach for optimal hole shape with evolutionary structural optimization // Proc. of the 9th Australasian congress on applied mechanics (ACAM9), 27–29 Nov. 2017. Sydney: Engrs Australia, 2017. P. 1–8.

11. **Wang S. J., Lu A. Z., Zhang X. L., Zhang N.** Shape optimization of the hole in an orthotropic plate // *Mech. Based Design Structures Machines*. 2018. V. 46, iss. 1. P. 23–37.
12. **Vigdergauz S.** Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach // *Math. Mech. Solids*. 2018. V. 23, iss. 5. P. 805–819.
13. **Su Z., Xie C., Tang Y.** Stress distribution analysis and optimization for composite laminate containing hole of different shapes // *Aerospace Sci. Technol*. 2018. V. 76. P. 466–470.
14. **Мирсалимов В. М.** Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной // *Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых*. 2019. Т. 55, № 1. С. 12–21.
15. **Mirsalimov V. M.** Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks // *Math. Probl. Engng*. 2019. V. 2019. 4931489.
16. **Xu W., Wang H., Cai S., Ma H.** Fixed-grid hole-shape optimization for opening structures using smoothly deformable implicit curve // *Adv. Mech. Engng*. 2019. V. 11, iss. 2. P. 1–9.
17. **Karimi S., Fesharaki J. J., Dehkordi H. M.** An interactive procedure to reduce stress concentration factor // *Intern. J. Interactive Design Manufactur*. 2019. V. 13, iss. 4. P. 1503–1517.
18. **Mirsalimov V. M.** Minimizing the stressed state of a plate with a hole and cracks // *Engng Optimizat*. 2020. V. 52, iss. 2. P. 288–302.
19. **Zeng X., Lu A., Wang Sh.** Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate // *Mech. Based Design Structures Machines*. 2020. V. 48, iss. 2. P. 133–145.
20. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
21. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
22. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
23. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
24. **Мирсалимов В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984.
25. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
26. **Саврук М. П.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. Киев: Наук. думка, 1989.
27. **Мирсалимов В. М.** Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // *Физ.-хим. механика материалов*. 1986. Т. 22, № 1. С. 84–88.
28. **Mir-Salim-zadeh M. V.** Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole // *Intern. J. Fracture*. 2003. V. 122. P. L113–L117.
29. **Мир-Салим-заде М. В.** Предельно-равновесное состояние стрингерной панели с круговым отверстием и трещиной // *Деформация и разрушение материалов*. 2007. № 11. С. 23–30.
30. **Мир-Салим-заде М. В.** Предельное равновесие пластины с регулярной системой стрингеров и исходящими из кругового отверстия трещинами // *Пробл. машиностроения и надежности машин*. 2008. № 4. С. 44–51.
31. **Мир-Салим-заде М. В.** Частичное закрытие прямолинейной трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине // *Строит. механика инж. конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14, № 4. С. 313–322.

*Поступила в редакцию 10/XI 2020 г.,  
после доработки — 19/V 2021 г.  
Принята к публикации 31/V 2021 г.*