ПМТФ, № 2, 1973

УДК 532.516

ВЕТВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. В. Пухначев

(Новосибирск)

Изучаются формы равновесия жидкости, находящейся на внешней или внутренней поверхности твердого цилиндра и вращающейся вместе с ним как твердое тело. Определяется главная часть решения уравнения равновесия при малых отклонениях определяющего параметра от критического значения. Исследуется также бифуркация вращательно-симметричных движений со свободной границей в поле массовых сил.

1. Пусть вязкая несжимаемая невесомая капиллярная жидкость заполняет пространство между двумя соосными цилиндрическими поверхностями радиусов r_1 и $r_2 > r_1$. Внутренняя поверхность твердая и вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг своей оси. Внешняя поверхность является свободной. Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве масштабов длины, скорости и давления величины r_2, Ωr_2, $\rho\Omega^2 r_2^2$ (ρ — плотность жидкости). Движение рассматривается в цилиндрической системе координат r, θ, z, где $r = 0$ — общая ось цилиндров.

Предположим, что на жидкость действует вихревое поле массовых сил $(0, F(r), 0)$. Тогда уравнения Навье — Стокса имеют стационарное решение, в котором поле скоростей есть $(0, V(r), 0)$, а давление

$$P(r) = -\int_r^1 \frac{V^2(s)}{s}\, ds + P_*$$

где P_* — постоянная. Функция $V(r)$ однозначно определяется как решение краевой задачи

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{1}{r^2}V = -F(r)$$

$$V = a \quad \text{при } r = a, \qquad \frac{dV}{dr} - \frac{1}{r}V = 0 \quad \text{при } r = 1$$

$$(a = r_2 / r_1 < 1).$$

При этом на поверхности $r = a$ выполнено условие прилипания, а на поверхности $r = 1$ — условие непротекания и условие отсутствия касательного напряжения. Выбирая $P_* = \beta^{-1}$, где $\beta = \rho\Omega^2 r_2^3 / \sigma$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, убеждаемся, что при $r = 1$ нормальное напряжение равно капиллярному давлению. Таким образом, поверхность $r = 1$ является свободной границей.

Физический интерес представляет случай $F = 0$, так что

$$V = r, \quad P = (r^2 - 1) / 2 + \beta^{-1}.$$

В этом случае жидкость и цилиндр вращаются как одно твердое тело.

Описанное выше движение жидкости назовем основным. Далее разыскиваются стационарные вращательно-симметричные движения, ответ-

вляющиеся от основного. Поле скоростей и давление ищем в виде

$$\mathbf{v}^1 = (u,\ V + v,\ w),\ p^1 = P + R^{-1}p\ (R = \Omega r_2^2 / \nu),$$

где R — число Рейнольдса. Функции u, v, w, p зависят лишь от r, z. Подстановка $\mathbf{v}^1$, p^1 в уравнения Навье — Стокса приводит к следующей системе относительно $\mathbf{v} = (u,\ v,\ w)$ и p:

$$\begin{gathered}\Delta u - r^{-2}u - p_r + 2R\omega v = R\,(uu_r + wu_z - r^{-1}v^2)\\ \Delta v - r^{-2}v - Rgu = R\,(uv_r + wv_z + r^{-1}uv)\\ \Delta w - p_z = R\,(uw_r + ww_z)\\ r^{-1}(ru)_r + w_z = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь нижние индексы r, z означают соответствующие частные производные

$$\omega(r) = \frac{V}{r},\qquad g(r) = \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Пусть $r = \eta(z)$ задает уравнение свободной границы. Будем предполагать, что движение l-периодично по z

$$\mathbf{v}(r,\ z + l) = \mathbf{v}(r,\ z),\ \ p(r,\ z + l) = p(r,\ z),\ \ \eta(z + l) = \eta(z) \tag{1.2}$$

и что u, v, p, η — четные функции z, а w — нечетная,

$$\begin{gathered}u(r,\ z) = u(r,\ -z),\quad v(r,\ z) = v(r,\ -z),\quad \eta(z) = \eta(-z)\\ p(r,\ z) = p(r,\ -z),\quad w(r,\ z) = -w(r,\ -z)\end{gathered} \tag{1.3}$$

На твердой поверхности выполнено условие прилипания

$$u = v = w = 0 \text{ при } r = a \tag{1.4}$$

На свободной границе нормальная составляющая скорости и касательное напряжение обращаются в нуль, а нормальное напряжение равно капиллярному давлению. В терминах $\mathbf{v}$, p, η это означает

$$u - \dot\eta w = 0 \quad \text{при} \quad r = \eta \tag{1.5}$$

$$(1 - \dot\eta^2)(u_z + w_r) + 2\dot\eta\,(u_r - w_z) = 0 \quad \text{при } r = \eta \tag{1.6}$$

$$(V + v)_r - r^{-1}(V + r) - \dot\eta v_z = 0 \quad \text{при } r = \eta \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\beta}\left[\frac{\ddot\eta}{(1 + \dot\eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{\eta\,(1 + \dot\eta^2)^{1/2}}\right] = -\left(P + \frac{p}{R}\right) +\\ + \frac{2}{R\,(1 + \dot\eta^2)}\,[u_r - \dot\eta^2(u_z + w_r) + \dot\eta^2 w_z] \quad \text{при } r = \eta\\ (\dot\eta = d\eta / dz,\quad \ddot\eta = d^2\eta / dz^2)\end{gathered} \tag{1.8}$$

К этим условиям добавляется условие равенства объемов жидкости, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = l$, в основном и возмущенном движениях

$$\int_0^l (\eta^2 - 1)\,dz = 0 \tag{1.9}$$

Уравнения (1.1) с условиями (1.2) — (1.9) имеют тривиальное решение $\mathbf{v} = 0$, $p = 0$, $\eta = 1$ (напомним, что $V'(1) - V(1) = 0$, $P(1) = \beta^{-1}$).

Разыскиваются решения задачи (1.1) — (1.9), ответвляющиеся от тривиального при некоторых значениях параметров β, R.

2. В этом и следующем пунктах предполагается, что $F = 0$, $V = r$; при этом $w = 1$, $g = 2$. Покажем, что тогда в решении задачи (1.1) — (1.9) $v = 0$, $p = \text{const}$.

Умножим первое уравнение (1.1) на u, второе на v, третье на w. Проинтегрируем эти равенства по области $0 < z < l$, $a < r < \eta$ и результаты сложим. Обе части полученного соотношения проинтегрируем по частям, используя уравнение неразрывности и условия (1.2) — (1.7). Найдем

$$\int_0^l dz \int_a^{\eta(z)} \left[u_r^2 + \frac{u^2}{r^2} + w_z^2 + \frac{1}{2}\left(v_r - \frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} v_z^2 + \frac{1}{2}(u_z + w_r)^2\right] r\, dr$$

Отсюда и из (1.4) следует: $u = v = w = 0$. Уравнения (1.1) дают $p = \text{const}$; обозначим эту постоянную через C.

Таким образом, если основное решение есть вращение жидкости как твердого тела, то в возмущенном движении поле скоростей остается прежним, а возмущается лишь свободная поверхность. Этот факт был отмечен И Цзя-шунем [1], который изучал устойчивость по линейному приближению жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра. Задача о ветвлении сводится к отысканию функции η и постоянной C так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{\ddot{\eta}}{(1+\dot{\eta}^2)^{3/2}} - \frac{1}{\eta(1+\dot{\eta}^2)^{1/2}} + 1 + \frac{\beta}{2}(\eta^2 - 1) + \frac{\beta C}{R} = 0 \qquad (2.1)$$

условия периодичности и четности η, а также условие (1.9).

Полученная задача является частным случаем задачи, рассмотренной Л. А. Слобожаниным [2]. В этой работе методом Ляпунова — Шмидта исследовалась задача о ветвлении в случае, когда жидкость заключена между параллельными пластинами $z = 0$ и $z = l/2$ и вращается вместе с ними как твердое тело. При этом форма равновесия заранее не предполагалась осесимметричной. Плоский аналог этой задачи был рассмотрен ранее Ю. К. Братухиным и Л. Н. Мауриным [3].

С помощью приема, предложенного в [2], задача (2.1), (1.9) сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно η. Для этого следует исключить постоянную C, проинтегрировав (2.1) от 0 до l и воспользовавшись (1.9). В результате получим

$$\frac{\ddot{\eta}}{(1+\dot{\eta}^2)^{3/2}} - \frac{1}{\eta(1+\dot{\eta}^2)^{1/2}} + \frac{\beta}{2}(\eta^2 - 1) + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{dz}{\eta(1+\dot{\eta}^2)^{1/2}} = 0 \qquad (2.2)$$

Линеаризованное вблизи $\eta = 1$ уравнение (2.2) имеет вид

$$\ddot{x} + x - \frac{1}{l}\int_0^l x\, dz + \beta x = 0 \qquad (2.3)$$

Присоединив к (2.3) условия

$$x(z + l) = x(z),\ x(z) = x(-z)$$

получим линейную задачу на собственные значения. Ее собственные значения суть

$$\beta_0 = 0,\ \beta_k = \alpha^2 k^2 - 1 \quad \text{при} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ (\alpha = 2\pi/l),$$

а собственные функции таковы:

$$x_0 = 1,\ x_k = \cos \alpha kz \text{ при } k \geqslant 1$$

Каждое собственное число простое и, согласно теореме М. А. Красносельского [4], является точкой бифуркации уравнения (2.2). Имея в виду, что по физическому смыслу параметр $\beta = \rho\Omega^2 r_2^3 / \sigma$ положителен, запишем условие ветвления в виде

$$\rho\Omega^2 r_2^3 / \rho = (2\pi k / l)^2 - 1, \quad 2\pi k/l > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

Заметим, что условие ветвления не зависит от числа Рейнольдса. Этот факт был указан в [1].

Для нахождения главной части решений уравнения (2.2), ответвляющихся от $\eta = 1$, воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта. Следуя [2], можно показать, что близкие к $\eta = 1$ вещественные решения уравнения (2.2) существуют лишь при $\beta < \beta_k$. (Аналогичный вывод сделан в работе [3].) Далее ограничиваемся отысканием решений, ответвляющихся при наименьшем бифуркационном значении $\beta = \beta_1 = \alpha^2 - 1$; $\alpha > 1$, поскольку $\beta_1 > 0$. Полагая $\mu^2 = \alpha^2 - 1 - \beta$, ищем решение в виде ряда

$$\eta = 1 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \mu^3\eta_3 + \ldots$$

(Сходимость этого ряда следует из результатов [2].) Функция η_1, η_2, η_3 удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\eta}_1 + \alpha^2\eta_1 - \frac{1}{l}\int_0^l \eta_1\, dz = 0 \tag{2.5}$$

$$\ddot{\eta}_2 + \alpha^2\eta_2 - \frac{1}{l}\int_0^l \eta_2\, dz = -\frac{\alpha^2 - 3}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{l}\int_0^l \left(-\eta_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}_1^2\right) dz \tag{2.6}$$

$$\ddot{\eta}_3 + \alpha^2\eta_3 - \frac{1}{l}\int_0^l \eta_3\, dz = \eta_1 - (\alpha^2 - 3)\eta_1\eta_2 - \dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 - \eta_1^3 -$$

$$- \frac{3\alpha^2 - 1}{2}\eta_1\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{l}\int_0^l \left(-2\eta_1\eta_2 + \dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \eta_1^3 - \frac{1}{2}\eta_1\dot{\eta}_1^2\right) dz \tag{2.7}$$

Уравнения (2.5), (2.6) решаются последовательно и дают

$$\eta_1 = q\cos\alpha z, \quad \eta_2 = -{}^1/_4 q^2 + q^1\cos\alpha z - {}^1/_4 q^2\alpha^{-2}\cos 2\alpha z$$

где q, q^1 — неопределенные коэффициенты. Постоянная q находится из условия разрешимости уравнения (2.7) в классе l — периодических функций. Ее значение есть

$$q = 2^{3/2}3^{-1/2}\alpha\,(\alpha^6 - \alpha^4 + 3\alpha^2 + 1)^{-1/2} \tag{2.8}$$

(второе значение — q отбрасываем, поскольку отвечающее ему решение уравнения (2.2) получается из данного решения заменой z на $z + l / 2$). Постоянная q^1 определяется из условия разрешимости уравнения для η_4, которое не приводится. Оказывается, что $q^1 = 0$. Итак, главная часть решения (2.2) при малых $\mu = (\alpha^2 - 1 - \beta)^{1/2}$ представима в виде

$$\eta = 1 + \mu q\cos\alpha z - \mu^2 q^2\,({}^1/_4 + {}^1/_4\alpha^{-2}\cos 2\alpha z) + O(\mu^3) \tag{2.9}$$

где $q(\alpha)$ дается формулой (2.8)

3. Условие ветвления (2.4), а также форма возмущенной поверхности не зависят от параметра a — безразмерного радиуса твердого цилиндра. (Предполагается μ настолько малым, что $\min \eta > a$.) Решение задачи об осесимметричных формах равновесия вращающейся жидкости, ответвляющихся от кругового цилиндра, не изменится, если внутренне тело имеет произвольную форму, лишь бы оно содержалось в цилиндре $r \leqslant a < 1$. В частности, твердое тело вообще может отсутствовать. Более того, проведенное рассмотрение остается в силе, если равенство $V = r$ для основного движения выполнено лишь для r из некоторой окрестности единицы. Если угол смачивания равен $\pi / 2$, то решение задачи можно совместить с условиями прилипания на вращающихся вместе с цилиндром плоскостях $z = 0$ и $z = kl / 2$; получим задачу, близкую к рассмотренной в [2].

Выше уже отмечалось, что условие ветвления (2.4) не зависит от числа Рейнольдса. Таким образом, неединственность формы равновесия вращающейся жидкости обнаруживается при сколь угодно малых числах Рейнольдса. Этот эффект обязан своим происхождением наличию свободной границы. Известно, что стационарное движение вязкой жидкости, ограниченной твердыми стенками, при малых числах Рейнольдса является единственным. Описанная неединственность движения со свободной границей, по существу, имеет геометрическую природу: она связана с возможностью «изгибания» минимальной поверхности в поле центробежных сил, заданной уравнением (2.1). Эта деформация поверхности не является изометрической, но сохраняет объем.

В возмущенном и основном движениях давление отличается на постоянную $C = C(\mu)$; $C \to 0$ при $\mu \to 0$. Подчиняя решение дополнительному условию $C(\mu) \equiv 0$, получаем связь между $\alpha = 2\pi / l$ и μ. Соотношения $C = 0$, (2.1) и (1.9) приводят к равенству

$$\frac{1}{l} \int_0^l \frac{dz}{\eta (1 + \dot{\eta}^2)^{1/2}} = 1$$

Подставляя в это равенство выражение из (2.9), находим, что $\alpha = \sqrt{3} + O(\mu)$ при $\mu \to 0$.

В работе [2] утверждается, что при малых μ ответвившиеся равновесные формы являются неустойчивыми. На существование форм равновесия, далеких от тривиальной (в плоской задаче), указывают результаты работы [3].

Если с увеличением μ будет нарушено условие непересечения свободной границы с поверхностью цилиндра, $\min \eta \geqslant a$, то решение уравнения (2.2) потеряет физический смысл. В этом случае, однако, можно искать нетривиальные формы равновесия вращающейся жидкости с несвязной свободной границей. Их нахождение сводится к определению кусочно-гладкой функции $\eta(z)$, которая удовлетворяет уравнению (2.2) лишь на интервале $|z| < b$ $(0 < b < l/2)$, а для $b < z < l / 2$, $-l / 2 < z < -b$ выполнено $\eta = a$. Функция η по-прежнему предполагается l-периодической, четной и удовлетворяющей условию (1.9). В точках соприкосновения свободной границы с твердой поверхностью выполняются условия

$$\eta(\pm b) = a, \quad \dot{}(\pm b) = \mp \operatorname{tg} \gamma$$

где $\gamma \in (0, \pi)$ — заданный угол смачивания. Параметр b определяется в процессе решения. Решение поставленной задачи существует, если величины $(1 - a) / l$ и γ достаточно малы.

Рассмотрим задачу о формах равновесия жидкости, которая находится на внутренней поверхности полого цилиндра и вращается вместе с ним как

твердое тело. Эта задача сводится к уравнению (2.2), в котором параметр β следует заменить на $-\beta$. Бифуркационные значения β даются формулой $\beta_k = 1 - \alpha^2 k^2$, $k \geqslant 1$ — целое. Поскольку $\beta > 0$, то при любом фиксированном $\alpha < 1$ их конечное число. От каждого значения β_k ответвляется пара нетривиальных равновесных форм, которые существуют теперь при $\beta > \beta_k$. Этот вывод является несколько неожиданным, так как противоречит априорному представлению о стабилизирующей роли центробежной силы в рассматриваемом движении.

4. Рассмотрим задачу о ветвлении (1.1) — (1.9) в случае $V \not\equiv r$.

Обозначим через $C_l^{m+\lambda}$ подпространство l-периодических четных функций пространства Гёльдера $C^{m+\lambda}(-\infty, \infty)$, $m \geqslant 0$ — целое, $0 < \lambda < 1$. Пусть $\eta(z) \in C_l^{3+\lambda}$ и $\min \eta > a$. При фиксированном η и $V(r) \in C^3 \times [a, \max \eta]$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу: в области $\pi = \{r, z\colon\ a \leqslant r \leqslant \eta(z),\ -\infty < z < \infty\}$ найти решение $\mathbf{v}(r, z)$, $p(r, z)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) — (1.7). Ниже C_0, C_1, C_2 обозначают положительные постоянные; $|\mathbf{v}|_{2+\lambda}$, $|\nabla p|_\lambda$, $|\eta - 1|_{3+\lambda}$ означают гельдеровские нормы соответствующих функций, вычисленные по области их определения. Справедливо следующее предложение, приводимое без доказательства.

Предложение 4.1. Пусть $|\eta - 1|_{3+\lambda} \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и при $a < r < 1 + \varepsilon$ выполнено одно из условий

$$\omega(r) = \frac{V}{r} > 0, \qquad g(r) = \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} > 0 \tag{4.1}$$

$$R\left|\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right| < C_0 \tag{4.2}$$

где C_0 зависит лишь от l, a, ε. Тогда решение задачи (1.1) — (1.7) существует, единственно (в малом) и удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{v}|_{2+\lambda} + |\nabla p|_\lambda \leqslant C_1(|K|\,|\eta - 1|_{3+\lambda} + |\eta - 1|^2_{3+\lambda}) \qquad (K = V''(1)) \tag{4.3}$$

Утверждение о единственности решения задачи (1.1) — (1.7) следует понимать так: вектор скорости $\mathbf{v}$ определен однозначно, а давление p — с точностью до постоянного слагаемого. Положим $p = p_0 + C$, где функция p_0 определена однозначно при данном $\mathbf{v}$ уравнениями (1.1) и условием

$$\int_0^l dz \int_a^{\eta(z)} p_0 r\, dr = 0$$

Далее для простоты предполагается, что $V''(1) = K = 0$. В этом случае условие ветвления решения задачи (1.1) — (1.9) записывается явно.

Подставим решение $\mathbf{v}$, $p = p_0 + C$ вспомогательной задачи в оставшееся условие на свободной границе (1.8). В равенстве (1.8) заменим $P(\eta)$ его представлением $P = \beta^{-1} + s(\eta^2 - 1)/2 + \Phi$, где $s = V^2(1)$, $\Phi(\eta) = O(\eta - 1)^3$ при $\eta \to 1$; предполагаем, что $V(1) \neq 0$. Преобразуем полученное соотношение, исключив постоянную C с помощью условия (1.9). В результате имеем

$$N(\eta) \equiv \frac{\ddot\eta}{(1 + \dot\eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{\eta(1 + \dot\eta^2)^{1/2}} + 1 + \frac{\beta s}{2}(\eta^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{l}\int_0^l \frac{dz}{\eta(1 + \dot\eta^2)^{1/3}} + Q(\eta) - \frac{1}{l}\int_0^l Q[\eta(z)]\, dz = 0 \tag{4.4}$$

$$\Big(Q(\eta) = \beta\Phi(\eta) + \frac{\beta}{R}\bar p_0(\eta) -$$

$$- \frac{2\beta}{R(1 + \dot\eta^2)}\{\bar u_r(\eta) - \dot\eta[\bar u_z(\eta) + \bar w_r(\eta)] + \dot\eta^2 \bar w_z(\eta)\}\Big)$$

Символ $\bar{u}_r$ обозначает оператор, действующий по правилу: $\bar{u}_r[\eta(z)] = u_r[\eta(z), z]$, где $u(r, z)$ определяется из решения задачи (1.1) — (1.7). Аналогично определяются операторы $\bar{u}_z, \ldots, \bar{p}_0$.

Отметим, что в условиях предложения 4.1 из неравенства (4.3) при $K = 0$ и определения Φ следует оценка $Q(\eta)$ вида

$$|Q(\eta)|_{1+\lambda} \leqslant C_2 |\eta - 1|_{3+\lambda}^2 \tag{4.5}$$

Соотношение (4.4) можно трактовать как операторное уравнение для определения функции $\eta(z)$. Если η — решение (4.4), то условие постоянства объема (1.9) выполнено автоматически. Вследствие оценки (4.3) и условий (1.2), (1.3), которым удовлетворяют функции u, w, p, оператор N действует из $C_l^{3+\lambda}$ в $C_l^{1+\lambda}$. Доказывается, что оператор N дифференцируем по Фреше в шаре $|\eta - 1|_{3+\lambda} < \varepsilon$. Его производная Фреше в точке $\eta = 1$ на основании (4.4), (4.5) имеет вид

$$\ddot{x} + x - \frac{1}{l}\int_0^l x\,dz + \beta s x \equiv L(x) + \beta s x \tag{4.6}$$

Оператор L имеет простые собственные числа $\mu_0 = 0$, $\mu_k = 1 - \alpha^2 k^2$ при $k = 1, 2, \ldots$. Так как $\mu_k > 1$, то существует обратный к $L - I$ оператор $(L - I)^{-1}$: $C_l^{1+\lambda} \to C_l^{3+\lambda}$ (I — тождественный оператор). Из 4.4) — (4.6) и определения производной Фреше следует: что

$$N(x + 1) = L(x) + \beta s x + T(x) \qquad (|T(x)|_{1+\lambda} = O(|x|_{3+\lambda}^2) \text{ при } x \to 0)$$

Обозначив $x = \eta - 1$, запишем уравнение (4.4) в виде

$$(L - I)(x) + T(x) = -(1 + \beta s)\,x$$

и применим к обеим частям равенства оператор $(L - I)^{-1}$. Получим

$$x + (L - I)^{-1}T(x) = -(1 + \beta s)(L - I)^{-1}(x) \tag{4.7}$$

Здесь оператор $(L - I)^{-1}$ является вполне непрерывным в $C_l^{3+\lambda}$. Оператор $(L - I)^{-1}T$ непрерывен и допускает оценку

$$|(L - I)^{-1}T(x)|_{3+\lambda} = O(|x|_{3+\lambda}^2) \text{ при } x \to 0$$

Отсюда вытекает, что существует резольвента [4] нелинейного оператора $(L - I)^{-1}T$. Иными словами, уравнение $x + (L - I)^{-1}T(x) = f$, $f \in C_l^{3+\lambda}$ при любом достаточно малом $|f|_{3+\lambda}$ имеет единственное решение в некотором шаре $|x|_{3+\lambda} < \delta$, $0 < \delta < \varepsilon$. Это решение представимо в виде $x = \mathcal{B}f$, где $\mathcal{B}$ — непрерывный оператор в $C_l^{3+\lambda}$. Более того, $\mathcal{B} = I + S$, причем $|S(f)|_{3+\lambda} = O(|f|_{3+\lambda}^2)$ при $f \to 0$. Это позволяет записать уравнение (4.7) в эквивалентной форме

$$x = -(1 + \beta s)[(L - I)^{-1}(x) + S(L - I)^{-1}(x)] \equiv -(1 + \beta s)\,A(x) \tag{4.8}$$

Оператор A вполне непрерывен в шаре $|x|_{3+\lambda} < \delta$ и $A(0) = 0$. Его производная Фреше в нуле есть $(L - I)^{-1}$. Согласно теореме М. А. Красносельского [4], каждое простое характеристическое число λ_k оператора $(L - I)^{-1}$ является точкой бифуркации уравнения (4.8). Но между харак-

теристическими числами λ_k оператора $(L - I)^{-1}$ и простыми собственными числами μ_k оператора L имеется очевидная связь: $1 + \lambda_k = \mu_k$. Обозначая $\lambda_k = -(1 + \beta_k s)$ и используя выражения для μ_k, находим бифуркационные значения параметра β: $\beta_0 = 0$, $\beta_k = s^{-1}(\alpha^2 k^2 - 1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$

Уравнение (4.8) при малых $x = \eta - 1$ эквивалентно задаче (1.1)— (1.9). Учитывая положительность параметра β, запишем условие ветвления решения задачи (1.1) — (1.9) в виде

$$\beta_k = s^{-1}(\alpha^2 k^2 - 1), \quad \alpha k > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

Условие (4.9) сходно с условием ветвления (2.4) и, подобно последнему, не содержит числа Рейнольдса. Однако вторичное течение, ответвляющееся от основного при $\beta = \beta_k$, уже не сводится к простому изменению формы свободной поверхности. Оно качественно напоминает известный вихрь Тейлора, возникающий при движении жидкости между вращающимися цилиндрами.

В более общем случае, когда $V''(1) \neq 0$, но выполнено одно из условий (4.1) или (4.2), ход рассуждений, приводящих к доказательству существования вторичных течений, остается прежним. Однако условие ветвления (зависящее от R) имеет сложный вид и здесь не приводится.

Автор признателен В. Х. Изаксону за обсуждение.

Поступила 20 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Chia-Shun Yih. Instability of a rotating liquid film with a free surface. Proc. Roy. Soc., 1960, Ser. A, vol. 258, No. 1292.
2. Слобожанин Л. А. Об одной задаче ветвления цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости. В сб. «Математическая физика, функциональный анализ». вып. 2, Харьков, 1971.
3. Братухин Ю. К., Маурин Л. Н. Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.