Теплофизика и аэромеханика, 2021, том 28, № 3

УДК 532.516

О течении вязкой жидкости в поле силы тяжести

В.Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поставлена и решена задача о движении в поле силы тяжести вязкой жидкости, граничащей с твердыми криволинейными стенками. Жидкость подвергается колебательным воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве. Постановка задачи включает в себя уравнения Навье–Стокса и неразрывности и условия на границах стенок (условия на твердых границах жидкости). В результате проведенного исследования обнаружен, в частности, новый гидромеханический эффект, состоящий в том, что жидкость ведет себя парадоксально: на фоне колебаний совершает стационарное движение «снизу вверх».

Ключевые слова: вязкая жидкость, поле силы тяжести, колебательные воздействия, стационарное движение.

Введение

Явления, связанные с колебательными воздействиями, весьма многочисленны и разнообразны. Колебательные воздействия на гидромеханические системы могут существенно влиять на поведение последних, быть причиной нетривиальных эффектов, служить средством управления указанными системами (см. работы [1–6], а также [7] и представленную там литературу). В частности, согласно работе [2] колебательные воздействия могут приводить к гидромеханическому эффекту, аналогичному «маятнику Капицы» [8], состоящему в том, что в присутствии поля силы тяжести находящееся в жидкости твердое тело совершает «перевернутые» колебания. В настоящей работе рассматривается задача о течении в поле силы тяжести вязкой несжимаемой жидкости, испытывающей периодические по времени воздействия, характеризующиеся отсутствием выделенного направления в пространстве.

Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости между бесконечно длинными твердыми телами Ξ_A, Ξ_B. Тело Ξ_A ограничено изнутри круговой цилиндрической поверхностью Γ_A радиуса A. Тело Ξ_B ограничено извне круговой цилиндрической поверхностью Γ_B радиуса B ($A > B$). В каждый момент времени t оси поверхностей Γ_A, Γ_B находятся на оси Z цилиндрической системы координат R, θ, Z. Жидкость заполняет область Ω: $B < R < A$ ($0 \le \theta < 2\pi$; $-\infty < Z < \infty$). Радиусы A и B периодически с периодом T изменяются со временем. Поверхности (границы) Γ_A, Γ_B также периодически с периодом T

колеблются вдоль оси Z. В соответствии с несжимаемостью жидкости радиусы A, B удовлетворяют условию постоянства разности $A^2–B^2$. Требуется определить независящее от начальных данных (периодическое по времени) осесимметричное движение жидкости.

Пусть $\tau = t/T$, $A = \overline{A} + \tilde{A}f$ ($\overline{A} > 0$, $\tilde{A} > 0$ — постоянные; $f = \sin\pi\tau$); $\overline{B}$ — значение B при $A = \overline{A}$, $r = R/\overline{A}$, $z = Z/\overline{A}$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания r и z соответственно; $\varepsilon = \tilde{A}/\overline{A}$, $\sigma = \overline{B}/\overline{A}$, $a = A/\overline{A}$, $b = B/\overline{B}$ $(a^2 - \sigma^2 b^2 = 1 - \sigma^2)$; U_A — скорость движения границы Γ_A в направлении оси Z; $u_A = TU_A/\overline{A} = \tilde{u}_A \sin(2\pi\tau + \alpha)$ ($\tilde{u}_A$ и α — постоянные), U_B — скорость движения границы Γ_B в направлении оси Z; $u_B = TU_B/\overline{A} = \tilde{u}_B \sin(2\pi\tau + \beta)$ ($\tilde{u}_B$ и β — постоянные); ρ, ν и $\mathbf{V}$ — соответственно плотность, кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\overline{A} = v_r(r,\tau)\mathbf{e}_r + v_z(r,\tau)\mathbf{e}_z$, $p = T^2P/\left(\rho\overline{A}^2\right) = p(r,\tau)$, P — давление в жидкости, $\mathrm{Re} = \overline{A}^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ — ускорение свободного падения ($g \geq 0$ — постоянная), $\kappa = gT^2/\tilde{A}$.

Уравнения Навье–Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах Γ_A, Γ_B, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} - \varepsilon\kappa\mathbf{e}_z \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau}\mathbf{e}_r + u_A\mathbf{e}_z \quad \text{при } r = a, \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \frac{db}{d\tau}\mathbf{e}_r + u_B\mathbf{e}_z \quad \text{при } r = \sigma b. \tag{4}$$

Решение задачи

Из соотношений (2)–(4) следует

$$v_r = w/r, \tag{5}$$

где $w = a\,(da/d\tau) = \sigma^2 b\,(db/d\tau)$.

Используя (1), (3) – (5), найдем

$$p = -\frac{dw}{d\tau}\ln r - \frac{w^2}{2r^2} + p'(\tau) \quad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\,r^2\frac{\partial v_z}{\partial \tau} = r^2\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + (1 - \mathrm{Re}\,w)r\frac{\partial v_z}{\partial r} - \varepsilon\kappa\,\mathrm{Re}\,r^2 \quad \text{в } \Omega, \tag{7}$$

$$v_z = u_A \quad \text{при } r = a, \tag{8}$$

$$v_z = u_B \quad \text{при } r = \sigma b. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу (7) – (9) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра (см. [7, 8]). Предположим, что

$$v_z \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Используя (7) – (10), в ε^N-приближении ($N = 0, 1$) получим

$$\operatorname{Re} r^2 \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r\frac{\partial v_N}{\partial r} = -N \operatorname{Re} \frac{df}{d\tau} r \frac{\partial v_0}{\partial r} - N\kappa \operatorname{Re} r^2 \ \text{ в } \ \bar{\Omega}, \tag{11}$$

$$v_N = (1-N)u_A - Nf \frac{\partial v_0}{\partial r} \quad \text{при } \ r = 1, \tag{12}$$

$$v_N = (1-N)u_B - N\frac{f}{\sigma}\cdot\frac{\partial v_0}{\partial r} \quad \text{при } \ r = \sigma, \tag{13}$$

где $\bar{\Omega}$ — область $\sigma < r < 1$ $(0 \le \theta < 2\pi;\ -\infty < z < \infty)$.

Пусть $N = 0$. Выполнив в задаче (11) – (13) подстановку

$$v_0 = \operatorname{Real}\left(\hat{v}(r)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\right), \tag{14}$$

определим следующую задачу:

$$r^2 \frac{d^2\hat{v}}{dr^2} + r\frac{d\hat{v}}{dr} - 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Re} r^2 \hat{v} = 0 \quad \text{в } \ \bar{\Omega}, \tag{15}$$

$$\hat{v} = -\mathrm{i}\tilde{u}_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \quad \text{при } r = 1, \tag{16}$$

$$\hat{v} = -\mathrm{i}u_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \quad \text{при } r = \sigma. \tag{17}$$

Используя (14) – (17), найдем

$$v_0 = \operatorname{Imag}\left\{\frac{1}{Q}\left[\left(\tilde{u}_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} K_0(q\sigma) - \tilde{u}_B\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\, K_0(q)\right) I_0(qr) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\left(\tilde{u}_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} I_0(q\sigma) - \tilde{u}_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} I_0(q)\right) K_0(qr)\right] \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\right\}, \tag{18}$$

где $q = (1+\mathrm{i})\sqrt{\pi \operatorname{Re}}$; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя;

$$Q = I_0(q)K_0(q\sigma) - I_0(q\sigma)K_0(q).$$

Пусть $N = 1$. Произведем усреднение (11) – (13) по безразмерному времени τ. В результате получим

$$r^2 \frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + r\frac{d\bar{v}}{dr} = \operatorname{Re} r\left\langle \frac{df}{d\tau}\frac{\partial v_0}{\partial r}\right\rangle + \varepsilon\kappa \operatorname{Re} r^2 \quad \text{в } \ \bar{\Omega}, \tag{19}$$

$$\bar{v} = -\left\langle f\frac{\partial v_0}{\partial r}\right\rangle \quad \text{при } r = 1, \tag{20}$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{\sigma}\left\langle f\frac{\partial v_0}{\partial r}\right\rangle \quad \text{при } r = \sigma, \tag{21}$$

здесь $\langle\ldots\rangle = \int_\tau^{\tau+1} \ldots\, d\tau'$, $\bar{v} = \langle v_1\rangle$. Правые части уравнения (11) и условий (12), (13) представляют собой суммы вида $\eta + \operatorname{Real}\left(\xi \mathrm{e}^{4\pi\,\mathrm{i}\,\tau}\right)$, где η, ξ в (11) — функции r, а в (12), (13) — постоянные. В соответствии с этим, согласно (11) – (13) и (19) – (21), имеем

$$v_1 = \bar{v} + \operatorname{Real}\left(\tilde{v}(r)\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\tau}\right). \tag{22}$$

Используя (18) – (21), найдем

$$\overline{v}=\frac{1}{\ln\sigma}\operatorname{Real}\left\{\left[\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\left.\frac{d\hat{v}}{dr}\right|_{r=1}-\frac{1}{\sigma}\left.\frac{d\hat{v}}{dr}\right|_{r=\sigma}\right)-\frac{1}{4}\kappa\operatorname{Re}(\sigma^2-1)-\pi\operatorname{Re}\int_1^{\sigma}\frac{\hat{v}}{r'}\,dr'\right]\ln r-\right.\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left.\frac{d\hat{v}}{dr}\right|_{r=1}-\frac{1}{4}\kappa\operatorname{Re}(r^2-1)-\pi\operatorname{Re}\int_1^{r}\frac{\hat{v}}{r'}\,dr'\right]\ln\sigma\right\}. \qquad (23)$$

Формулами

$$v_z=v_0+\varepsilon v_1 \qquad (24)$$

и (5), (6), (18), (22), (23) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Из этого решения, в частности, следует, что жидкость на фоне колебаний совершает стационарное прямолинейное движение (как при $\mathbf{g}\neq 0$, так и при $\mathbf{g}=0$).

Остановимся на вопросе о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях разности $1-\sigma$.

Пусть $s=(1-r)/(1-\sigma)$,

$$\tilde{u}_A=\hat{u}_A(1-\sigma)^{\lambda},\ \tilde{u}_B=\hat{u}_B(1-\sigma)^{\lambda}, \qquad (25)$$

где $\hat{u}_A$, $\hat{u}_B$, $\lambda\geq 0$ — параметры.

Используя (5), (18), (22) – (25), получим

$$\langle\mathbf{v}\rangle\sim-\frac{1}{2}\varepsilon\left[\kappa\operatorname{Re}s(1-s)(1-\sigma)^2-\chi(1-\sigma)^{\lambda-1}\right]\mathbf{e}_z \quad \text{при } 1-\sigma\to 0\ \ (\lambda<4), \qquad (26)$$

где $\chi=\hat{u}_A\cos\alpha-\hat{u}_B\cos\beta$. Ввиду ограниченности $|\langle\mathbf{v}\rangle|$ должно выполняться условие $\lambda\geq 1$.

При $\mathbf{g}\neq 0$, $\chi=0$ течение жидкости (в рассматриваемом приближении) представляет собой течение Пуазейля между твердыми стенками с неподвижными плоскими границами (см. [9]). При $\mathbf{g}=0$, $\chi\neq 0$ жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}_z$, если $\chi<0$, и в направлении, противоположенном направлению вектора $\mathbf{e}_z$, если $\chi>0$.

При $\mathbf{g}\neq 0$, $\chi\neq 0$ согласно (26) (на фоне колебаний) имеет место следующее:

— если $\lambda>3$, то жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{g}$, т.е. «сверху вниз»;

— если $\lambda<3$, то при $\chi<0$ жидкость движется в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{g}$, т.е. «снизу вверх», а при $\chi>0$ жидкость движется «сверху вниз»;

— если $\lambda=3$, то при $\chi>0$ жидкость движется «сверху вниз», при $\chi<-\kappa\operatorname{Re}/4$ жидкость движется «снизу вверх», при $-\kappa\operatorname{Re}/4<\chi<0$ в области $\overline{\Omega}$ присутствуют три слоя — l_1, l_2, l_3, соответственно определяемые соотношениями

$$\sigma<r<1-s_1(1-\sigma),\quad 1-s_1(1-\sigma)<r<1-s_2(1-\sigma),\quad 1-s_2(1-\sigma)<r<1,$$

где $s_1=\left[1+\sqrt{1+4\chi/(\kappa\operatorname{Re})}\right]\big/2$, $s_2=\left[1-\sqrt{1+4\chi/(\kappa\operatorname{Re})}\right]\big/2$, в которых происходит движение жидкости как «сверху вниз» (в слое l_2), так и «снизу вверх» (в слоях l_1, l_3).

Отметим, что при получении формулы (26) необходимо учитывать следующий принципиально важный момент: если $1-\sigma$ стремится к нулю, стенки неограниченно сближаются (не соприкасаясь), а амплитуды скоростей стенок $\tilde{u}_{\mathrm{A}}$, $\tilde{u}_{\mathrm{B}}$ остаются неизменными, то возникают, в частности, бесконечно большие силы, что лишено физического смысла. Ввиду этого совместно со стремлением $1-\sigma$ к нулю должны стремиться к нулю также амплитуды $\tilde{u}_{\mathrm{A}}, \tilde{u}_{\mathrm{B}}$. Таким образом возникает параметр λ, который является мерой скорости стремления к нулю $\tilde{u}_{\mathrm{A}}$ и $\tilde{u}_{\mathrm{B}}$ при стремлении к нулю $1 - \sigma$. Указанные действия приводят к формуле (26), т.е. к имеющему физический смысл выражению для скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ в приближении «близких стенок». Формулой (26), в частности, устанавливается наличие качественно различных течений жидкости и определяется их структура при различных значениях параметра λ. Это свидетельствует о том, что согласно законам физики (механики) такие течения жидкости могут реально существовать и могут быть зарегистрированы экспериментально. Вопрос о том, в каких конкретно экспериментальных условиях реализуется то или иное теоретически обнаруженное («предсказанное» формулой (26)) течение жидкости, может быть решен только экспериментально.

Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о наличии эффекта, состоящего в том, что в поле силы тяжести вязкая жидкость, подвергающаяся колебательным воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, ведет себя парадоксально — на фоне колебаний совершает стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения (движение «снизу вверх»). Причиной данного эффекта является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [1, 12]).

Результаты работы могут служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований движения жидкости в рассмотренных и аналогичных им гидромеханических условиях.

Список литературы

1. **Сенницкий В.Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18–26.
2. **Сенницкий В.Л.** О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
3. **Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P.** Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Sci. and Technology. 2013. Vol. 25. P. 121–126.
4. **Сенницкий В.Л.** Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97.
5. **Коновалов В.В., Любимова Т.П.** Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56.
6. **Сенницкий В.Л.** Преимущественно однонаправленное вращение вязкой жидкости со свободной границей // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 1. С. 163–166.
7. **Сенницкий В.Л.** Парадоксальное движение жидкости // Междунар. журнал прикл. и фундаментальных исследований. 2017. № 8, ч. 1. С. 28–33.
8. **Капица П.Л.** Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44, вып. 1. С. 7–20.
9. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с.
10. **Найфэ А.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
11. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1955. 520 с.
12. **Сенницкий В.Л.** О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикл. механика и технич. физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2020 г.,
после доработки — 13 января 2021 г.,
принята к публикации — 23 марта 2021 г.